



DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER 2

Homologie persistante appliquée à la classification automatique des styles musicaux

Maximilien Wang

Directeur de mémoire : Moreno Andreatta, CNRS, IRMA/Université de Strasbourg

Printemps 2023

Table des matières

1	Homologie persistante	6
1.1	Outils géométriques	6
1.1.1	Triangulations et complexes simpliciaux	6
1.1.2	Complexes de Vietoris-Rips et de Čech	7
1.2	Rappels sur l'homologie	9
1.2.1	Définition et exemples	10
1.2.2	Aspects computationnels	10
1.2.3	Fonctorialité	11
1.2.4	Collapse simplicial élémentaire	11
1.2.5	Homologie en dimension zéro	11
1.2.6	Homologie d'un graphe	11
1.3	Homologie persistante	12
1.3.1	Définition et premières propriétés	12
1.3.2	Visualisations	13
1.3.3	Interprétation	14
1.3.4	Aspects computationnels	15
1.3.5	Stabilité	16
1.4	Point de vue catégorique	20
1.4.1	Homologie	20
1.4.2	Lien entre complexe simplicial filtré et fonction de filtration	21
1.4.3	Persistence	21
1.4.4	Entrelacement de diagrammes	21
1.4.5	Diagrammes d'espaces vectoriels	23
1.4.6	Code-barres et diagrammes de persistence	25
1.4.7	Stabilité	27
1.4.8	Persistence étendue	27
2	Application à l'analyse musicale	28
2.1	Modélisation	28
2.1.1	Structure des fichiers MIDI	28
2.1.2	Formalisation par la théorie des groupes	29
2.1.3	transformations PLR	30
2.1.4	Généralisation des systèmes intervalliques	31
2.1.5	Construction d'un nuage de points	34
2.1.6	Analyse des code-barres	34
2.1.7	Résultats	35
2.2	Quelques applications de la transformée de Fourier discrète	36
2.2.1	Le théorème de Babbitt	37
2.2.2	Propriétés de la TFD	38
2.2.3	Étude de la Z-relation	39
2.3	Détermination des accords non trivialement homométriques	39
A	Homologie persistante	41
B	Feuille de calcul SAGE	46
C	Homométrie	49

Introduction

« *La musique est un exercice occulte d'arithmétique de l'âme qui ignore qu'elle compte, car elle fait beaucoup de chose dans les perceptions confuses ou insensibles qu'elle ne peut remarquer par une aperception distincte. [...] Donc, même si l'âme ne sent pas qu'elle compte, elle sent cependant l'effet de ce décompte sensible, c'est-à-dire le plaisir qui en résulte dans les consonances et le déplaisir dans les dissonances* »¹

L'objectif de ce mémoire est l'étude et l'application de l'homologie persistante dans un contexte d'analyse musicale. L'homologie persistante est un outil d'analyse topologie de données (TDA) relativement récent, à la frontière entre la topologie algébrique et les mathématiques appliquées. Dans ce mémoire, nous présentons dans un premier temps un aperçu des liens historiques partagés par les mathématiques et la musique. Nous abordons ensuite les aspects purement mathématiques avec une introduction à la théorie de l'homologie persistante ainsi qu'à ses aspects computationnels. En particulier, nous présentons une formalisation de cette théorie sous le prisme des catégories.

L'idée d'utiliser l'homologie persistante à des fins d'analyse musicale est actuellement explorée dans des travaux de thèse. Des premières applications partielles sont présentées dans [CAL22]. Ces travaux actuels suggèrent notamment l'utilisation de la transformée de Fourier discrète (TFD) à des fins d'application en homologie persistante. Nous présentons en ce sens cet outil et quelques problèmes « mathémusicaux » associés : d'une part le théorème de l'hexacorde et ses généralisations, d'autre part l'étude de la Z -relation et de l'homométrie. Nous donnons notamment une table complète et inédite du nombre de t -uplets d'accords à k notes en Z -relation dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \leq 24$.

Nous nous intéresserons par ailleurs à la modélisation du phénomène musical. Nous présenterons en ce sens un formalisme algébrique issu des théoriciens de la musique du XX^e siècle, à savoir une introduction aux théories transformationnelles et néo-Riemanniennes ainsi qu'une exposition des systèmes d'intervalles généralisés de David Lewin.

Je remercie particulièrement mon tuteur Moreno Andreatta pour m'avoir initié au monde des « mathémusiques ». Je remercie également Pierre Guillot pour ses conseils dans l'utilisation de GAP, ainsi que Victoria Callet et Riccardo Gilblas pour les échanges mathématiques ou musicaux que nous avons pu avoir au cours de mon stage à l'IRMA.

1. Gottfried Wilhelm Leibniz, *Lettre à Goldbach du 17 avril 1712*, trad. F. de Buzon, *Philosophie*, 59, 1998, p.11.

Aperçu historique

La pensée grecque de la musique et son héritage. L'idée que la musique est intimement liée aux mathématiques apparaît dès l'antiquité. Les rapports rationnels entre les nombres régissent l'univers et sont le témoin d'un ordre ontologique divin. D'après une citation attribuée à tort à Plutarque, « Tout, disent-ils, a été construit par Dieu sur la base de l'harmonie musicale. »² La conception des penseurs grecs, et plus généralement celle du monde antique et médiéval, est celle d'un ordonnancement harmonieux de l'univers. Les intervalles musicaux, régis par de bonnes proportions, sont ainsi considérés comme l'expression tangible de l'organisation mathématique de l'univers. La beauté musicale découle alors de l'application de principes mathématiques. La musique est considérée comme une discipline théorique scientifique, se plaçant aux cotés de l'arithmétique, de la géométrie et de l'astronomie. C'est avec Boèce que le concept de *quadrivium* apparaît, terme signifiant « quadruple voie. » Aux côtés du *trivium*, à savoir la grammaire, la rhétorique et la logique, ils forment les sept arts libéraux.

On attribue à Pythagore³, bien qu'aucun de ses écrits ne nous soit parvenu, la compréhension des rapports rationnels régissant les hauteurs musicales. L'expérience est la suivante : on considère une corde vibrante attachée horizontalement, fixée en ses deux extrémités d'une longueur l . Notons f la fréquence ainsi produite. Si l'on divise par 2 la longueur de la corde vibrante, on obtient une fréquence $2f$, ce qui correspond musicalement à l'octave du son fondamental f . En examinant successivement les rapports de longueur (1 : 2), (2 : 3) et (3 : 4), on obtient les harmoniques correspondant respectivement à l'octave, la quinte et la quarte. Ces premiers rapports sont usuellement considérés comme consonants, et l'on parle d'intervalle juste.

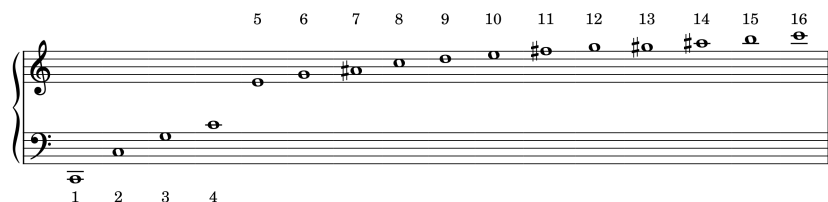


FIGURE 1 – Harmoniques 1 à 16

Les rapports sont représentés sous la forme $(n : xn)$, où le terme le plus grand est un multiple du plus petit. On appelle *superparticulaire* ou *épimorique* un rapport de la forme $(n : n + 1)$. En particulier, on parlera de proportion *hémioïque* ou de *sesquialterum* pour le rapport (2 : 3), et de proportion *épitríte* ou de *sesquitértium* pour le rapport (3 : 4). La figure 1 donne la liste des 16 premières harmoniques. Si on note f la fréquence du son fondamental, alors la fréquence de sa n^e harmonique est donnée par $f_n = n \cdot f$. Les hauteurs chromatiques correspondantes sont données à titre indicatifs : elles constituent une approximation plus ou moins précise des harmoniques naturelles, leur fréquence variant ainsi de quelques cents.

En tempérament égal, on partage l'octave en 12 demi-tons égaux de 100 cents : le ton est égal à 200 cents, la tierce majeure à 400 cents et la quarte juste à 500 cents. Les fréquences ainsi obtenues ne sont en réalité qu'une approximation des intervalles justes correspondant.

Les premiers pas dans l'utilisation de l'algèbre : combinatoire et musique. Au xx^e siècle, Marin Mersenne⁴, adhérent au Lullisme⁵, explore les possibilités combinatoires qui constituent pour lui un art universel. Marin Mersenne calcule notamment des nombres de permutations, déterminant (à la main!) la valeur de $64!$. On lui doit notamment son traité de l'*Harmonie universelle, contenant la théorie et la pratique de la musique*, publié à Paris vers 1636. La musique y est présentée sous le prisme de l'acoustique ou des mathématiques. D'un point de vue combinatoire, Mersenne dénombre par exemple le nombre de mélodies possibles à partir de 4 notes différentes, ou encore présente une « Table des Chants qui se peuvent faire de 9 notes », de « toutes différentes » à « toutes semblables ». En termes modernes, cela revient à examiner les coefficients multinomiaux

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_p} = \frac{n!}{n_1! \dots n_p!}$$

où n, n_1, \dots, n_p sont des entiers naturels tels que $n = n_1 + \dots + n_p$.

2. Andrew Barker, *Greek Musical Writings : I. The Musician and his Art*, Cambridge University Press, 1984, pp.248-49.

3. Pythagore (ca.580-495 av.J-C.), philosophe, logicien, mathématicien, et homme politique grec.

4. Marin Mersenne (1588-1648), religieux, mathématicien, philosophe et théoricien de la musique français.

5. ou « ars combinatoria », système de pensée développé par Raymond Lulle (1232-1315) philosophe et théologien, repose sur l'idée selon laquelle la vérité universelle peut être atteinte en combinant de manière exhaustive tous les concepts possibles.

Le jésuite Athanasius Kircher⁶ publie en 1650 dans *Musurgia universalis*. Le huitième livre *De Musurgia Mirifica, feu Artificio componendi quafuis nouo, ac facillimo componendi quafuis cantilenas*, est divisée en quatre parties : l'art musical combinatoire, l'art musical poétique ou rythmique, la pratique de nombres musicaux (*musarithmi melothetici*) et l'art musical mécanique ou la transposition variée de colonnes arithmético-musicales (*musarithmica*). La troisième partie consiste en une étude combinatoire des objets musicaux. Les principes de la musique y sont réduits en des tables méthodiques appelées nombres musicaux (*Musarithmi*) ou nombres harmoniques par Kircher. On doit à en outre à Kircher l'invention de l'*Organum Mathematicum* décrit par son élève Kaspar Schott dans *Organum Mathematicum libris IX explicatum*⁷, sorte de bureau contenant des tableaux et règles mobiles permettant d'effectuer divers sortes de calculs.

En 1666, Leibniz⁸ publie à Leipzig *De l'art combinatoire*⁹, ouvrage de jeunesse rédigé à partir de sa thèse de doctorat. Il y développe une pensée Lulliste, s'appuyant sur les travaux de Kircher. Leibniz examine notamment un problème identique à l'un de ceux étudiés par Mersenne dans son *Harmonie universelle*. Il adjoint une démonstration de ces problèmes combinatoires, étudiant par exemple le nombre d'arrangement à répétitions. Une généralisation de sa méthode serait la suivante. Soit $n = 1 \cdot r_1 + \dots + n \cdot r_n$ une partition d'un entier naturel n . Le nombre de combinaison de cette forme est exactement

$$\binom{n}{r_1} \binom{n-r_1}{r_2} \dots \binom{n-r_1-\dots-r_{n-1}}{r_n}.$$

Algorithmes numériques et tempéraments. La théorie des tempéraments musicaux est une illustration féconde de l'apport des mathématiques à la résolution d'un problème d'origine musical. La question originelle est la suivante : il est impossible d'accorder une échelle de 12 demi-tons chromatiques à partir des seules quintes justes, *i.e.* du rapport de fréquence (2 : 3). Cela revient à dire qu'il n'existe pas de solution à l'équation $2^n = \left(\frac{3}{2}\right)^k$ pour $(k, n) \in \mathbb{N}_{\geq 2}^* \times \mathbb{N}_{\geq 2}^*$. La quinte *Sol♯ – Mib* obtenue par un tel système d'accord est appelée *quinte du loup* : bien qu'elle soit juste d'un point de vue harmonique, elle sonne fausse d'un point de vue acoustique.

La solution moderne à cette impossibilité rationnelle est la suivante : étant donné l'octave de rapport 2, on cherche à constituer une échelle de douze demi-tons, intervalles également répartis en fréquence. Cela revient à trouver une solution positive à l'équation $x^{12} = 2$, qui n'est autre que le réel positif $x = \sqrt[12]{2} \simeq 1,059463094$. Cette solution demande en pratique une manipulation des nombres irrationnels, et cette impossibilité d'obtenir un tempérament égal en employant des méthodes arithmétiques a engendré de nombreuses difficultés théoriques. Dans *Le Istitutioni harmonicae*, Gioseffo Zarlino¹⁰ définit les rapports des « touches blanches » ainsi

1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
<i>do</i>	<i>re</i>	<i>mi</i>	<i>fa</i>	<i>sol</i>	<i>la</i>	<i>si</i>	<i>do</i>

Les cinq notes restantes (« touches noires ») sont choisies suivant des rapports simples, dans un but de symétrie. Un tel système d'accord n'est toutefois pas pleinement satisfaisant dans l'optique d'une transposition dans différentes tonalités. Des procédés géométriques et mécaniques sont alors mis en œuvre permettant d'obtenir des rapports irrationnels : dans *Le institutioni harmonicae* (Venise, 1558), Zarlino décrit le *Mesolabio*, instrument permettant de produire des racines carrées et des racines cubiques.

D'autres traités musicaux élaborent des systèmes plus ou moins sophistiqués réalisant des compromis différents dans la répartition de cette *quinte du loup* : des tempéraments comme ceux de Werckmeister ou Vallotti réalisent un choix d'intervalles purs dans un but d'exécution musicale la plus appropriée possible.

Giuseppe Tartini¹¹ décrit dans son traité *Trattato di Musica* (Padoue, 1754) une méthode géométrique de calcul approché de racines carrées. Les algorithmes y sont présentés de manière empirique, bien que les procédés employés soient en fait des avatars d'approximation diophantienne et de fractions continues.

Partant de la relation diophantienne $5 * 10 - 7 * 7 = 1$, Tartini considère par exemple le triplet (5, 7, 10), à partir duquel il construit les triplets (12, 17, 24), (29, 41, 58) d'après le procédé suivant : il calcule $5 + 7 = 12$ et $7 + 10 = 17$, puis cherche une nouvelle relation diophantienne $12 * 24 - 17 * 17 = 1$, *etc.* On remarque ainsi que $\frac{41}{29} \simeq 1,417$ constitue une approximation de $\sqrt{2} \simeq 1,4142$. Une seconde méthode proposée par Tartini est la suivante, partant toujours de $5 * 10 - 7 * 7 = 1$, il calcule $7 * 10 = 70$ et $49 + 50 = 99$ puis détermine une relation diophantienne $70 * 140 - 99 * 99 = -1$, *etc.* Il obtient par exemple le triplet (13860, 19604, 27520) pour lequel on a $\frac{19604}{13860} \simeq 1,41443$. Le formalisme algébrique n'était alors pas utilisé, mais nous voyons désormais l'analogie avec

6. Athanasius Kircher (1602-1680), prêtre jésuite allemand, théologien, physicien, géologue, mathématicien, biologiste, théoricien de la musique, ...

7. Wurtzbourg, 1668.

8. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), philosophe et scientifique allemand.

9. *Dissertation de arte combinatoria*, Gottfried Wilhelm Leibniz, 1666.

10. Gioseffo Zarlino (1517-1590), compositeur et théoricien de la musique italien.

11. Giuseppe Tartini (1692-1770), violoniste et compositeur italien.

l'équation de Pell-Fermat $y^2 - 2x^2 = \pm 1$. En termes modernes, on peut dire que Tartini examine les puissances d'un générateur du groupe cyclique $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$.

Il est également le premier à observer le phénomène de battement ou *troisième son*. Par exemple, un intervalle de $5/4$ (tierce pure), va émettre un son résultant de $5/4 - 1 = 1/4$. Ce procédé est notamment utilisé dans la facture d'orgue, par souci d'économie. Pour produire une résultante acoustique de tuyaux de 32 pieds (double octave grave) on construira plutôt une rangée de *grosse quinte* de hauteur $10 \frac{2}{3}'$, que l'on jouera simultanément avec un jeu de $16'$. Ce phénomène physique est particulièrement perceptible dans les *consort* de flûtes à bec.

C'est néanmoins au cours des XVII^e et XVIII^e siècles que le divorce (provisoire) entre mathématiques et musique est consommé : la tradition des traités « mathémusicaux » tels qu'ils ont pu être produits pendant la Renaissance est alors en net déclin.

Les « mathémusiques » aujourd'hui. Le regain d'intérêt des mathématiciens pour la chose musicale est relativement récent. Bien que les approches reposant sur la théorie du signal et des méthodes statistiques sont nombreuses, celles-ci considèrent la musique comme un objet physique : une onde sonore. Des initiatives nouvelles, dans la continuité des théoriciens de la musique du XX^e siècle, s'attachent à introduire une formalisation algébrique, géométrique ou encore catégorielle des objets et des processus musicaux.

Les sujets actuels de recherche ont pour point de départ des problématiques musicales, et font appel à des domaines variés des mathématiques : canons rythmiques et pavages, Z -relation, homométrie et cristallographie, théorie transformationnelle et catégories, analyse néo-Riemannienne, transformée de Fourier discrète, classification des accords et combinatoire¹² ...

Des journaux sont publiés et des sociétés se constituent depuis une vingtaine d'années : en 2007 sont mis en place la *Society for Mathematics and Computation in Music* et le *Journal of Mathematics and Music*. C'est en 2010 que le sujet *Mathematics and Music* est officiellement reconnu par l'*American Mathematical Society* comme un champ de recherche, obtenant le code **00A66** dans la classification des sujets mathématiques.

12. Pour un aperçu de quelques axes parmi les plus actifs en recherche « mathémusicale », on pourra consulter en particulier la page web du projet de recherche SMIR (Structural Music Information Research) <http://repmus.ircam.fr/moreno/smir>

Chapitre 1

Homologie persistante

L'analyse topologique de données est un ensemble de méthodes issues de la topologie algébrique, de la géométrie computationnelle. L'idée est d'utiliser des outils issus de la topologie et de la géométrie afin d'étudier des caractéristiques d'un ensemble de données. L'une de ces méthodes est l'homologie persistante : elle est à la fois bien maîtrisée d'un point de vue théorique, se calcule avec des outils d'algèbre linéaire, et se montre robuste face à de faibles perturbations des données. Les premiers algorithmes de calcul de l'homologie persistante sur le corps \mathbb{F}_2 ont été introduits dans [EDE02], puis dans [ZOM05] ces calculs ont été généralisés à des corps quelconques. Des implémentations effectives et des optimisations sont présentées par exemple dans [BAU14] et [MAR14]. Pour une vision globale de l'état de l'art actuel, on pourra consulter [OTT17]. Dans un premier temps, nous étudions l'homologie persistante d'un point de vue strictement mathématique. Nous présentons la théorie de manière pratique, puis nous nous intéressons à sa formalisation catégorielle.

1.1 Outils géométriques

Rappelons tout d'abord quelques éléments autour de la notion de complexe simplicial.

1.1.1 Triangulations et complexes simpliciaux

Définition 1.1.1 (Triangulation). Une triangulation d'un ensemble fermé $D \subset \mathbb{R}^2$ est une décomposition de D en triangles, telle que

- aucun triangle n'est dégénéré (*i.e.* n'est pas réduit à un point ou un segment),
- les intérieurs des triangles sont disjoints,
- l'intersection d'une paire de triangles est soit une arête commune, soit un sommet commun, ou bien est vide.

Si $S \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble fini, une triangulation de S est une triangulation de l'enveloppe convexe de S dont l'ensemble des sommets est S . On rappelle que

$$\text{Conv}(S) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \mid \forall i, x_i \in S, \alpha_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \right\}.$$

D'après le théorème de Carathéodory¹, on peut réécrire

$$\text{Conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i \mid \forall i, x_i \in S, \alpha_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1 \right\}.$$

La caractéristique d'Euler est un invariant topologique : quelque soit la triangulation de $\text{Conv}(S)$ d'un sous-ensemble fini $S \subset \mathbb{R}^2$, sa caractéristique est la même. Soit une triangulation quelconque de S , on note V son nombre de sommets, E le nombre d'arêtes, et F le nombre de triangles.

Définition 1.1.2 (Caractéristique d'Euler). La caractéristique d'Euler χ d'une triangulation est définie par

$$\chi = F - E + V.$$

On voit facilement que pour un sous-ensemble fini de \mathbb{R}^2 , une triangulation de son enveloppe convexe vaut toujours $\chi = 1$.

On généralise alors ces notions en dimension quelconque.

1. Dans un espace affine de dimension n , l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble S est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de familles de $n + 1$ points de S .

Définition 1.1.3. Soit $k \leq d \in \mathbb{N}$. Un k -simplexe géométrique σ de \mathbb{R}^d est l'enveloppe convexe d'une famille affinement libre $V = \{v_0, v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^d$, i.e. $\sigma = \text{Conv}(V)$.

On note alors $\dim(\sigma) := k$ la dimension de σ , ce qui sera parfois exprimé sous la forme $\sigma = \sigma^k$, les sommets de σ sont les points v_0, \dots, v_k , ses arêtes sont les enveloppes convexes d'une paire de sommets. Si τ est un simplexe τ généré par un sous-ensemble de sommets de σ est appelé face de σ . On dit que σ est une coface de τ . On dit que τ est une facette de σ lorsque $\dim(\tau) = \dim(\sigma) - 1$.

Définition 1.1.4 (Complexe simplicial). Soit $d \in \mathbb{N}$. Un complexe simplicial géométrique (fini) $K \subset \mathbb{R}^d$ est une collection (finie) de simplexes géométriques vérifiant

- si $\sigma \in K$ et τ est une face de σ , alors $\tau \in K$,
- si $\sigma, \tau \in K$, alors $\sigma \cap \tau$ est soit vide, soit une face commune de σ et τ .

On note $\dim(K) = \max_{\sigma \in K} \dim(\sigma)$. Un complexe simplicial de dimension 1 est un graphe. Le n -squelette de K noté $K^{(n)}$ est le sous-complexe de K dont les simplexes sont de dimensions au plus n . On définit le corps de K , noté $|K|$, comme étant l'union des simplexes de K .

Définition 1.1.5 (Triangulation). Soit $d \in \mathbb{N}$. Une triangulation d'un sous-espace $X \subset \mathbb{R}^d$ est un complexe simplicial K de \mathbb{R}^d , tel que $|K| \cong X$.

Dans un cadre tout à fait général, on peut définir de même un complexe simplicial abstrait.

Définition 1.1.6 (Complexe simplicial abstrait). Soit V un ensemble fini. Un complexe simplicial abstrait L sur V est une famille de sous-ensembles non vides de V , telle que : $\sigma \in L$ et $\tau \subset \sigma \Rightarrow \tau \in L$.

On définit de même la notion de dimension d'un simplexe, de face de coface et de facette.

Définition 1.1.7 (Caractéristique d'Euler). Soit K un complexe simplicial et n_i le nombre de i -simplexes de K . On définit la caractéristique d'Euler $\chi(K) \in \mathbb{Z}$ par

$$\chi(K) = n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + \dots$$

La caractéristique d'Euler d'un espace métrique est définie comme étant la caractéristique d'Euler d'une de ses triangulations.

Définition 1.1.8. Une application simpliciale $f : K \rightarrow L$ est une application $K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ telle que pour tout simplexe $\sigma = \{v_i\}_{1 \leq i \leq k} \in K$, l'image $f(\sigma) = \{f(v_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ est un simplexe de L .

1.1.2 Complexes de Vietoris-Rips et de Čech

Si le calcul de l'homologie de complexes simpliciaux finis se ramène à la résolution d'un problème d'algèbre linéaire, ce n'est pas le cas pour un espace arbitraire. On cherche en ce sens à calculer un complexe simplicial dont l'homologie est une bonne approximation de l'espace initial.

Définition 1.1.9. Soit X un espace métrique et $S \subset X$ un échantillon (i.e. un sous-ensemble fini). Soit $r \geq 0$, on appelle complexe de Čech de rayon (ou d'échelle) r et on note $\check{C}(S, r)$ le complexe simplicial abstrait défini par

- L'ensemble des sommets est S
- $\sigma \subset S$ est un simplexe lorsque $\bigcap_{s \in \sigma} B(s, r) \neq \emptyset$.

Remarque 1.1.1. La deuxième condition rend ces complexes difficiles à calculer, puisque l'on doit vérifier un nombre important d'intersections. Dans le pire cas, le complexe de Čech est de dimension $|S| - 1$.

On peut voir le complexe de Čech comme le nerf d'un recouvrement.

Définition 1.1.10. Soit $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_p\}$ une famille de sous-ensembles de X . Le nerf de \mathcal{U} est le complexe simplicial abstrait $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ défini par

- L'ensemble des sommets est $\{1, \dots, p\}$, identifié à l'ensemble \mathcal{U} .
- Un sous-ensemble $\sigma \subset \mathcal{U}$ est un simplexe lorsque $\bigcap_{s \in \sigma} U_s \neq \emptyset$.

Si on note $S_r := \bigcup_{s \in S} B(s, r)$, alors le complexe de Čech est le nerf du recouvrement $\{B(s, r) \mid s \in S\}$ de S_r , i.e. $\check{C}(S, r) = \mathcal{N}(\{B(s, r)\}_{s \in S})$.

Le théorème du nerf garantit que le complexe de Čech préserve l'homologie de S_r .

Théorème 1.1.1 (Théorème du nerf). Soit $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_p\}$ une famille de sous-ensembles convexes fermés de \mathbb{R}^n , alors $\bigcup_i U_i \simeq \mathcal{N}(\mathcal{U})$.

Démonstration. On donne une esquisse de preuve de ce théorème dans le cas où le nerf est de dimension 1, *i.e.* lorsque les intersections triples de \mathcal{U} sont vides. On définit $X = \bigcup_{1 \leq i \leq p} U_i$ et $Z \subset X \times \mathcal{N}(U)$ par

$$Z := \bigcup_{\sigma \in \mathcal{N}(U)} \left(\bigcap_{s \in \sigma} U_s \times \sigma \right).$$

On montre que $Z \simeq X$ et $Z \simeq \mathcal{N}(U)$. Tout d'abord remarquons que pour tout $x \in X$ la section $(\{x\} \times \mathcal{N}(U)) \cap Z$ est un simplexe du nerf engendré par les $s \in S$ pour lesquels $x \in U_s$. En contractant ces simplexes en un point simultanément pour tout $x \in X$, on obtient une déformation de Z à X , donc $Z \simeq X$. D'autre part pour tout $y \in \mathcal{N}(U)$, la section $(X \times \{y\}) \cap Z$ est contractile par hypothèse. En contractant d'abord les sections de cette forme pour tout y qui n'est pas un sommet, puis en contractant les sections pour tous les sommets, on obtient une déformation de Z à $\mathcal{N}(U)$. Pour le cas général on pourra consulter [BJO95]. \square

Le choix du paramètre r n'est pas évident a priori. Une situation classique est la suivante : on considère un échantillon de données S obtenus expérimentalement, et approchant un espace topologique (métrique) X . On souhaite retrouver les propriétés topologiques de X à partir de S . En ce sens, on espère qu'une petite perturbation sur les données S ne change pas l'analyse topologique. On considère le *grossissement* S_r de S puis le complexe de Čech associé. Le choix de r peut être dicté par des informations extraites des données S . L'homologie persistante détecte les propriétés topologiques qui *persistent* en faisant varier r . Les complexes de Čech nécessitant de calculer un grand nombre d'intersection, d'autres complexes peuvent être alors considérés

Définition 1.1.11. Soit X un espace métrique et $S \subset X$ un échantillon. Soit $r \geq 0$, on appelle complexe de Rips (ou encore de Vietoris-Rips) de rayon (ou d'échelle) r et on note $\text{VR}(S, r)$ le complexe simplicial abstrait défini par

- L'ensemble des sommets est S
- $\sigma \subset S$ est un simplexe lorsque $\text{Diam } \sigma \leq r$.

Si $r \leq r'$, on a l'inclusion $\text{VR}(S, r) \hookrightarrow \text{VR}(S, r')$. La collection des complexes de Rips obtenue en faisant varier le paramètre $r \geq 0$ fournit une filtration du $(|S| - 1)$ -simplexe obtenu à partir de S .

Nous montrons maintenant la garantie théorique du fait que cette filtration conserve les propriétés topologiques de l'échantillon S . Pour cela on montre que le complexe de Vietoris-Rips est une approximation du complexe de Čech.

Rappelons tout d'abord quelques propriétés de la boule minimale d'un ensemble de points.

Définition 1.1.12. Soit $\sigma \subset S$. La boule minimale (*miniball*) de σ est la plus petite boule fermée qui contient σ .

Remarque 1.1.2. Le rayon de la boule minimale est inférieure ou égal à r si et seulement si $\sigma \in \check{\text{Cech}}(S, r)$.

L'algorithme suivant permet de calculer la boule minimale d'un ensemble de points. Il prend en argument deux ensembles disjoints τ et ν de S et retourne la boule minimale pour laquelle les points de τ sont intérieurs et les points de ν sont sur sa frontière.

Algorithm 1 Calcul de la balle minimale ayant les points de τ intérieurs et les points de ν sur sa frontière.

```

1: procedure MINIBALL( $\tau, \nu$ )
2:   if  $\tau = \emptyset$  then
3:     calculer la balle minimale  $B$  de  $\tau$  directement
4:   else
5:     choisir un point  $u \in \tau$ 
6:      $B = \text{MINIBALL}(\tau - \{u\}, \nu)$ 
7:     if  $u \notin B$  then
8:        $B = \text{MINIBALL}(\tau - \{u\}, \nu \cup \{u\})$ 
9:   return  $B$ 

```

On note $t_j(n)$ le nombre d'appel de MINIBALL pour pour $|\tau| = n$ et $j = d + 1 - |\nu|$ positions possibles sur la frontière. On a $t_j(0) = 0$ et si $n > 0$, alors la probabilité que $u \notin B$ est d'au plus $\frac{j}{n}$. Il vient

$$t_j(n) \leq t_j(n-1) + 1 + \frac{j}{n} \cdot t_{j-1}(n-1).$$

Il vient $t_j(n) \leq (j+1)!n \leq (d+1)!n$ qui est en temps constant en n .

Pour obtenir la boule minimale de σ , il suffit d'appeler $\text{MINIBALL}(\sigma, \emptyset)$.

Proposition 1.1.1 (Lemme de Vietoris-Rips). *On suppose que X est un espace euclidien et $S \subset X$ un ensemble fini de points. On a les inclusions $\check{C}(S, r) \subset \text{VR}(S, r) \subset \check{C}(S, \sqrt{2}r)$*

Démonstration. La première inclusion est évidente. Pour montrer la deuxième, on remarque que le d -simplexe standard Δ^d a des arêtes de longueur $\sqrt{2}$. Par symétrie, la distance de l'origine à Δ^d est égale à la distance de l'origine au barycentre, *i.e.* au point z dont les $d+1$ coordonnées sont égales à $\frac{1}{\sqrt{d+1}}$. On obtient $\|x\| = \frac{1}{\sqrt{d+1}}$. Le barycentre est également le centre de la plus petite d -sphère passant par tous les sommets de Δ^d . Notons r_d son rayon, on a $r_d^2 = 1 - \|z\|^2 = \frac{d}{d+1} \in [1/2; 1]$. Lorsque la dimension d tend vers l'infini, le rayon tend vers 1 en croissant. Tout ensemble de $d+1$ points pour lesquels la même boule de dimension d et de rayon r_d est la boule minimale a une paire a distance au moins $\sqrt{2}$. Par suite, tout simplexe de diamètre inférieur ou égal à $\sqrt{2}$ appartient à $\check{C}(S, r_d)$. En multipliant par $\sqrt{2}r$ on obtient l'inclusion $\text{VR}(S, r) \subset \check{C}(S, \sqrt{2}rr_d)$, qui est un sous-complexe de $\check{C}(S, \sqrt{2}r)$, puisque $r_d \leq 1$ pour tout d . □

Définition 1.1.13. Soit $\varepsilon > 0$, on considère deux filtrations $(A_r)_{r \geq 0}$ et $(B_r)_{r \geq 0}$. On dit qu'elles sont ε -entrelacées s'il existe des applications $\varphi_r : A_r \rightarrow B_{r+\varepsilon}$ et $\psi_r : B_r \rightarrow A_{r+\varepsilon}$ telles que $\varphi_{r+\varepsilon} \circ \psi_r : B_r \rightarrow B_{r+2\varepsilon}$ et $\psi_{r+\varepsilon} \circ \varphi_r : A_r \rightarrow A_{r+2\varepsilon}$ sont égales aux inclusions correspondantes.

Définition 1.1.14. Etant donné deux filtrations A et B , leur distance d'entrelacement est définie par

$$\delta(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \text{ et } B \text{ sont } \varepsilon\text{-entrelacés}\}.$$

L'entrelacement est une notion importante dans le cadre de la stabilité de l'homologie persistante.

Théorème 1.1.2 (Stabilité). *Soit $\varepsilon > 0$. On suppose que $X = (x_i)_{1 \leq i \leq k}$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont tels que $d(x_i, y_i) < \varepsilon$ pour tout $1 \leq i \leq k$, alors*

- $\text{VR}(X, \cdot)$ et $\text{VR}(Y, \cdot)$ sont 2ε -entrelacées
- $\check{C}(X, \cdot)$ et $\check{C}(Y, \cdot)$ sont ε -entrelacées

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si $d(x_1, x_2) \leq r$ et $d(x_i, y_i) \leq \varepsilon$, alors $d(y_1, y_2) \leq r + 2\varepsilon$. Si $\sigma \subset X$ est de diamètre r , alors le sous-ensemble $\tau \subset Y$ correspondant (*i.e.* formé par les points de Y dont les indices sont les mêmes que les points de σ) est de diamètre au plus $r + 2\varepsilon$. Par suite, si $\sigma \in \text{VR}(X, r)$, alors $\tau \in \text{VR}(Y, r + 2\varepsilon)$. On déduit que les applications $x_i \in \text{VR}(X, r) \rightarrow y_i \in \text{VR}(Y, r + 2\varepsilon)$ et $y_i \in \text{VR}(Y, r) \rightarrow x_i \in \text{VR}(X, r + 2\varepsilon)$ sont simpliciales et commutent avec les inclusions, donc les filtrations de Vietoris-Rips de X et Y sont ε -entrelacées. □

On exprime alors ainsi la relation entre les filtrations de Rips et de Čech.

Proposition 1.1.2. *Les filtrations de Rips et de Čech sont $(\log 2)$ -entrelacées, *i.e.* $\{\text{VR}(S, e^r)\}_{r \geq 0}$ et $\{\check{C}(S, e^r)\}_{r \geq 0}$ sont $(\log 2)$ -entrelacées.*

Démonstration. Cela résulte des inclusions $\check{C}(S, e^r) \subset \text{VR}(S, 2e^r) = \text{VR}(S, e^{\log 2 + r})$ et $\text{VR}(S, e^r) \subset \check{C}(S, e^r) \subset \check{C}(S, e^{\log 2 + r})$. □

Une faible perturbation des données ne devrait ainsi pas beaucoup changer la filtration en terme de distance d'entrelacement. Nous verrons par la suite une formalisation de la notion d'entrelacement avec le vocabulaire de la théorie des catégories.

Construction du complexe de Vietoris-Rips.

On construit ce complexe en deux étapes. Tout d'abord on calcule le r -voisinage de S , à savoir le graphe dont les sommets sont les points de S et les arêtes sont $\{(i, j) \in S \times S \mid d(i, j) < 2r\}$. Ensuite, on calcule le *complexe de clique* de ce graphe. Le complexe de clique d'un graphe est le complexe simplicial défini ainsi : un sous-ensemble $\{s_1, \dots, s_p\}$ est un p -simplexe lorsque chaque paire de sommets est connecté par une arête du graphe. On appelle *clique* une telle collection. On se ramène donc à des tests sur des paires de distances. La complexité dans le pire cas est cependant la même que pour le complexe de Čech, à savoir $2^{|S|} - 1$ simplexes et une dimension $|S| - 1$.

1.2 Rappels sur l'homologie

L'homologie compte le nombre de trous de dimension donnée dans un complexe simplicial.

1.2.1 Définition et exemples

K désigne un complexe simplicial abstrait de dimension n et \mathbb{F} un corps². Une chaîne est une somme formelle de simplexes à coefficients dans \mathbb{F} .

Définition 1.2.1 (Chaîne). Pour $p \in \{0, \dots, n\}$ on note n_p le nombre de simplexes de dimension p dans K .

Une p -chaîne est une somme formelle $\sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \sigma_i^p$ avec $\lambda_i \in \mathbb{F}$ et σ_i^p un simplexe orienté de dimension p dans K .

On définit de manière évidente la somme et la multiplication scalaire des chaînes. On note $C_p(K, \mathbb{F})$ ³ l'espace vectoriel formés par les p -chaînes. Il est clair que $C_p(K, \mathbb{F}) \simeq \mathbb{F}^{n_p}$.

Définition 1.2.2 (Frontière). Soit $p \in \mathbb{N}$ l'application frontière $\partial_p : C_p(K, \mathbb{F}) \rightarrow C_{p-1}(K, \mathbb{F})$ est l'application linéaire définie par $\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p \rangle$ pour tout p -simplexe (orienté) $\sigma = \langle v_0, \dots, v_p \rangle$.

Proposition 1.2.1. $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$ En particulier $\text{Im}(\partial) \subset \ker(\partial)$.

Démonstration. On vérifie que pour tout p -simplexe $\sigma = \langle v_0, \dots, v_p \rangle$, on a $\partial^2 \sigma = 0$. Les termes de la somme formelle $\partial^2 \sigma$ sont de la forme

$$\sigma_{i,j} = \langle v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_p \rangle.$$

On compte le nombre d'occurrence de $\sigma_{i,j}$ pour $i < j$.

1. D'une part ce terme s'obtient en enlevant d'abord le sommet v_j (i.e. $\partial_p \sigma = \langle v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_p \rangle$) puis le sommet v_i . Ce terme apparaît avec un coefficient $(-1)^j (-1)^i$.
2. D'une part ce terme s'obtient en enlevant d'abord le sommet v_i puis le sommet v_j (qui est alors en position $j-1$). Ce terme apparaît avec un coefficient $(-1)^j (-1)^{j-1}$.

En sommant, on obtient $\partial^2 \sigma = 0$. □

On définit ainsi un complexe de chaîne

$$\dots \xrightarrow{\partial} C_p(K, \mathbb{F}) \xrightarrow{\partial} C_{p-1}(K, \mathbb{F}) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_1(K, \mathbb{F}) \xrightarrow{\partial} C_0(K, \mathbb{F}) \xrightarrow{\partial} 0$$

1.2.2 Aspects computationnels

On adopte une représentation matricielle de l'application frontière. Pour $p \in \mathbb{N}$ on représente ∂_p par la matrice M_p à coefficients dans \mathbb{F} est définie ainsi :

1. Les colonnes correspondent aux p -simplexes de K .
2. les lignes correspondent aux $(p-1)$ -simplexes de K .
3. le coefficient (i, j) vaut ± 1 si la i -ème ligne apparaît avec une orientation ± 1 dans la frontière de la j -ième colonne. Les autres coefficients sont nuls.

Exemple 1.2.1. Soit le triangle orienté $T = \langle x, y, z \rangle$. Sa frontière est $\partial T = \langle y, z \rangle + \langle z, x \rangle + \langle x, y \rangle$ de sorte que $\partial^2(T) = \langle y \rangle - \langle z \rangle + \langle z \rangle - \langle x \rangle + \langle x \rangle - \langle y \rangle = 0$.

Définition 1.2.3. Soit K un complexe simplicial et $p \in \mathbb{N}$. On définit

- $Z_p(K, \mathbb{F}) := \ker \partial_p$ le groupe des p -cycles. C'est un sous groupe de $C_p(K, \mathbb{F})$ appelé groupe des p -cycles.
- $B_p(K, \mathbb{F}) := \text{Im } \partial_{p+1}$. C'est un sous groupe de $Z_p(K, \mathbb{F})$ appelé groupe des p -frontières.
- Le quotient $H_p(K, \mathbb{F}) := Z_p(K, \mathbb{F})/B_p(K, \mathbb{F})$ est appelé p -ième groupe d'homologie.
- La dimension de $H_p(K, \mathbb{F})$ est notée $\beta_p := \beta_p(K, \mathbb{F})$ et est appelée p -ième nombre de Betti.

Interprétation Pour $p \in \mathbb{N}$, le p -ième nombre de Betti correspond au nombre de trous de dimension p dans K . On peut montrer que le nombre β_0 ne dépend pas de \mathbb{F} et est égal au nombre de composantes connexes de K .

Théorème 1.2.1. Soient K, K' deux complexes simpliciaux. Si K et K' sont homotopiquement équivalents, alors leur groupe d'homologie sont isomorphes : $H_p(K, \mathbb{F}) \simeq H_p(K', \mathbb{F})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout corps \mathbb{F} .

2. En pratique on considérera $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ le corps à 2 éléments.

3. Appelé « chain group », cet espace héritant d'une structure de groupe si l'on suppose seulement que F est un groupe.

1.2.3 Functorialité

Dans cette section on considère $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$. Soit $f : K \rightarrow K'$ une application entre complexes simpliciaux. Elle induit une application \mathbb{F}_2 -linéaire $\tilde{f}_p : C_p(K, \mathbb{F}_2) \rightarrow C_p(K', \mathbb{F}_2)$ définie par

$$\sum_{\sigma \in K_p} c_\sigma \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in K_p \text{ tel que } f(\sigma) \in K'_p} c_\sigma f(\sigma)$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$, où l'on a noté K_p (resp. K'_p) l'ensemble des p -simplexes de K .

Si l'on note également $d'_p : C_n(K', \mathbb{F}_2) \rightarrow C_{p-1}(K', \mathbb{F}_2)$, on a $\tilde{f}_p \circ d_{p+1} = d'_p \circ \tilde{f}_{p+1}$. L'application \tilde{f} induit alors une application linéaire en homologie $f_p : H_p(K) \rightarrow H_p(K')$ définie par $f_p([c]) \mapsto [\tilde{f}_p(c)]$. Par ailleurs, si on se donne $f : K \rightarrow K'$ et $g : K' \rightarrow K''$, on a l'égalité remarquable $(g \circ f)_p = g_p \circ f_p$. On parle alors de functorialité : l'application entre complexes simpliciaux induit une application en homologie compatible avec la composition.

Remarque 1.2.1. Si $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$ il faut être vigilant dans la définition des applications frontières afin de s'assurer que la composition $d_{p+1} \circ d_p$ est nulle. Les nombres de Betti sont également dépendants du choix du corps de base. En pratique on utilisera $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$.

Exemple 1.2.2 (Bouteille de Klein). On note K la bouteille de Klein. Si p est premier alors $\beta_0(K) = 1$. En revanche $\beta_1(K) = 2$ et $\beta_2(K) = 1$ si $p = 2$ mais $\beta_1(K) = 1$ et $\beta_2(K) = 0$ (cela résulte de la non orientabilité de la bouteille de Klein) pour $p \neq 2$ premier.

1.2.4 Collapse simplicial élémentaire

Soit K un complexe simplicial abstrait. On peut le modifier en ajoutant ou en enlevant une paire de simplexes (σ, τ) où τ est une face de σ de codimension 1 et σ est l'unique simplexe ayant τ pour face. Le complexe résultant conserve l'homologie du complexe initial, en particulier les nombres de Betti (*cf infra*) sont inchangés. On parle de collapse⁴ simplicial élémentaire.

1.2.5 Homologie en dimension zéro

Lemme 1.2.1. Soit K un complexe simplicial, \mathbb{F} un corps et $x, y \in K^{(0)}$ des sommets. On a l'équivalence $\langle y \rangle - \langle x \rangle \in \text{Im } \partial_1$ si et seulement si x et y appartiennent à la même composante de K .

Démonstration. Supposons que x et y appartiennent à la même composante de K . D'après le théorème d'approximation simpliciale, il existe un chemin $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$ dans K . On a alors $\langle y \rangle - \langle x \rangle = \partial_1 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \langle x_i, x_{i+1} \rangle \right) \in \text{Im } \partial_1$. Réciproquement supposons que $\langle y \rangle - \langle x \rangle = \partial_1(\sigma)$ pour une certaine 1-chaîne σ . Soit K' la composante de K contenant x , et σ' la partie de σ contenue dans K' . On voit que $\partial\sigma'$ ne contient pas de sommets autres que x ou y (puisque c'est le cas pour $\partial\sigma$) puis que $\partial\sigma' = \langle y \rangle - \langle x \rangle$ ou $-\langle x \rangle$ si $y \notin K'$. Mais ce dernier cas est impossible puisque les coefficients de $\partial\sigma'$ sont de somme nulle. \square

Proposition 1.2.2. Soit K un complexe simplicial. β_0 est le nombre de composantes connexes de K .

Démonstration. On a $H_0(K, \mathbb{F}) = \ker \partial_0 / \text{Im } \partial_1 = C_0(K, \mathbb{F}) / \text{Im } \partial_1$. Pour toute arête $\langle x, y \rangle \in K$, $\langle x \rangle$ et $\langle y \rangle$ sont identifiés dans le groupe d'homologie, *i.e.* $[\langle x \rangle] = [\langle y \rangle]$. D'après le lemme précédent, deux sommets sont dans la même classe d'équivalence si et seulement si ils appartiennent à la même composante de K . Soient alors K_1, \dots, K_b les composantes connexes de K . On choisit $x_i \in K_i$ pour tout $i = 1, \dots, b$. La famille $\{[\langle x_i \rangle]\}_{1 \leq i \leq b}$ est alors une base du \mathbb{F} -espace vectoriel $H_0(K, \mathbb{F})$, et $\beta_0 = b$. \square

1.2.6 Homologie d'un graphe

Soit K un complexe simplicial. On suppose que K est un graphe planaire⁵ connexe.

Théorème 1.2.2. Le premier nombre de Betti β_1 compte le nombre de trous de K dans le plan.

4. littéralement effondrement

5. Un graphe planaire est un graphe pouvant se représenter dans un plan sans qu'aucune arête n'en intersecte une autre. En 1930, Kuratowski a caractérisé ainsi les graphes planaires : G graphe fini est planaire $\iff G$ ne contient pas de sous-graphe partiel qui est une expansion de K_5 (graphe complet à 5 sommets) ou de $K_{3,3}$ (graphe complet biparti à 3 + 3 sommets).

Démonstration. Par hypothèse on a $C_2(K, \mathbb{F}) = 0$, donc $H_1(K, \mathbb{F}) = \ker \partial_1$. On considère K' un arbre maximal de K dont on note e_1, \dots, e_n les arêtes. On montre que la famille $\{\partial e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est libre. D'après le théorème 1.2.1, on a $H_1(K', \mathbb{F}) = \{0\}$ puisque K' est homotopiquement équivalent à un point. De plus K' ne contient pas de triangles, donc $C_2(K', \mathbb{F}) = \{0\}$ et $H_1(K', \mathbb{F}) = \ker \partial_1|_{C_1(K', \mathbb{F})}$, donc la restriction de ∂_1 à $C_1(K', \mathbb{F})$ est injective. La matrice de cette application linéaire contient les colonnes ∂e_i ($1 \leq i \leq n$) d'où la liberté de la famille. Soit alors $W = \text{Vect}(\partial e_i)_{1 \leq i \leq n}$, et notons e_{n+1}, \dots, e_m les arêtes de K qui ne sont pas dans K' . On écrit $e_i = \langle x_i, y_i \rangle$. Par récurrence, le nombre de trous de K est exactement $n - m$, tandis que la dimension de $\ker \partial_1 = n - m$. \square

On note n_p le nombre de simplexes de dimension p dans K .

Proposition 1.2.3 (Calcul de l'homologie). $\dim \ker \partial_p = n_p - \text{rg } \partial_p$
 $b_p = n_p - \text{rg } \partial_p - \text{rg } \partial_{p+1}$

Démonstration. Cela résulte de l'égalité $n_p = \dim C_p(K, \mathbb{F})$. \square

Le rang de ∂_p se calcule aisément en mettant par exemple la matrice de ∂_p sous forme échelonnée et en comptant le nombre de pivots non nuls. On peut aussi utiliser la forme normale de Smith.

Proposition 1.2.4 (Lien avec la caractéristique d'Euler). *Soit K un complexe simplicial, n_p le nombre de p -simplexes de K et $\chi(K) := n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + \dots$ la caractéristique d'Euler de K . On a la formule*

$$\chi(K) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \dots$$

Démonstration. On a $b_p = n_p - \text{rg } \partial_p - \text{rg } \partial_{p+1}$, d'où le résultat. \square

Exemple 1.2.3. Soit K un graphe planaire et \mathbb{F} un corps, alors $\chi(K)$ est égal au nombre de composantes connexes moins le nombre de trous de K .

1.3 Homologie persistante

Dans cette section, on définit l'homologie persistante d'un complexe simplicial filtré ainsi que les code-barres associés. Les résultats sont énoncés dans un premier temps sans démonstration. On trouvera la plupart des preuves dans la section 1.4 qui formalise et généralise ces notions avec le langage de la théorie des catégories.

1.3.1 Définition et premières propriétés

On considère un complexe simplicial filtré

$$K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^n = K$$

auquel on associe pour tout $i = 0, \dots, n$ le k -module $C_n^i := C_n(K^i)$ muni de l'opérateur bord $\partial_n^i : C_n^i \rightarrow C_{n-1}^i$. On pose $Z_n^i(K) = \ker \partial_n^i$, $B_n^i(K) := \text{Im } \partial_{n+1}^i$ et $H_n^i(K) := Z_n^i(K)/B_n^i(K)$.

Définition 1.3.1. Le groupe quotient $H_n^{i,j}(K) := Z_n^i(K)/B_n^j(K) \cap Z_n^i(K)$ est appelé $j^{\text{ième}}$ groupe d'homologie persistante de degré n associé à K^i . On appelle $j^{\text{ième}}$ nombre de Betti persistant de degré n associé à K^i sa dimension

$$\beta_n^{i,j}(K) := \dim H_n^{i,j}(K)$$

Remarque 1.3.1. 1. On a $H_n^{i,j} \subset H_n^j$ et $H_n^{i,i} = H_n^i$

2. Si on considère les inclusions naturelles $\eta_n^{i,j} : K^i \rightarrow K^j$, elles induisent des applications entre les groupes d'homologie $\eta_n^{i,j} : H_n^i \rightarrow H_n^j$. On a alors $H_n^{i,j} = \text{Im } \eta_n^{i,j}$.

Interprétation Une n -classe $[z]$ existe au temps i de filtration si c'est un n -cycle qui n'est pas un bord, en particulier $[z] \in Z_n^i$. Cette classe disparaît au temps j si elle devient un bord, *i.e.* si $[z] \in B_n^j \cap Z_n^i$. Dans ce cas on dit que $[z]$ est né au temps i et on appelle créateur de $[z]$ le simplexe σ apparaissant au temps i à l'origine de $[z]$. On dit que $[z]$ meurt au temps j et on appelle destructeur de $[z]$ le simplexe τ apparaissant au temps j pour lequel $[z]$ devient un bord. On note $p[z] = j - i - 1$ la persistance de $[z]$. Si $[z]$ n'admet pas de destructeur, on dit par convention que la persistance est infinie, et on note $p[z] = \infty$. Formellement, nous disons que

- l'homologie *apparaissant* ou *naissant* au temps i est définie comme le quotient $H_n^i / \text{Im } \eta_n^{i-1,i}$. Ce quotient est de dimension $\beta_n^i - \beta_n^{i-1,i}$;
- l'homologie *disparaissant* ou *mourant* au temps j est définie comme le noyau $\ker \eta_n^{j-1,j}$.
Comme $H_n^j / \ker \eta_n^{j-1,j} \simeq \text{Im } \eta_n^{j-1,j}$, ce noyau est de dimension $\beta_n^{j-1} - \beta_n^{j-1,j}$;

- La quantité $\beta_n^{i,j} - \beta_n^{i-1,j}$ ($= \dim(\text{Im } \eta_n^{i,j} / \text{Im } \eta_n^{i-1,j})$) représente la dimension de l'homologie naissant en i et toujours vivante en j .
- La quantité $n_{i,j} := \beta_n^{i,j-1} - \beta_n^{i-1,j-1} - (\beta_n^{i,j} - \beta_n^{i-1,j})$ représente la dimension de l'homologie naissant en i et mourant en j .
- La quantité $n_{i,\infty} := \beta_n^{i,n} - \beta_n^{i-1,n}$ représente la dimension de l'homologie naissant en i et ne mourant jamais (*i.e.* toujours en vie à la fin de la filtration)

On en déduit l'égalité suivante

Lemme 1.3.1 (Lemme fondamental de l'homologie persistante).

$$\beta_n^{i,j} = \sum_{i' \leq i, j' > j} n_{i',j'}$$

Définition 1.3.2. Un complexe persistant \mathcal{C} est une famille de complexes de chaîne $(C_*^i)_{i \geq 0}$ où les $(f^i)_{i \geq 0}$ sont des applications $C_*^i \rightarrow C_*^{i+1}$. On dit que \mathcal{C} est de type fini si chaque complexe est un k -espace vectoriel de dimension finie et si les f^i sont des isomorphismes à partir d'un certain rang.

Exemple 1.3.1. Le complexe associé à un complexe simplicial filtré est persistant.

Définition 1.3.3. Un module persistant $\mathcal{M} = (M^i, \varphi^i)_{i \geq 0}$, est la donnée d'une famille de A -modules M^i et d'applications $\varphi^i : M^i \rightarrow M^{i+1}$. On dit qu'il est de type fini si M^i est de type fini pour tout i et si les φ^i sont des isomorphismes à partir d'un certain rang.

Soit \mathcal{M} un module persistant sur un corps k . On lui associe un $k[t]$ -module gradué $\alpha(\mathcal{M}) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} M^i$. La structure de $k[t]$ -module étant définie par

$$t \cdot (m^i)_{i \geq 0} := (0, \varphi^0(m^0), \varphi^1(m^1), \dots).$$

Théorème 1.3.1. Le foncteur α définit une équivalence de catégories entre la catégorie des k -modules persistants de type fini et la catégorie des $k[t]$ -modules gradués de type fini.

Le théorème suivant est l'analogie « gradué » du théorème de structure des modules de types finis sur un anneau principal.

Théorème 1.3.2 (Théorème de structure des modules gradués sur un anneau principal). Soit M un module gradué sur un anneau principal R , alors M se décompose de façon unique

$$M \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{a_i} R \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^m \Sigma^{b_j} R / c_j R \right)$$

où Σ désigne le décalage de gradation, $a_j, b_j \in \mathbb{Z}$ et c_j sont des éléments homogènes de R tels que $c_j \mid c_{j+1}$.

On en déduit le théorème suivant

Théorème 1.3.3 (Description de l'homologie persistante). Soit un complexe persistant $\mathcal{C} = (C^i, f^i)_{i \geq 0}$. On a l'isomorphisme suivant

$$\alpha(H_*(\mathcal{C})) = \bigoplus_j H_*(C_*^j) \simeq \left(\bigoplus_j t^{a_j} \cdot k[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_l t^{b_l} \cdot \frac{k[t]}{(t^{c_l})} \right).$$

Interprétation La partie libre correspond aux générateurs d'homologie qui apparaissent au temps de filtration a_j et qui ne disparaissent jamais, tandis que la partie de torsion correspond aux générateurs qui apparaissent au temps b_l et disparaissent au temps $b_l + c_l$.

Définition 1.3.4. Un \mathcal{P} -intervalle est une paire ordonnée (i, j) telle que $0 \leq i < j$ avec $j \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

On pose $Q(i, j) = \begin{cases} t^i \cdot k[t] / (t^{j-i}) & \text{si } j \in \mathbb{Z} \\ t^i \cdot k[t] & \text{si } j = +\infty. \end{cases}$

Pour un ensemble $S = \{(i_k, j_k)\}_k$ de \mathcal{P} -intervalles, on pose $Q(S) = \bigoplus_{k=1}^n Q(i_k, j_k)$.

Théorème 1.3.4. L'application Q définit une bijection entre les ensembles finis de \mathcal{P} -intervalles et les $k[t]$ -modules gradués de type fini.

1.3.2 Visualisations

Plusieurs représentations permettent de visualiser les \mathcal{P} -intervalles. Nous en présentons trois : les plans indice-persistence, les code-barres et les diagrammes de persistence. En pratique, nous ne travaillerons qu'avec ces deux derniers, sur lesquels nous définirons plusieurs distances.

Plan indice-persistence

Le théorème 1.3.3 nous donne une $k[t]$ -base compatible avec la filtration du complexe K . La bijection 1.3.4 associe à chaque élément de cette base un \mathcal{P} -intervalle. On représente ces données sous la forme d'un plan indice-persistence construit ainsi :

1. à un n -simplexe σ on associe un \mathcal{P} -intervalle (i, j) (qu'on appellera n -intervalle) où σ est naît au temps i de filtration et meurt au temps j .
2. on trace le triangle de sommets $(i, 0), (j, 0), (i, j - i)$ et on note \mathcal{T}_n l'ensemble des triangles ainsi construits

Lemme 1.3.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l et p des entiers. Alors le nombre de Betti $\beta_n^{l,p} := \dim H_n^{l,p}$ est égal au nombre de triangles de \mathcal{T}_n qui contiennent le point (l, p) .*

Pour calculer l'homologie persistante sur un corps, on cherchera donc à déterminer les \mathcal{P} -intervalles pour une dimension donnée.

Code-barres

Une autre visualisation possible des données du théorème 1.3.3 est donnée par un diagramme appelé code barre.

Définition 1.3.5. Soit K un complexe simplicial filtré. Le code barre de $H_*(K)$ noté $CB_*(K)$ est le graphique ayant pour abscisse le temps de filtration et pour ordonnée les classes d'homologie⁶ dans lequel

1. une classe qui naît au temps a_j et qui ne meurt jamais est représenté par une demi-droite $[a_j; +\infty)$ d'ordonnée sa classe
2. une classe qui naît au temps b_j et meurt au temps $b_l + c_l$ est représentée par un segment $[b_l, b_l + c_l]$.

Les codes barres permettent de visualiser rapidement quelles sont les classes avec un temps de vie important : ce sont les barres les plus longues qui sont significatives en homologie persistante.

On donne la version « code barre » du lemme 1.3.2

Lemme 1.3.3. *Soit K un complexe simplicial filtré. Le nombre de Betti $\beta_n^{i,j}(K)$ est égal au nombre d'intervalles du code barre de $H_n(K)$ qui recouvrent l'intervalle $[i, j]$.*

1.3.3 Interprétation

On considère un nuage de points d'un espace euclidien E^n muni de la distance usuelle. On peut lui associer un complexe simplicial de Vietoris-Rips puis un complexe simplicial filtré K . On calcule le code barre $CB_*(K)$ et l'on souhaite comparer les codes barres de différents complexes simpliciaux filtrés. On définit la distance suivante sur l'ensemble des codes barres.

Diagrammes de persistance

La dernière représentation graphique usuelle prend la forme d'un diagramme. On utilisera notamment le formalisme des diagrammes de persistance pour montrer un résultat de stabilité.

Définition 1.3.6 (Point critique en homologie). Soit X un espace topologique et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $a \in \mathbb{R}$ est une valeur critique en homologie de f s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que pour ε assez petit, l'application $H_k(f^{-1}(] - \infty, a - \varepsilon])) \rightarrow H_k(f^{-1}(] - \infty, a + \varepsilon]))$ induite par l'inclusion n'est pas un isomorphisme.

Définition 1.3.7 (Tame functions). On dit qu'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est modérée (*tame function*) lorsqu'elle admet un nombre fini de valeur critiques en homologie et que les groupes d'homologie $H_k(f^{-1}(] - \infty, a]))$ sont de dimension finie pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $a \in \mathbb{R}$.

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. On fixe un entier $k \in \mathbb{Z}$, et on écrit $F_x := H_k(f^{-1}(] - \infty, x]))$. Pour $x < y$, on note $f_x^y : F_x \rightarrow F_y$ l'application induite par les inclusions des ensembles de sous niveaux de x dans ceux de y .

Lemme 1.3.4 (Valeurs critiques). *Soit $[x, y]$ un segment ne contenant pas de valeur critique de f , alors f_x^y est un isomorphisme pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Soit $m = \frac{x+y}{2}$, on a $f_x^y = f_m^y \circ f_x^m$. Si f_x^y n'est pas un isomorphisme, alors f_x^m ou f_m^y n'est pas un isomorphisme. Par récurrence, on obtient une suite décroissante d'intervalles dont l'intersection est une valeur critique en homologie, contenue dans $[x, y]$. \square

6. L'ordre étant arbitraire

On note $F_x^y = \text{Im} f_x^y$ l'image de F_x dans F_y . Par convention, on pose $F_x^y = \{0\}$ lorsque x ou y est infini. On considère les nombres de Betti persistants $\beta_x^y = \dim F_x^y$. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ modérée, on note a_1, \dots, a_n ses valeurs critiques en homologie, et b_0, \dots, b_n une suite intercalée, *i.e.* $b_{i-1} < a_i < b_i$ pour tout i . On pose $b_{-1} = a_0 = -\infty$ et $b_{n+1} = a_{n+1} = +\infty$.

Définition 1.3.8. La multiplicité de la paire (a_i, a_j) est définie par

$$\mu_i^j = \beta_{b_{i-1}}^{b_j} - \beta_{b_i}^{b_j} + \beta_{b_i}^{b_{j-1}} - \beta_{b_{i-1}}^{b_{j-1}}.$$

Remarque 1.3.2. Si $x, x' \in]a_i, a_{i+1}[$ et $y, y' \in]a_{j+1}, a_j[$ alors $\beta_x^y = \beta_{x'}^{y'}$. Le lemme des valeurs critiques implique en effet que F_x^y et $F_{x'}^{y'}$ sont isomorphes.

On définit alors le diagramme de persistance associé à $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.3.9 (Diagramme de persistance). Le diagramme de persistance $D(f) \subset \mathbb{R}^2$ de f est défini comme la réunion de l'ensemble des points (a_i, a_j) comptés avec leur multiplicité μ_i^j pour tout $0 \leq i < j \leq n+1$ avec les points de la diagonale $\Delta = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, comptés avec une multiplicité infinie.

Définition 1.3.10 (Multiplicité). On note $\#A$ la multiplicité totale d'un multiensemble A . On a en particulier,

$$\#(D(f) \setminus \Delta) = \sum_{i < j} \mu_i^j.$$

Cette quantité est appelée la *taille* du diagramme de persistance.

On note $Q_x^y := [-\infty, x] \times [y, +\infty]$ les quadrants supérieur gauche fermé.

Lemme 1.3.5 (*k*-triangle). Soit f une fonction modérée et soient $x < y$ non égaux à des valeurs critiques de f . La multiplicité totale du diagramme de persistance dans le quadrant supérieur gauche est égale à $\#(D(f) \cap Q_x^y) = \beta_x^y$.

Démonstration. On peut supposer sans perdre de généralité que $x = b_i$ et $y = b_{j-1}$. La multiplicité du quadrant supérieur gauche est égale à

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{k \leq i \leq j \leq l} \mu_k^l \\ &= \sum_{k \leq i \leq j \leq l} (\beta_{b_{k-1}}^{b_l} - \beta_{b_k}^{b_l} + \beta_{b_k}^{b_{l-1}} - \beta_{b_{k-1}}^{b_{l-1}}) \\ &= (\beta_{b_{-1}}^{b_{n+1}} - \beta_{b_i}^{b_{n+1}} + \beta_{b_i}^{b_{j-1}} - \beta_{b_{-1}}^{b_{j-1}}). \end{aligned}$$

Seul le troisième terme est non nul, il est égal à β_x^y . □

1.3.4 Aspects computationnels

Réduction de la matrice frontière et calcul des code-barres

Dans cette section on présente un algorithme classique de réduction de la matrice frontière afin d'obtenir un code-barre.

Algorithm 2 Algorithme standard de réduction de la matrice frontière en code-barre.

- 1: **for** $j = 1$ to n **do**
 - 2: **while** il existe $i < j$ tel que $\text{low}(i) = \text{low}(j)$ **do**
 - 3: Ajouter la colonne i à la colonne j
-

En notant δ la matrice frontière carrée $n \times n$ où n est le nombre de simplexes du complexe K et $\{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq n}$ désigne l'ensemble des simplexes numérotés avec un ordre compatible avec la filtration dans le sens suivant : pour $j > i$, un simplexe de K_i précède un complexe de K_j qui n'est pas dans K_i . On rappelle que le coefficient $\delta(i, j)$ vaut 1 si le simplexe σ_i est une face de codimension 1 de σ_j , autrement $\delta(i, j)$ vaut 0. On procède alors à une élimination Gaussienne. Dans l'algorithme de réduction, $\text{low}(j)$ désigne le plus grand indice i tel que $\delta(i, j)$ soit non nul. Si la colonne j ne contient que des zéros, alors $\text{low}(j)$ n'est pas défini. On dit que δ est réduite si l'application low est injective sur son domaine de définition. Dans le pire cas, cet algorithme est cubique en le nombre de simplexes.

Interprétation. Après réduction de δ , on peut déduire le code-barre associé ainsi

- si $\text{low}(j) = i$, alors le simplexe σ_i correspond à la naissance d'une classe qui meure avec le simplexe σ_j .
- si $\text{low}(j)$ n'est pas défini, alors le simplexe σ_j correspond à la naissance d'une classe. S'il existe k tel que $\text{low}(k) = j$ alors σ_j correspond à la mort d'une classe naissant avec σ_k . S'il n'existe pas un tel k , alors σ_j correspond à la naissance d'une classe qui ne meure jamais.

On en déduit naturellement les intervalles semi-ouverts à droite du code-barre associé à δ .

1.3.5 Stabilité

Dans cette section, on montre un résultat de stabilité sur les diagrammes de persistance. De faibles perturbations sur les données entraînent en effet de faibles changements dans les diagrammes de persistance.

On rappelle que si $p, q \in \mathbb{R}^2$, on définit $\|p - q\|_\infty := \max\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\}$.

Définition 1.3.11. Soient X et Y deux ensembles de points. Les distances de Hausdorff et de Bottleneck entre X et Y sont définies respectivement par

$$d_H(X, Y) := \max\{\sup_x \inf_y \|x - y\|_\infty, \sup_y \inf_x \|x - y\|_\infty\}$$

$$d_B(X, Y) := \inf_\gamma \sup_x \|x - \gamma(x)\|_\infty.$$

où γ parcourt les bijections de X dans Y .

Au vu des définitions, il est clair que $d_H(X, Y) \leq d_B(X, Y)$, puisque la distance de bottleneck satisfait une contrainte supplémentaire.

Le résultat principal de cette section est le suivant

Théorème 1.3.5 (Stabilité des diagrammes de persistance). *Soit X un espace triangulable et $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues modérées. Les diagrammes de persistance vérifient l'inégalité suivante*

$$d_B(D(f), D(g)) \leq \|f - g\|_\infty.$$

Dans ce qui suit, nous démontrons en plusieurs étapes ce théorème de stabilité.

Preuve de la stabilité pour la distance de Hausdorff.

Dans un premier temps, on établit le lemme de la boîte, dont on montre ensuite qu'il implique la stabilité des diagrammes pour la distance de Hausdorff.

Examinons tout d'abord les relations entre quadrants. Soit X un espace topologique, on considère $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions modérées. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_x := H_k(f^{-1}(] - \infty, x))$ et $G_x := H_k(g^{-1}(] - \infty, x))$. Lorsque $x < y$, on note de plus $f_x^y : F_x \rightarrow F_y$ et $g_x^y : G_x \rightarrow G_y$ les applications induites par les inclusions. On pose $F_x^y = \text{Im} f_x^y$ et $G_x^y = \text{Im} g_x^y$ les groupes d'homologie correspondant. Soit $\varepsilon = \|f - g\|_\infty$, on a $f^{-1}(] - \infty, x) \subset g^{-1}(] - \infty, x + \varepsilon)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette inclusion induit une application $\varphi_x : F_x \rightarrow F_{x+\varepsilon}$. Par symétrie, on construit également une application $\psi_x : G_x \rightarrow G_{x+\varepsilon}$. Si $b < c$, on construit ainsi les deux diagrammes commutatifs suivant

$$\begin{array}{ccc} F_{b-\varepsilon} & \xrightarrow{f_{b-\varepsilon}^{c+\varepsilon}} & F_{c+\varepsilon} \\ \downarrow \varphi_{b-\varepsilon} & & \uparrow \psi_c \\ G_b & \xrightarrow{g_b^c} & G_c \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F_{b+\varepsilon} & \xrightarrow{f_{b+\varepsilon}^{c+\varepsilon}} & F_{c+\varepsilon} \\ \uparrow \varphi_b & & \uparrow \psi_c \\ G_b & \xrightarrow{g_b^c} & G_c \end{array}$$

La commutativité des diagrammes résulte de la commutativité des inclusions. On en déduit les inclusions

$$F_{b-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \subset \psi_c(G_b^c) \subset F_{b+\varepsilon}^{c+\varepsilon}.$$

En notant $Q = Q_b^c$ et $Q_\varepsilon = Q_{b-\varepsilon}^{c+\varepsilon}$, et en combinant cette inclusion avec le lemme 1.3.5, on obtient le lemme suivant dans le cas où $b, c, b - \varepsilon$ et $c + \varepsilon$ ne sont pas des valeurs critiques en homologie.

Lemme 1.3.6 (Lemme du quadrant). $\#(D(f) \cap Q_\varepsilon) \leq \#(D(g) \cap Q)$

En d'autres termes, la multiplicité totale de $D(g)$ dans le quadrant supérieur gauche et minorée par la multiplicité totale de $D(f)$ dans le quadrant rétréci de ε .

Ce résultat reste vrai lorsqu'on considère des valeurs critiques en homologie. En effet, il suffit dans ce cas d'élargir suffisamment les quadrants. Soit $0 < \delta < \varepsilon$ tel que $\#(D(f) \cap Q_\varepsilon) = \#D(f) \cap Q_{b-\varepsilon+\delta}^{c+\varepsilon-\delta}$ et $\#(D(g) \cap Q) = \#D(g) \cap Q_{b+\delta}^{c-\delta}$. On peut alors appliquer l'argument précédent.

On montre désormais une version forte du lemme du quadrant. Soient $w < x < y < z$, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 F_w & \xrightarrow{f_w^x} & F_x & \xrightarrow{f_x^y} & F_y & \xrightarrow{f_y^z} & F_z \\
 & \searrow f_w^x & \uparrow f_x^x & \searrow f_x^y & \uparrow f_y^y & \searrow f_y^z & \uparrow f_z^z \\
 & & F_w^x & \xrightarrow{f_x^y} & F_x^y & \xrightarrow{f_y^z} & F_y^z \\
 & & \searrow f_w^{x,y} & \uparrow f_x^{y,x} & \searrow f_x^{y,z} & \uparrow f_y^{z,x} & \searrow f_y^{z,y} \\
 & & & F_w^y & \xrightarrow{f_y^z} & F_x^z & \\
 & & & \searrow f_w^{y,z} & \uparrow f_y^{z,w} & & \\
 & & & & F_w^z & & \\
 & & & & \searrow f_w^{z,y} & & \\
 & & & & & F_y^z &
 \end{array}$$

On note $f_x^{y,z}$ la surjection $F_x^y \twoheadrightarrow F_x^z$, ainsi que $F_x^{y,z}$ son noyau. On a alors $\dim F_x^{y,z} = \dim F_x^y - \dim F_x^z$. Remarquons par ailleurs que l'application $f_w^{y,z}$ est en fait la restriction de $f_x^{y,z} : F_x^y \twoheadrightarrow F_x^z$ à F_w^y . Par suite, le noyau $F_w^{y,z} = \ker f_w^{y,z}$ est contenu dans le noyau $F_x^{y,z} = \ker f_x^{y,z}$. On considère alors l'espace quotient $F_w^{y,z} = F_x^{y,z} / F_w^{y,z}$, dont la dimension est égale à $\dim F_w^{y,z} = \dim F_x^{y,z} - \dim F_w^{y,z}$.

Soient $a < b < c < s$, $R = [a, b] \times [c, d] \subset \overline{\mathbb{R}}^2$ et $R_\varepsilon = [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \times [c + \varepsilon, d - \varepsilon]$.

Lemme 1.3.7 (Box lemma). *On a l'inégalité $\#(D(f) \cap R_\varepsilon) \leq \#(D(g) \cap R)$.*

Démonstration. On peut supposer que a, b, c, d ne sont pas des valeurs critiques en homologie de g , et que $a + \varepsilon, b - \varepsilon, c + \varepsilon, d - \varepsilon$ ne sont pas des valeurs critiques en homologie pour f . On suppose de plus que $a + \varepsilon < b - \varepsilon$ et $c + \varepsilon < d - \varepsilon$. On réinterprète la multiplicité totale comme la dimension d'un certain espace vectoriel. Plus précisément, on a

$$\dim F_{a+\varepsilon, b-\varepsilon}^{c+\varepsilon, d-\varepsilon} = \#(D(f) \cap R_\varepsilon) \quad (1.1)$$

$$\dim G_{a,b}^{c,d} = \#(D(g) \cap R) \quad (1.2)$$

On considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 G_a^{c,d} & \xrightarrow{r_1} & G_b^{c,d} \\
 \uparrow u_1 & & \uparrow u_4 \\
 & & F_{a+\varepsilon}^{d-\varepsilon} \xrightarrow{r_2} F_{b-\varepsilon}^{d-\varepsilon} \\
 & & \uparrow u_2 \quad \uparrow u_3 \\
 & & F_{a+\varepsilon}^{c+\varepsilon} \xrightarrow{r_3} F_{b-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \\
 & & \uparrow s_2 \quad \downarrow s_3 \\
 E_a^c \subset G_a^c & \xrightarrow{r_4} & E_b^c \subset G_b^c
 \end{array}$$

où l'on a défini $E_b^c = \psi_c^{-1}(F_{b-\varepsilon}^{c+\varepsilon, d-\varepsilon}) \cap G_b^c$. On a noté également $u_2 = f_{a+\varepsilon}^{c+\varepsilon, d-\varepsilon}$ et $u_3 = f_{b-\varepsilon}^{c+\varepsilon, d-\varepsilon}$. On a vu précédemment que $F_{b-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \subset G_b^c$, donc la restriction de ψ_c à E_b^c , notée s_3 a pour image le noyau de $u_3 : F_{b-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \rightarrow F_{b-\varepsilon}^{d-\varepsilon}$. On considère également $E_{a,b}^{c,d} = E_a^c = G_a^c \cap E_b^c$. La restriction de ψ_c à E_a^c est notée s_2 . L'inclusion $\psi_c(G_a^c) \subset F_{a+\varepsilon}^{c+\varepsilon}$, implique que l'image de s_2 est bien contenue dans $F_{a+\varepsilon}^{c+\varepsilon}$. On note s_1 la restriction de $\varphi_{d-\varepsilon}$ à $F_{b-\varepsilon}^{d-\varepsilon}$, d'après ce qui précède on a l'inclusion $\varphi_{d-\varepsilon}(F_{b-\varepsilon}^{d-\varepsilon}) \subset G_b^{c,d}$. Les applications r_1, r_2, r_3, r_4 du diagramme sont les inclusions

d'espaces vectoriels. Les restrictions de $g_a^{c,d}$ à E_a^c et de $g_b^{c,d}$ à E_b^c sont notées respectivement u_1 et u_4 . Le diagramme ci-dessus est donc bien défini et commutatif.

On montre que quotient E_b^c/E_a^c et un sous-espace de $G_{a,b}^{c,d}$. Notons qu'au vu des définitions les compositions $u_3 \circ s_3$ et $u_4 \circ r_4$. Comme $u_4 = s_1 \circ u_3 \circ s_3$, on a $E_b^c = \ker u_4$. De même, $r_1 \circ u_1 = u_4 \circ r_4$ ce qui implique l'égalité $E_a^c = \ker u_1$. On écrit $E_b^c = E_b^{c,d} \subset G_b^{c,d}$ et $E_a^c = E_a^{c,d} \subset G_a^{c,d}$. Le quotient $E_{a,b}^{c,d}$ se réécrit $E_{a,b}^{c,d} = E_b^{c,d}/E_a^{c,d} = E_b^{c,d}/(E_b^{c,d} \cap G_a^{c,d} \simeq E_b^{c,d}G_a^{c,d}/G_a^{c,d})$, donc $E_{a,b}^{c,d} \subset G_{a,b}^{c,d}$. On a en particulier l'inégalité

$$\dim E_{a,b}^{c,d} \leq \dim G_{a,b}^{c,d}.$$

Maintenant $E_{a,b}^{c,d} = \ker u_4 / \ker u_1$ et $F_{a+\varepsilon, b-\varepsilon}^{c+\varepsilon, d-\varepsilon} = \ker u_3 / \ker u_2$. Par construction $s_3(\ker u_4) = \ker u_3$. On a par ailleurs $s_3(\ker u_1) = s_2(\ker u_1) \subset \ker u_2$ en remarquant que $r_2 \circ u_2 \circ s_2 = u_3 \circ s_3 \circ r_4$ est nul sur $\ker u_1$. Par suite

$$\dim F_{a+\varepsilon, b-\varepsilon}^{c+\varepsilon, d-\varepsilon} \leq \dim E_{a,b}^{c,d}.$$

En combinant les deux inégalités montrées, on obtient

$$\dim F_{a+\varepsilon, b-\varepsilon}^{c+\varepsilon, d-\varepsilon} \leq \dim G_{a,b}^{c,d}.$$

□

Comme conséquence immédiate, on constate que la distance de Hausdorff vérifie $d_H(D(f), D(g)) \leq \varepsilon$. En effet, si $(x, y) \in D(f)$, alors il existe $(x', y') \in D(g)$ tel que $d((x, y), (x', y')) \leq \varepsilon$, puisque la multiplicité totale de $D(g)$ dans le carré $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \times [y - \varepsilon, y + \varepsilon]$ est au plus un.

Preuve de la stabilité pour la distance de bottleneck. On renforce le résultat de stabilité établi pour la distance de Hausdorff en l'étendant à la distance de bottleneck.

Preuve du théorème 1.3.5. Tout d'abord, on examine le cas où f et g sont *très proches*. On construit alors une bijection entre $D(f)$ et $D(g)$. Ensuite, on prouve le théorème dans le cas de fonctions linéaires \hat{f} et \hat{g} définies sur un complexe simplicial K . On montre enfin le théorème pour deux fonctions continues modérées $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ où X est un espace topologique triangulable.

Cas facile, construction d'une bijection. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, on considère la distance minimale entre deux points distincts, dont au plus un n'est pas sur la diagonale.

$$\delta_f = \min\{\|p - q\|_\infty \mid (p, q) \in (D(f) \setminus \Delta) \times D(f), p \neq q\}.$$

On dit que $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ est très proche de f lorsque $\|f - g\|_\infty < \delta_f/2$.

Lemme 1.3.8. Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions modérées. On suppose que g est très proche de f , alors les diagrammes de persistance vérifient l'inégalité

$$d_B(D(f), D(g)) \leq \|f - g\|_\infty.$$

Démonstration. On note μ la multiplicité du point $p \in D(f) \setminus \Delta$ et C_ε le carré de centre p et de rayon $\varepsilon = \|f - g\|_\infty$. Le lemme de la boîte implique l'inégalité

$$\mu \leq \#(D(g) \cap C_\varepsilon) \leq \#(D(f) \cap C_{2\varepsilon}).$$

Comme $2\varepsilon < \delta_f$, p est l'unique point de $D(f)$ dans $C_{2\varepsilon}$, donc $\#(D(g) \cap C_\varepsilon) = \mu$. On associe à tout point de $D(g) \cap C_\varepsilon$ le point p . On répète cette étape pour tout point non diagonal de $D(f)$. Les points de $D(g)$ non associés sont alors à distance au moins ε de $D(f) \setminus \Delta$. Comme

$$d_H(D(f), D(g)) = \max \left\{ \sup_{x \in D(f)} d_\infty(x, D(g)), \sup_{y \in D(g)} d_\infty(y, D(f)) \right\} \leq \varepsilon,$$

ces points sont à distance au plus ε de Δ . On associe à chacun de ces points le point de Δ le plus proche. On a ainsi construit une bijection $\gamma : D(f) \rightarrow D(g)$. Cette bijection vérifie $\|x - \gamma(x)\|_\infty \leq \varepsilon$, d'où $d_B(D(f), D(g)) \leq \varepsilon$. □

Cas linéaire. Soient \widehat{f} et \widehat{g} deux fonctions linéaires définies sur un complexe simplicial K . On note h_λ la combinaison linéaire $h_\lambda = (1 - \lambda)\widehat{f} + \lambda\widehat{g}$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

Lemme 1.3.9 (Lemme d'interpolation).

$$d_B(D(\widehat{f}), D(\widehat{g})) \leq \|\widehat{f} - \widehat{g}\|_\infty.$$

Démonstration. Soit $c = \|\widehat{f} - \widehat{g}\|$. On remarque que h_λ est modérée et que $\delta(\lambda) = \delta_{h_\lambda}$ est positive. Les intervalles $J_\lambda :=]\lambda - \delta(\lambda)/4c; \lambda + \delta(\lambda)/4c[$ forment un recouvrement ouvert du segment $[0, 1]$, dont on extrait un sous-recouvrement minimal et fini par compacité. On note $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ les milieux des intervalles ainsi obtenus. Par minimalité, deux intervalles consécutifs sont d'intersection non vide. Par conséquent,

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i \leq (\delta(\lambda_i) + \delta(\lambda_{i+1}))/4c \leq \max\{\delta(\lambda_i), \delta(\lambda_{i+1})\}/2c.$$

On en déduit que

$$\|h_{\lambda_i} - h_{\lambda_{i+1}}\| = c(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \leq \max\{\delta(\lambda_i), \delta(\lambda_{i+1})\}/2.$$

Par suite h_{λ_i} est très proche de $h_{\lambda_{i+1}}$: d'après le lemme 1.3.8, on a la majoration

$$d_B(D(h_{\lambda_i}), D(h_{\lambda_{i+1}})) \leq \|h_{\lambda_i} - h_{\lambda_{i+1}}\|_\infty.$$

On pose $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_{n+1} = 1$, l'inégalité précédente reste vraie pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Par inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned} d_B(\widehat{f}, \widehat{g}) &\leq \sum_{i=0}^n d_B(D(h_{\lambda_i}), D(h_{\lambda_{i+1}})) \\ &\leq \sum_{i=0}^n \|h_{\lambda_i} - h_{\lambda_{i+1}}\|_\infty \\ &= \|\widehat{f} - \widehat{g}\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Conclusion. Revenons à la preuve du théorème 1.3.5. Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ continues et modérées. On suppose X triangulable, *i.e.* qu'il existe un complexe simplicial (fini) L et un homéomorphisme $\Phi : L \rightarrow X$. Remarquons que les diagrammes de persistance sont invariants par changement de variable. Plus précisément, la composition $f \circ \Phi : L \rightarrow \mathbb{R}$ reste modérée et admet le même diagramme de persistance que f . Soit $\delta > 0$ suffisamment petit, il existe une subdivision K de L telle que

$$\begin{aligned} |f \circ \Phi(u) - f \circ \Phi(v)| &\leq \delta \\ |g \circ \Phi(u) - g \circ \Phi(v)| &\leq \delta \end{aligned}$$

où u et v sont des points d'un même simplexe $\sigma \in K$. On considère alors $\widehat{f}, \widehat{g} : \text{Sd } K \rightarrow \mathbb{R}$ les interpolations linéaires de $f \circ \Phi$ et $g \circ \Phi$ sur K . Par construction, ces fonctions vérifient les inégalités $\|\widehat{f} - f \circ \Phi\|_\infty \leq \delta$ et $\|\widehat{g} - g \circ \Phi\|_\infty \leq \delta$. D'après le lemme 1.3.9 et en remarquant que $\|f \circ \Phi - g \circ \Phi\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty$, il vient

$$\begin{aligned} d_B(D(\widehat{f}), D(\widehat{g})) &\leq \|\widehat{f} - \widehat{g}\|_\infty \\ &\leq \|f \circ \Phi - g \circ \Phi\|_\infty + \|\widehat{f} - f \circ \Phi\|_\infty + \|\widehat{g} - g \circ \Phi\|_\infty \\ &\leq \|f - g\|_\infty + 2\delta \end{aligned}$$

On peut supposer sans perte de généralité que $\delta < \min\{\delta_f/2, \delta_g/2\}$: le lemme 1.3.8 s'applique alors. Le changement de variables n'affectant pas les diagrammes de persistance, on obtient

$$d_B(D(f), D(\widehat{f})) = d_B(D(f \circ \Phi), D(\widehat{f})) \leq \delta$$

d'une part, et

$$d_B(D(g), D(\widehat{g})) = d_B(D(g \circ \Phi), D(\widehat{g})) \leq \delta$$

d'autre part. En combinant ces inégalités, on obtient

$$d_B(D(f), D(g)) \leq \|f - g\|_\infty + 4\delta.$$

Cette égalité étant vraie pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit, on obtient l'inégalité requise. □

1.4 Point de vue catégorique

On se propose de reformuler la théorie de l'homologie persistante avec le formalisme de la théorie des catégories. On introduira notamment la notion de distance d'entrelacement, dont on montrera qu'elle généralise la distance de bottleneck étudiée précédemment. On reformulera en particulier le théorème fondamental de l'homologie persistante et le théorème de stabilité de l'homologie persistante dans ce cadre.

Notations et rappels

Etant donné une catégorie \mathbf{C} , la classe \mathbf{C}_0 désigne objets, tandis que $\mathbf{C}(X, Y)$ désigne l'ensemble des morphismes de X dans Y pour toute paire d'objets $X, Y \in \mathbf{C}_0$. Lorsque \mathbf{C}_0 est un ensemble, on dit que \mathbf{C} est une petite catégorie.

On note \mathbf{Vec} la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps fixé \mathbb{F} .

Un espace vectoriel gradué est une suite $V_* = \{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ où $V_n \in \mathbf{Vec}$. Un morphisme d'espaces vectoriels gradués $f_* : V_* \rightarrow W_*$ est une suite $f_* = \{f_n : V_n \rightarrow W_n\}$. On note \mathbf{grVec} la catégorie des espaces vectoriels gradués.

Un ordre partiel sur un ensemble P est une relation réflexive, antisymétrique et transitive sur P . Si \leq est un ordre partiel sur P , on dit que (P, \leq) est un poset. On identifie les poset P avec la petite catégorie \mathbf{P} telle que $\mathbf{P}_0 = P$, et

$$\mathbf{P}(x, y) = \begin{cases} \star & \text{si } x \leq y \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Réciproquement, soit \mathbf{P} est une petite catégorie dont chaque ensemble de morphisme contient au plus un élément, et si $\mathbf{P}(x, y)$ et $\mathbf{P}(y, x)$ non vides implique $x = y$. Muni de l'ordre partiel $x \leq y \leftrightarrow \mathbf{P}(x, y) \neq \emptyset$, l'ensemble \mathbf{P}_0 est alors un poset.

Exemple 1.4.1. L'ensemble des réels munis de l'ordre usuel (\mathbb{R}, \leq) est un poset. Les ensembles \mathbb{Z}, \mathbb{N} et $[\mathbf{n}] := \{0, \dots, n\}$ sont des sous-posets de (\mathbb{R}, \leq) .

Soient \mathbf{C} une petite catégorie. Un foncteur $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ est appelé un diagramme de \mathbf{D} indexé par \mathbf{C} . La collection de ces foncteurs forme une catégorie notée $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ dont les morphismes sont les transformations naturelles.

Exemple 1.4.2. — Soit \mathbf{C} la catégorie discrète des entiers relatifs, on a $\mathbf{Vec}^{\mathbf{C}} = \mathbf{grVec}$.

— Soit \mathbf{D} une catégorie. Un diagramme F de \mathbf{D} indexé par (\mathbb{N}, \leq) est une suite de morphismes de \mathbf{D}

$$F(0) \rightarrow F(1) \rightarrow \dots \rightarrow F(2)$$

— Lorsque F est un diagramme de \mathbf{D} indexé par (\mathbb{R}, \leq) , on obtient des morphismes $F(a) \rightarrow F(b)$ pour tout réels $a \leq b$.

Remarque 1.4.1. Un diagramme indexé par $[\mathbf{n}]$, (\mathbb{N}, \leq) , ou (\mathbb{Z}, \leq) peut être étendu en un diagramme indexé par (\mathbb{R}, \leq) . En effet, soit $F \in \mathbf{Top}^{[\mathbf{n}]}$. Le foncteur inclusion $\mathbf{i} : [\mathbf{n}] \rightarrow (\mathbb{R}, \leq)$ défini par $\mathbf{i}(j) = j$ est une rétraction du

foncteur $\mathbf{r} : (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow [\mathbf{n}]$, définie par $\mathbf{r}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq 0 \\ [a] & \text{si } 0 < a < n \\ n & \text{si } a \geq n. \end{cases}$

La composition $F\mathbf{r}$ est un foncteur de $\mathbf{Top}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ et $F\mathbf{r}\mathbf{i} = F$. On peut de manière similaire définir des retractions dans le cas d'une indexation sur (\mathbb{N}, \leq) et (\mathbb{Z}, \leq) .

1.4.1 Homologie

On reformule dans ce paragraphe les notions d'homologie singulière et persistante en termes catégoriels.

Homologie singulière

On note $H_*(\cdot)$ l'homologie singulière à corps fixé \mathbb{F} . Pour tout $X \in \mathbf{Top}_0$, l'homologie $H_*(X)$ est un \mathbb{F} -espace vectoriel gradué. Toute application continue $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme $H_*(f) : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$. Comme $H_*(fg) = H_*(f)H_*(g)$, l'homologie singulière définit un foncteur $H_* : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{grVec}$. En degré k , on obtient un foncteur $H_k : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Vec}$.

Complexes simpliciaux filtrés

Soit K un complexe simplicial muni d'une filtration

$$\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n = K.$$

De cette filtration, on déduit un diagramme indexé par $[\mathbf{n}]$, *i.e.* $K \in \mathbf{Top}^{[\mathbf{n}]}$, avec $K(i) = K_i$ et $K(i \leq j)$ est donné par l'inclusion $K_i \hookrightarrow K_j$.

Soit H_k le foncteur associé à l'homologie de degré k à coefficients dans un corps \mathbb{F} fixé. On en déduit un diagramme d'espaces vectoriels de dimension finie indexé par $[\mathbf{n}]$, noté $H_k K \in \mathbf{Vec}^{[\mathbf{n}]}$. Plus précisément, $H_k K(i) = H_k(K_i, \mathbb{F})$ et $H_k(K(i \leq j))$ est l'application induite en homologie par l'inclusion $K_i \hookrightarrow K_j$.

La somme directe de l'homologie en tout degré donne un diagramme $HF \in \mathbf{Vec}^{[\mathbf{n}]}$, défini par $HF(i) = \bigoplus_k H_k(K_i, \mathbb{F})$.

1.4.2 Lien entre complexe simplicial filtré et fonction de filtration

Ensembles de sous niveaux

Soit X un espace topologique, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, non nécessairement continue. Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble de sous niveau, (ou demi-espace) $f^{-1}(] - \infty, a]) = \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$. Muni de la topologie induite, c'est une espace topologique. Lorsque $a \leq b$, l'inclusion $f^{-1}(] - \infty, a]) \subset f^{-1}(] - \infty, b])$ est une application continue.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $F(a) = f^{-1}(] - \infty, a])$, et si $a \leq b$, on définit $F(a \leq b)$ comme étant l'inclusion $f^{-1}(] - \infty, a]) \hookrightarrow f^{-1}(] - \infty, b])$. Cela définit un foncteur $F \in \mathbf{Top}^{(\mathbb{R}, \leq)}$.

Soit H_k le foncteur d'homologie singulière en degré k à coefficients dans un corps fixé \mathbb{F} . Il induit un diagramme $H_k F$ indexé par (\mathbb{R}, \leq) . Plus précisément, on pose $H_k F(a) = H_k(F(a), \mathbb{F})$ et lorsque $a \leq b$, $H_k F(a \leq b)$ est l'application en homologie induite par l'inclusion $F(a) \hookrightarrow F(b)$. Si f vérifie que $H_k(F(a), \mathbb{F})$ est un espace vectoriel de dimension finie pour tout $a \in \mathbb{R}$, alors $H_k F \in \mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$. Dans ce cas, $HF \in \mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ est donné par $HF(a) = \bigoplus_k H_k(F(a), \mathbb{F})$.

1.4.3 Persistance

Homologie persistante. Soit un diagramme $F \in \mathbf{Top}^{(\mathbb{R}, \leq)}$. Le p -ième groupe d'homologie de $F(a)$ est par définition l'image de l'application $H_k F(a \leq a + p)$.

Modules persistants. Les diagrammes de $\mathbf{Vec}^{[\mathbf{n}]}$, $\mathbf{Vec}^{(\mathbb{N}, \leq)}$, $\mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ sont souvent appelés modules persistants.

1.4.4 Entrelacement de diagrammes

On définit un ε -entrelacement pour des diagrammes indexés sur (\mathbb{R}, \leq) et on montre que cela induit une métrique sur un ensemble de diagrammes indexés sur (\mathbb{R}, \leq) .

On considère la catégorie (\mathbb{R}, \leq) dont les objets sont les nombres réels, et les morphismes sont

$$\text{Mor}(a, b) = \begin{cases} \star & \text{si } a \leq b \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $b \geq 0$, on définit le foncteur translation $T_b : (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow (\mathbb{R}, \leq)$ par $T_b(a) = b + a$ et la transformation naturelle $\eta_b : \text{Id}_{(\mathbb{R}, \leq)} \Rightarrow T_b$ par $\eta_b(a) : a \leq a + b$. Remarquons qu'on a les relations $T_b T_c = T_{b+c}$ et $\eta_b \eta_c = \eta_{b+c}$.

Soit $\varepsilon \geq 0$, \mathbf{D} une catégorie et $F, G \in \mathbf{D}^{(\mathbb{R}, \leq)}$.

Définition 1.4.1. Un ε -entrelacement de F et G est un couple de transformations naturelles $\varphi : F \Rightarrow GT_\varepsilon$ et $\psi G \Rightarrow FT_\varepsilon$, *i.e.*

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_\varepsilon} & (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_\varepsilon} & (\mathbb{R}, \leq) \\ \downarrow F & & \downarrow G & & \downarrow F \\ D & \xlongequal{\quad} & D & \xlongequal{\quad} & D \end{array}$$

tel que $(\psi T_\varepsilon)\varphi = F\eta_{2\varepsilon}$ et $(\varphi T_\varepsilon)\psi = G\eta_{2\varepsilon}$.

L'existence des transformations naturelles φ et ψ implique l'existence des diagrammes commutatifs suivants, pour tout $a \leq b$.

$$\begin{array}{ccc}
F(a) & \longrightarrow & F(b) \\
& \searrow \varphi(a) & \searrow \varphi(b) \\
& & G(a + \varepsilon) \longrightarrow G(b + \varepsilon) \\
& & \nearrow \psi(a) & \nearrow \psi(b) \\
& & F(a + \varepsilon) \longrightarrow F(b + \varepsilon) \\
G(a) & \longrightarrow & G(b)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
F(a) & \longrightarrow & F(a + 2\varepsilon) \\
& \searrow \varphi(a) & \nearrow \psi(a + \varepsilon) \\
& & G(a + \varepsilon)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& & F(a + \varepsilon) \\
& \nearrow \psi(a) & \searrow \varphi(a + \varepsilon) \\
G(a) & \longrightarrow & G(a + 2\varepsilon)
\end{array}$$

Définition 1.4.2. On pose $d(F, G) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid F \text{ et } G \text{ sont } \varepsilon\text{-entrelacés}\}$. Lorsque F et G ne sont pas ε -entrelacés pour tout $\varepsilon \geq 0$, on pose $d(F, G) = \infty$.

On montre que d est une distance généralisée. En effet, $d(F, G) = 0$ n'implique pas $F \cong G$. Si F et G sont 0-entrelacés, alors $F \cong G$.

Proposition 1.4.1. La fonction d définit une pseudo-distance sur tout sous-ensemble de la classe des diagrammes indexés (\mathbb{R}, \leq) sur la catégorie \mathbf{D} .

On montre dans un premier temps le lemme suivant

Lemme 1.4.1. Si F et G sont deux diagrammes ε -entrelacés indexés par (\mathbb{R}, \leq) , alors ils sont ε' entrelacés pour tout $\varepsilon' \geq \varepsilon$.

Démonstration. Soient $\varphi : F \Rightarrow GT_\varepsilon$ et $\psi : G \Rightarrow FT_\varepsilon$ tels que $(\psi T_\varepsilon)\varphi = F\eta_{2\varepsilon}$ et $(\varphi T_\varepsilon)\psi = G\eta_{2\varepsilon}$. Soit $\varepsilon' \geq \varepsilon$. On pose $\bar{\varepsilon} = \varepsilon' - \varepsilon$. On vérifie que $\eta_{\bar{\varepsilon}}T_{\bar{\varepsilon}} : T_{\bar{\varepsilon}} \Rightarrow T_{\varepsilon'}$, puis que $G\eta_{\bar{\varepsilon}}T_{\bar{\varepsilon}} : GT_{\bar{\varepsilon}} \Rightarrow GT_{\varepsilon'}$. Soit $\hat{\varphi} = (G\eta_{\bar{\varepsilon}}T_{\bar{\varepsilon}})\varphi$. On a

$$\hat{\varphi}(a) : \quad F(a) \xrightarrow{\varphi(a)} G(a + \varepsilon) \xrightarrow{G\eta_{\bar{\varepsilon}}T_{\bar{\varepsilon}}(a)} G(a + \varepsilon').$$

On définit de manière similaire $\hat{\psi} = (F\eta_{\bar{\varepsilon}}T_{\bar{\varepsilon}})\psi$, qui vérifie $(\hat{\psi}T_{\varepsilon'})\hat{\varphi} = F\eta_{2\varepsilon'}$. On a également $(\hat{\varphi}T_{\varepsilon'})\hat{\psi} = G\eta_{2\varepsilon'}$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
F(a) & \xrightarrow{F\eta_{2\varepsilon}(a)} & F(a + 2\varepsilon) & \xrightarrow{F\eta_{\bar{\varepsilon}}T_{2\varepsilon}(a)} & F(a + \varepsilon' + \varepsilon) & \xrightarrow{F\eta_{\bar{\varepsilon}}T_{\varepsilon+\varepsilon'}(a)} & F(a + 2\varepsilon') \\
& \searrow \varphi a & & \nearrow \psi T_{\varepsilon}(a) & & \nearrow \psi T_{\varepsilon'}(a) & \\
& & G(a + \varepsilon) & \xrightarrow{G\eta_{\bar{\varepsilon}}T_{\bar{\varepsilon}}(a)} & G(a + \varepsilon') & &
\end{array}$$

□

Démonstration de la proposition 1.4.1. En prenant $\varphi = \psi = Id$, on voit que $d(F, F) = 0$ pour tout diagramme F . Par symétrie de la définition d'entrelacement, il est clair que $d(F, G) = d(G, F)$ pour tous diagrammes F et G . Montrons l'inégalité triangulaire. Soient F, G et H , des diagrammes. On note $a = d(F, G)$ et $b = d(G, H)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par le lemme précédent, F et G sont $(a + \varepsilon)$ -entrelacés tandis que G et H sont $(b + \varepsilon)$ -entrelacés. On considère les transformations naturelles correspondantes $\varphi' : F \Rightarrow GT_{a+\varepsilon}$, $\psi' : G \Rightarrow FT_{a+\varepsilon}$, $\varphi'' : G \Rightarrow HT_{b+\varepsilon}$ et $\psi'' : H \Rightarrow GT_{b+\varepsilon}$. On montre qu'elles constituent les transformations naturelles requises pour l'entrelacement de F et H .

Soient $\varphi = (\varphi''T_{a+\varepsilon})\varphi' : F \Rightarrow HT_{b+\varepsilon}T_{a+\varepsilon} = HT_{a+b+2\varepsilon}$ et $\psi = (\psi'T_{b+\varepsilon})\psi'' : H \Rightarrow FT_{a+\varepsilon}T_{b+\varepsilon} = FT_{a+b+2\varepsilon}$. La première inégalité peut se montrer en considérant le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_{a+\varepsilon}} & (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_{b+\varepsilon}} & (\mathbb{R}, \leq) \\ \downarrow F & & \downarrow G & & \downarrow H \\ D & \xlongequal{\quad} & D & \xlongequal{\quad} & D \end{array}$$

On montre que $(\psi T_{a+b+2\varepsilon})\varphi = F\eta_{2(a+b+2\varepsilon)}$ et $(\varphi T_{a+b+2\varepsilon})\psi = H\eta_{2(a+b+2\varepsilon)}$.

$$\begin{array}{ccccccccc} (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_{a+\varepsilon}} & (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_{b+\varepsilon}} & (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_{b+\varepsilon}} & (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_{a+\varepsilon}} & (\mathbb{R}, \leq) \\ \downarrow F & & \downarrow G & & \downarrow H & & \downarrow G & & \downarrow F \\ D & \xlongequal{\quad} & D & \xlongequal{\quad} & D & \xlongequal{\quad} & D & \xlongequal{\quad} & D \end{array}$$

Ainsi F et H sont $(a+b+2\varepsilon)$ -entrelacés pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $d(F, H) \leq a+b$. \square

On dit que F est équivalent à G lorsque $d(F, G) = 0$. Cela définit une relation d'équivalence. On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 1.4.1. *Si on identifie les diagrammes dont la distance d'entrelacement est nulle, alors d est une métrique étendue sur l'ensemble des classes d'équivalence.*

Proposition 1.4.2. *Soit $F, G : (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow \mathbf{D}$ et $H : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$. Si F et G sont ε -entrelacés, alors HF et HG le sont aussi. On a alors $d(HF, HG) \leq d(F, G)$.*

Démonstration. Supposons que F et G sont ε -entrelacés, soient $\varphi : F \Rightarrow GT_\varepsilon$ et $\psi : G \Rightarrow FT_\varepsilon$ tels que $(\psi T_\varepsilon)\varphi = F\eta_{2\varepsilon}$ et $(\varphi T_\varepsilon)\psi = G\eta_{2\varepsilon}$. Par functorialité, $H\varphi : HF \Rightarrow HGT_\varepsilon$ et $H\psi : HG \Rightarrow HFT_\varepsilon$ vérifient $(H\psi T_\varepsilon)(H\varphi) = (HF)\eta_{2\varepsilon}$ et $(H\varphi T_\varepsilon)(H\psi) = (HG)\eta_{2\varepsilon}$, ce qui montre que HF et HG sont ε -entrelacés.

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_\varepsilon} & (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_\varepsilon} & (\mathbb{R}, \leq) \\ \downarrow F & & \downarrow G & & \downarrow F \\ D & \xlongequal{\quad} & D & \xlongequal{\quad} & D \\ \downarrow H & & \downarrow H & & \downarrow H \\ E & \xlongequal{\quad} & E & \xlongequal{\quad} & E \end{array}$$

\square

1.4.5 Diagrammes d'espaces vectoriels

Avant de montrer le théorème de stabilité dans ce cadre catégorique, nous montrons en quoi les diagrammes de $\mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ munis de la distance d'entrelacement généralisent les considérations de la section 1.3.5. Plus précisément, on montre qu'il existe un plongement isométrique de l'ensemble des code-barres muni de la distance de bottleneck dans l'ensemble des diagrammes $\mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ munis de la distance d'entrelacement.

Diagrammes de type fini

Définition 1.4.3. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, on définit le diagramme $\chi_I \in \mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ par

$$\chi_I(a) = \begin{cases} \mathbb{F} & \text{si } a \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \chi_I(a \leq b) = \begin{cases} \text{Id}_{\mathbb{F}} & \text{si } a, b \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{On dit qu'un diagramme } F \in \mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)} \text{ est de type}$$

fini si $F \cong \bigoplus_{k=1}^N \chi_{I_k}$.

Les diagrammes $\chi_{\mathbb{R}}$ et χ_{\emptyset} sont respectivement les foncteurs \mathbb{F} et 0 .

Lemme 1.4.2. *Pour tout $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, le diagramme χ_I est indécomposable.*

Démonstration. Supposons que $\chi_I \cong P \oplus Q$. Si $a \notin I$, alors $P(a) \oplus Q(a) \cong \chi_I(a) = 0$, ce qui implique $P(a) = Q(a) = 0$. Maintenant si $a \in I$, alors $P(a) \oplus Q(a) \cong \mathbb{F}$. On peut supposer sans perte de généralité que $P(a) = \mathbb{F}$ et que $Q(a) = 0$. Soient $a \leq b \in I$, on a $Q(a \leq b) = 0$. Par conséquent $P(a \leq b) \oplus Q(a \leq b) = (P \oplus Q)(a \leq b) \cong \chi_I(a \leq b) = \text{Id}_{\mathbb{F}}$ et $P(a \leq b) \cong \text{Id}_{\mathbb{F}}$. Puisque $P(b) \oplus Q(b) \cong \chi_I(b) = \mathbb{F}$, on a $P(b) \cong \mathbb{F}$ et $Q(b) = 0$. Lorsque $d \leq a \in I$, on voit que $P(d \leq a) \cong \text{Id}_{\mathbb{F}}$, $Q(d \leq a) = 0$, $P(d) \cong \mathbb{F}$ et $Q(d) = 0$. Ainsi $P \cong \chi_I$ et $Q = 0$. \square

Définition 1.4.4. Soit $F \in \mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On dit que F est constant sur I , si $F(a \leq b)$ est un isomorphisme pour tout $a \leq b \in I$. On dit qu'un réel $a \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière de F s'il existe un intervalle ouvert I contenant a sur lequel F est constant. Si ce n'est pas le cas, on dit que a est une valeur critique de F . On dit que F est modéré s'il admet un nombre fini de valeur critiques.

Lemme 1.4.3 (Valeurs critiques). *Si I est un intervalle ne contenant pas de valeur critique de F , alors F est constant sur I .*

Démonstration. Soient $a \leq b \in I$. Pour tout $c \in [a, b]$, il existe par hypothèse un intervalle $c \in I_c$ sur lequel F est constant. Comme $[a, b]$ est compact, on peut un sous recouvrement fini $\{I_{c_1}, \dots, I_{c_n}\}$ du recouvrement $\{I_c \mid c \in [a, b]\}$. On considère alors une suite $a = x_0 \leq \dots \leq x_m = b$ telle que $x_k, x_{k+1} \in I_{c_j}$ pour un certain j . On obtient alors une suite d'isomorphismes $F(x_k \leq x_{k+1})$, ce qui montre que $F(a \leq b)$ est un isomorphisme⁷ \square

Remarque 1.4.2. Il n'est pas intéressant de définir une valeur critique $a \in \mathbb{R}$ de F par l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $F(a - \varepsilon \leq a + \varepsilon)$ ne soit pas un isomorphisme. En effet, si on considère $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

$$\text{et } f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x = 1 \text{ alors } 0 \text{ n'est pas une valeur critique avec cette nouvelle définition, pourtant} \\ y & \text{sinon,} \end{cases}$$

l'application induite en homologie $H_0(f^{-1}(\lceil -\infty, 0 \rceil)) \rightarrow H_0(f^{-1}(\lceil -\infty, 1 \rceil))$ n'est pas un isomorphisme, ce qui contredit le lemme des valeurs critiques.

Lemme 1.4.4. *La catégorie $\mathbf{Vec}^{(\mathbb{Z}, \leq)}$ est isomorphe à la catégorie des $\mathbb{F}[t]$ -modules gradués.*

Démonstration. À tout diagramme $F \in \mathbf{Vec}^{(\mathbb{Z}, \leq)}$ on assigne un $\mathbb{F}[t]$ -module gradué de type fini M défini par $M_k = F(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Si $a \in M_k$, la structure de $\mathbb{F}[t]$ -module est définie par $t \cdot a = F(k \leq k+1)(a)$.

Réciproquement, on associe à tout $\mathbb{F}[t]$ -module gradué M un diagramme $F \in \mathbf{Vec}^{(\mathbb{Z}, \leq)}$ défini par $F(k) = M_k$ et dont les morphismes sont générés par $F(k \leq k+1)(a) = t \cdot a$ pour $a \in F(k)$ et $k \in \mathbb{Z}$. La composition de ces foncteurs est égale au foncteur identité. \square

Théorème 1.4.1. *Un diagramme de $\mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ est modéré si et seulement si il est de type fini.*

Démonstration. Supposons que $F \in \mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ soit de type fini. On écrit $F \cong \bigoplus_{k=1}^N \chi_{I_k}$. Soit $a \in \mathbb{R}$, c'est une valeur critique de F si et seulement si a est une borne d'un des intervalles I_k , ce qui implique que F est modéré. Réciproquement, supposons que F admette un nombre fini de valeurs critiques $a_1 < \dots < a_n$. On considère b_0, \dots, b_n une suite entrelacée telle que $a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \dots < a_n < b_n < a_{n+1}$, où l'on a posé $a_0 = -\infty$ et $a_{n+1} = +\infty$, $F(a_0) = F(b_0)$, $F(a_{n+1}) = F(b_n)$. On identifie ces deux suites à la suite des entiers $0, \dots, 2n$.

On définit en ce sens un foncteur $i : [2\mathbf{n}] \rightarrow (\mathbb{R}, \leq)$ par $k \mapsto \begin{cases} b_{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ est pair} \\ a_{\frac{k+1}{2}} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$ On définit également

un foncteur $r : (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow [2\mathbf{n}]$ défini par $c \mapsto \begin{cases} 2k-1 & \text{si } c = a_k, k \in \{1, \dots, n\} \\ 2k & \text{si } a_k < c < a_{k+1}, k \in \{0, \dots, n\}. \end{cases}$ La composition des

foncteurs $ir : (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow (\mathbb{R}, \leq)$ est alors donnée par $c \mapsto \begin{cases} a_k & \text{si } c = a_k, k \in \{1, \dots, n\} \\ b_k & \text{si } a_k < c < a_{k+1}, k \in \{0, \dots, n\}. \end{cases}$ On en déduit

un foncteur $(ir)^*F \in \mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ défini par $(ir)^*F(x) = F(irc)$.

$(ir)^* : F \mapsto (ir)^*F$ est un isomorphisme naturel. En effet, on montre que $F(irc) \cong F(c)$ pour tout $c \in \mathbb{R}$. Si $c = a_k$ c'est même une égalité, et si $a_k < c < a_{k+1}$ alors $F(irc) = F(b_k) \cong F(c)$ d'après le lemme 1.4.3.

Le foncteur $i^*F : [2\mathbf{n}] \rightarrow \mathbf{Vec}$ peut être étendu en un foncteur $(\mathbb{Z}, \leq) \rightarrow \mathbf{Vec}$ ainsi : on pose $i^*F(k) = i^*F(0)$ et $i^*F(k \leq 0) = \text{Id}_{F(b_0)}$ si $k < 0$ d'une part et $i^*F(k) = i^*F(2n)$ et $i^*F(2n \leq k) = \text{Id}_{F(b_n)}$ si $2n < k$. D'après le lemme 1.4.4, il existe un $\mathbb{F}[t]$ -module gradué auquel $i^*F \in \mathbf{Vec}^{(\mathbb{Z}, \leq)}$ est isomorphe. D'après le théorème de structure des modules gradués de type fini sur un anneau principal gradué, il existe une décomposition unique

$$i^*F \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} t^{c_i} \mathbb{F}[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{n_2} t^{d_j} \mathbb{F}[t] / (t^{e_j}) \right).$$

On en déduit que

$$i^*F \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} \chi_{[c_i, \infty[} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{n_2} \chi_{[d_j, d_j + e_j[} \right).$$

7. Cela provient du fait que F est un foncteur : on a $F(a \leq b) = F(x_{m-1} \leq x_m) \dots F(x_0 \leq x_1)$.

Par conséquent,

$$F \cong (ir)^*F = r^*i^*F \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} r^* \chi_{[c_i, \infty[} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{n_2} r^* \chi_{[d_j, d_j + e_j[} \right),$$

chaque terme $r^* \chi_{I_k}$ pouvant s'exprimer sous la forme χ_{J_k} . Ainsi F est de type fini. \square

Les diagrammes de type fini de $\mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ satisfont donc le théorème de *Krull–Schmidt* en vertu du théorème de structure des modules gradués sur un anneau principal gradué.

Corollaire 1.4.2 (Krull-Schmidt). *Si $F \cong \bigoplus_{k=1}^n \chi_{I_k}$ et $F \cong \bigoplus_{j=1}^m \chi_{I'_j}$, alors $n = m$ et les suites $(I_k), (I'_j)$ sont identiques à l'ordre près.*

1.4.6 Code-barres et diagrammes de persistance

Définition 1.4.5. Soit $F \in \mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ un diagramme de type fini. Un code-barre est un multi-ensemble d'intervalles. Le code-barre de F est un multi-ensemble $\{I_k\}_{k=1}^n$ où $F \cong \bigoplus_{k=1}^n \chi_{I_k}$.

Définition 1.4.6. Un diagramme de persistance est un multi-ensemble $\{a_k, b_k\}_{k=1}^n$ où $a_k \leq b_k$ et $\{a_k, b_k\}$ sont les bornes de I_k , avec $F \cong \bigoplus_{k=1}^n \chi_{I_k}$.

Ces objets sont bien définis en vertu du corollaire 1.4.2. On obtient alors la bijection suivante.

Corollaire 1.4.3. *Les code-barres sont en bijection avec la classe des diagrammes de type fini de $\mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$.*

Distance de bottleneck

On définit la distance de bottleneck entre deux code-barres en terme de distance d'entrelacement. On montre qu'il existe un plongement isométrique de l'ensemble des code-barres finis munis de la distance de bottleneck dans l'ensemble des diagrammes $\mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ munis de la distance d'entrelacement.

Définition 1.4.7. Soient A et B des multiensembles. On définit le multi-ensemble A_B comme étant l'union disjointe de A et de \emptyset compté avec multiplicité $|B|$. Une bijection stable ou une correspondance partielle entre deux multiensembles A et B est une bijection $f : A_B \rightarrow B_A$. On écrit $f : A \rightleftharpoons B$.

Définition 1.4.8. Soient CB, CB' deux code-barres. On définit la distance de bottleneck entre CB et CB' par

$$d_B(CB, CB') = \inf_{f: B \rightleftharpoons B'} \sup_{I \in \text{dom} f} d(\chi_I, \chi_{f(I)}).$$

où d désigne la distance d'entrelacement.

On rappelle quelques propriétés de la distance d'entrelacement.

Proposition 1.4.3. *Soient I, I' deux intervalles finis.*

- si $I = I' = \emptyset$, alors $d(\chi_I, \chi_{I'}) = 0$.
- Si $I' = \emptyset$ et I a pour bornes a et b , alors $d(\chi_I, \chi_{I'}) = \frac{b-a}{2}$.
- Si I et I' ont pour bornes a, b et a', b' respectivement, alors

$$d(\chi_I, \chi_{I'}) = \min \left(\max(|a - a'|, |b - b'|), \max \left(\frac{b-a}{2}, \frac{b'-a'}{2} \right) \right).$$

Proposition 1.4.4. *Soient I et I' deux intervalles, dont l'un au moins est infini.*

- Si $I = I' = \mathbb{R}$, alors $d(\chi_I, \chi_{I'}) = 0$.
- Si $\inf I = \inf I' = -\infty$, et si I et I' ont pour borne supérieure respectivement b et b' , alors $d(\chi_I, \chi_{I'}) = |b - b'|$.
- Si $\sup I = \sup I' = \infty$, et si I et I' ont pour borne inférieure a et a' , alors $d(\chi_I, \chi_{I'}) = |a - a'|$.
- Dans tous les autres cas, $d(\chi_I, \chi_{I'}) = \infty$.

Démonstration des proposition. Supposons $I = I' = \emptyset$, en prenant $\varphi = \text{Id}_{\chi_\emptyset} = \psi$, on voit que χ_\emptyset est 0-entrelacé avec lui-même, d'où $d(\chi_\emptyset, \chi_\emptyset) = 0$.

Supposons $I' = \emptyset$ et $I = [a, b]$ où $a < b < \infty$ (les bornes étant éventuellement ouvertes). Le lemme 1.4.5 implique l'inégalité $d(\chi_\emptyset, \chi_{[a,b]}) \leq \max\{0, \frac{b-a}{2}\} = \frac{b-a}{2}$, tandis que le lemme 1.4.6 donne l'inégalité $d(\chi_\emptyset, \chi_{[a,b]}) \geq \frac{b-a}{2}$. Lorsque $b = \infty$, on montre que $d(0, \chi_{[a, \infty[}) = \infty$. On montre que χ_\emptyset et $\chi_{[a, \infty[}$ ne peuvent être ε -entrelacés quelque soit le réel $\varepsilon \geq 0$. En effet, soit $\varepsilon \geq 0$ tel qu'il existe $\varphi : \chi_\emptyset \rightarrow \chi_{[a, \infty[} T_\varepsilon$ et $\psi : \chi_{[a, \infty[} \rightarrow \chi_\emptyset T_\varepsilon$ vérifiant $(\psi T_\varepsilon)\varphi = \chi_\emptyset \eta_{2\varepsilon}$ et $(\varphi T_\varepsilon)\psi = \chi_{[a, \infty[} \eta_{2\varepsilon}$. On a alors $(\varphi T_\varepsilon)\psi(a) : \mathbb{F} \xrightarrow{0} \mathbb{F}$, mais $\chi_{[a, \infty[} \eta_{2\varepsilon}(a) = \text{Id}_{\mathbb{F}}$, ce qui contredit

la deuxième égalité.

Enfin, supposons que $I = [a, b]$ et $I' = [a', b']$ (les bornes étant éventuellement ouvertes). On suppose les intervalles I et I' finis ainsi que $a \leq b$ et $a' \leq b'$. Le lemme 1.4.5 montre d'une part que $d := d(\chi_I, \chi_{I'}) \leq \max(h, h')$. On pose ensuite $\varepsilon = \max\{|a' - a|, |b' - b|\}$, et on définit les transformations naturelles $\varphi : \chi_I \Rightarrow \chi_{I'} T_\varepsilon$

et $\psi : \chi_{I'} \Rightarrow \chi_I T_\varepsilon$ par $\varphi(x) = \begin{cases} \text{Id}_{\mathbb{F}} & \text{si } x \in I \text{ et } x + \varepsilon \in I' \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ et $\psi(x) = \begin{cases} \text{Id}_{\mathbb{F}} & \text{si } x \in I' \text{ et } x + \varepsilon \in I \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ pour tout

$x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on voit que l'application linéaire $(\psi T_\varepsilon) \varphi(x) : \chi_I(x) \rightarrow \chi_{I'}(x + \varepsilon) \rightarrow \chi_I(x + 2\varepsilon)$ est l'application linéaire identité $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ si et seulement si $x \in I, x + \varepsilon \in I'$ et $x + 2\varepsilon \in I$, ce qui équivaut à $x, x + 2\varepsilon \in I$. On a alors $(\psi T_\varepsilon) \varphi = \chi_I \eta_{2\varepsilon}$, et on a de même l'égalité $(\varphi T_\varepsilon) \psi = \chi_{I'} \eta_{2\varepsilon}$. Le couple (φ, ψ) définit alors un ε -entrelacement de χ_I et $\chi_{I'}$, d'où l'inégalité $d \leq \min\{\varepsilon, \max\{h, h'\}\} =: \varepsilon_0$. On montre alors que pour tout $\varepsilon' < \varepsilon_0$, χ_I et $\chi_{I'}$ ne sont pas ε' -entrelacés, ce qui implique l'égalité. Les autres cas se traitent de manière similaire. \square

Pour démontrer ces propositions, on a utilisé les deux lemmes suivants. On suppose que I et I' sont finis, et on note respectivement $h = \lg(I)/2$ et $h' = \lg(I')/2$. Si I et I' sont non vides, on note m et m' leur milieu respectif.

Lemme 1.4.5. *Si I et I' sont deux intervalles finis, alors $d(\chi_I, \chi_{I'}) \leq \max(h, h')$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > \max(h, h')$. On a $\chi_I \eta_{2\varepsilon} = 0 = \chi_{I'} \eta_{2\varepsilon}$. Soient $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, alors φ et ψ définissent un ε -entrelacement de χ_I et $\chi_{I'}$. \square

Lemme 1.4.6. *Si I et I' sont deux intervalles finis, et si $m \notin I'$, alors $d(\chi_I, \chi_{I'}) \geq h$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon < h$, on a $[m - \varepsilon, m + \varepsilon] \subset I$, et $\chi_I \eta_{2\varepsilon}(m - \varepsilon) = \text{Id}_{\mathbb{F}}$. Supposons que $m \notin I'$, et qu'il existe un ε -entrelacement (φ, ψ) entre χ_I et $\chi_{I'}$. Il vient $(\psi T_\varepsilon) \varphi(m - \varepsilon) = \text{Id}_{\mathbb{F}}$, pourtant $\varphi(m - \varepsilon) \in \chi_{I'}(m) = 0$ et par suite $(\psi T_\varepsilon) \varphi(m - \varepsilon) = 0$, ce qui est absurde. Par conséquent, $d(\chi_I, \chi_{I'}) \geq h$. \square

On notera abusivement $\mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ les objets de cette même catégorie. Le théorème suivant assure que les résultats sur $\mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ sont une généralisation de ceux sur les code-barres.

Théorème 1.4.2 (Catégorification de l'espace des diagrammes de persistance). *Soit \mathcal{B} l'ensemble des code-barres finis, d_B la distance de bottleneck, et d la distance d'entrelacement. On définit*

$$\chi(\{I_k\}_{k=1}^n) = \bigoplus_{k=1}^n \chi_{I_k}.$$

L'application χ définit un plongement isométrique

$$\chi : (\mathcal{B}, d_B) \hookrightarrow (\mathbf{Vec}^{(\mathbb{R}, \leq)}, d).$$

Pour montrer ce résultat, on aura besoin du théorème suivant

Théorème 1.4.3. *Soit une catégorie abélienne \mathbf{A} et $\varepsilon \geq 0$, alors la catégorie $\mathbf{Int}_\varepsilon(\mathbf{A})$ des ε -entrelacements de \mathbf{A} est une catégorie abélienne.*

duquel on déduit le corollaire

Corollaire 1.4.4. *Soient deux paires de diagrammes ε -entrelacés (F, G) et (F', G') dans $\mathbf{A}^{(\mathbb{R}, \leq)}$. Les diagrammes $F \oplus F'$ et $G \oplus G'$ sont aussi ε -entrelacés.*

Pour une démonstration de ces résultats on pourra consulter l'étude de la structure abélienne des entrelacements dans [BUB14].

Démonstration du théorème 1.4.2. Soient $B, B' \in \mathcal{B}$. D'après [CHA09], on a l'inégalité

$$d_B(B, B') \leq d(\chi(B), \chi(B')).$$

Il reste à montrer que $d(\chi(B), \chi(B')) \leq d_B(B, B')$. Si $d_B(B, B') = \infty$, le résultat est vrai. Supposons que $d_B(B, B') < \infty$. Soient $f : B \rightrightarrows B'$ tel que $\sup_{I \in \text{dom}(f)} d(\chi_I, \chi_{f(I)}) < \infty$, et $\varepsilon > \sup_{I \in \text{dom}(f)} d(\chi_I, \chi_{f(I)})$. D'après le

lemme 1.4.1, χ_I et $\chi_{f(I)}$ sont ε -entrelacés pour tout $I \in \text{dom}(f)$. D'après le corollaire 1.4.4, $\chi(B)$ et $\chi(B')$ sont ε -entrelacés. Par suite $\chi(B)$ et $\chi(B')$ sont ε -entrelacés pour tout $\varepsilon > d_B(B, B')$, donc

$$d(\chi(B), \chi(B')) \leq d_B(B, B').$$

\square

1.4.7 Stabilité

Soit X un espace topologique, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ (non nécessairement continues). Soit un diagramme $F \in \mathbf{Top}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ défini par $F(a) := f^{-1}(] - \infty, a])$ pour $a \in \mathbb{R}$, et qui associe au morphisme $a \leq b$ l'inclusion correspondante $F(a) \hookrightarrow F(b)$. On définit de même le foncteur G associé à g . Soit $H : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{D}$, un foncteur quelconque (en particulier le foncteur homologie singulière à coefficients dans un corps \mathbb{F}).

Théorème 1.4.4 (Stabilité).

$$d(HF, HG) \leq \|f - g\|_\infty$$

Démonstration. Soit $\varepsilon = \|f - g\|_\infty$. On a $F(a) \subset G(a + \varepsilon)$, et $G(a) \subset F(a + \varepsilon)$, ce qui implique que F et G sont ε -entrelacés. D'après la proposition 1.4.2, HF et HG sont ε -entrelacés et on obtient l'inégalité $d(HF, HG) \leq \|f - g\|_\infty$. \square

1.4.8 Persistance étendue

On définit ici la notion de persistance étendue, pour laquelle on énonce un théorème de stabilité analogue. Soit $X \in \mathbf{Top}$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (non nécessairement continue). On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in X$. Soit $s < 0$, on définit un diagramme $F \in \mathbf{Pair}^{(\mathbb{R}, \leq)}$ (où \mathbf{Pair} désigne la catégorie des paires d'espaces topologiques) par

$$F(c) = \begin{cases} (f^{-1}(] - \infty, c]), \emptyset) & \text{si } c < M + s \\ (X, f^{-1}([2M + s - c, \infty[)) & \text{si } c \geq M + s. \end{cases}$$

En particulier, on a $F(c) = (X, \emptyset)$ lorsque $M \leq c < M + s$ et $F(M + s) = (X, f^{-1}(M))$. Lorsque $c \leq d$, on pose $F(c \leq d) = F(c) \hookrightarrow F(d)$ (i.e. l'inclusion naturelle). En effet si $c \leq d < M + s$, on a $f^{-1}(] - \infty, c]) \subset f^{-1}(] - \infty, d])$. Si $M + s \leq c \leq d$, alors $f^{-1}([2M + s - c, \infty[) \subset f^{-1}([2M + s - d, \infty[)$, et si $c < M + s \leq d$, alors $(f^{-1}(] - \infty, c]), \emptyset) \subset (X, f^{-1}([2M + s - d, \infty[))$.

Soit également $g : X \rightarrow] - \infty, M]$, on définit de même un diagramme $G \in \mathbf{Pair}^{(\mathbb{R}, \leq)}$.

Théorème 1.4.5 (Stabilité pour persistance étendue). *Soit $H : \mathbf{Pair} \rightarrow \mathbf{D}$ un foncteur (en particulier un foncteur homologie à coefficients dans un corps \mathbb{F}). On a alors l'inégalité*

$$d(HF, HG) \leq \|f - g\|_\infty.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon = \|f - g\|_\infty$ et $c \in \mathbb{R}$. On montre que F et G sont ε -entrelacés. En effet, on a par hypothèse les inégalités

$$\begin{aligned} (f^{-1}(] - \infty, c]), \emptyset) &\subset (g^{-1}(] - \infty, c + \varepsilon]), \emptyset) \\ (X, f^{-1}([2M + s - c, \infty[)) &\subset (X, g^{-1}([2M + s - (c + \varepsilon), \infty[)) \\ f^{-1}(] - \infty, c]), \emptyset) &\subset (X, g^{-1}([2M + s - (c + \varepsilon), \infty[)). \end{aligned}$$

On obtient bien sûr les mêmes relations en échangeant les rôles de f et g , ce qui implique que F et G sont ε -entrelacés. D'après la proposition 1.4.2, cela implique que HF et HG sont ε -entrelacés, d'où $d(HF, HG) \leq d(F, G) \leq \varepsilon$. \square

Chapitre 2

Application à l'analyse musicale

2.1 Modélisation

2.1.1 Structure des fichiers MIDI

Les fichiers MIDI utilisés sont obtenus par l'exportation depuis le logiciel libre MuseScore¹. Trois formats existent : le format 0 correspond à une unique piste contenant les messages, le format 1 correspond à plusieurs pistes jouées simultanément, tandis que le format 2, rarement utilisé, correspond à des pistes jouées séquentiellement. On considérera uniquement des fichiers de format 1. Les fichiers seront traités sur Python avec la librairie Mido². Comme le montre l'exemple ci-dessous,

```
MidiTrack([\n  MetaMessage('track_name', name='Piano\\x00', time=0),\n  MetaMessage('time_signature', numerator=3, denominator=4, clocks_per_click=24, notated_32nd_notes_per_beat=8, time=0),\n  MetaMessage('key_signature', key='G', time=0),\n  MetaMessage('set_tempo', tempo=789474, time=0),\n  Message('control_change', channel=0, control=121, value=0, time=0),\n  Message('program_change', channel=0, program=0, time=0),\n  Message('control_change', channel=0, control=7, value=100, time=0),\n  Message('control_change', channel=0, control=10, value=64, time=0),\n  Message('control_change', channel=0, control=91, value=0, time=0),\n  Message('control_change', channel=0, control=93, value=0, time=0),\n  MetaMessage('midi_port', port=0, time=0),\n  Message('note_on', channel=0, note=67, velocity=64, time=960),\n  Message('note_on', channel=0, note=67, velocity=0, time=455),\n  Message('note_on', channel=0, note=67, velocity=64, time=25),\n  Message('note_on', channel=0, note=67, velocity=0, time=911),\n  Message('note_on', channel=0, note=74, velocity=64, time=49),\n  Message('note_on', channel=0, note=74, velocity=0, time=455),\n  Message('note_on', channel=0, note=71, velocity=64, time=25),\n  Message('note_on', channel=0, note=71, velocity=0, time=683),\n  Message('note_on', channel=0, note=69, velocity=64, time=37),\n  Message('note_on', channel=0, note=69, velocity=0, time=227),\n])
```

FIGURE 2.1 – Exemple d'en-tête et de messages MIDI

les fichiers MIDI obtenus par exportation depuis MuseScore emploient uniquement des messages "note_on". La durée d'une note est gérée par la gestion de la vélocité (ou nuance) : ainsi un message "note_off" sera remplacé par une vélocité nulle. Notons également que ces messages de vélocité nulle possèdent également une durée strictement positive (d'ordre négligeable) dont la valeur doit être prise en compte pour le calcul exact des temps d'attaques.

On doit maintenant construire un complexe simplicial filtré à partir d'un fichier MIDI. La première étape consiste à définir un nuage de point. On considérera des points de la forme $p = (n, t, d) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ où n désigne la classe de hauteur, t le temps d'attaque et d la durée. Afin de mieux cerner l'identification de la gamme tempérée à N demi-tons au groupe additif $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, on explique dans la section suivante les implications algébriques et musicales d'un tel formalisme.

1. MuseScore, version 3.6.2

2. Mido - MIDI Objects for Python, version 1.2.10.

2.1.2 Formalisation par la théorie des groupes

On identifie l'échelle chromatique tempérée³ au groupe additif $\mathbb{Z}_{12} := \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Ainsi on considérera deux notes à des octaves différentes comme égales, de même que les enharmoniques⁴. Un accord est un sous-ensemble de \mathbb{Z}_{12} . On note $\mathbb{A} := \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$ l'ensemble des accords. C'est un ensemble fini à $2^{12} = 4096$ éléments. On procède à des identifications en faisant agir différents groupes sur \mathbb{A} . On utilisera en outre la formule de Burnside

Lemme 2.1.1. *Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X , alors le nombre d'orbites est égal à*

$$\omega = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \# \text{Fix}(g).$$

Action par translation

On définit l'action du groupe additif \mathbb{Z}_{12} sur \mathbb{A} par $(g, \{x_1, \dots, x_p\}) \mapsto \{x_1 + g, \dots, x_p + g\}$. D'après le lemme de Burnside, il y a $\frac{1}{12} \sum_{g \in \mathbb{Z}_{12}} \# \text{Fix}(g)$ orbites distinctes pour cette action. En remarquant que $\# \text{Fix}(g) = 2^{g \wedge 12}$, on voit qu'il y a 352 classes d'équivalence pour cette action.

Interprétation : cette identification correspond naturellement à la notion musicale de transposition. Par exemple, l'accord parfait majeur *do, mi, sol* sera identifié à son transposé d'un ton supérieur, à savoir *ré, fa#, la*. Un accord (à transposition près) sera donc formalisé par l'orbite d'un sous-ensemble de \mathbb{Z}_{12} pour l'action par translation.

Action du groupe Diédral

On note D_{12} le groupe diédral d'ordre 24. C'est le groupe des symétries d'un dodécagone (polygone régulier à 12 côtés). On peut le voir comme le produit semi-direct $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$. Si on note $\mathbb{Z}_n = \langle \tau \rangle$ et $\mathbb{Z}_2 = \langle \sigma \rangle$ alors une présentation de D_{12} est donnée par

$$\langle \sigma, \tau \mid \sigma^2, \tau^n, \sigma\tau\sigma^{-1}\tau \rangle.$$

On définit l'action suivante de D_{12} sur \mathbb{A}

$$(s, t) \cdot \{n_1, \dots, n_k\} \mapsto \{sn_1 + t, \dots, sn_k + t\}.$$

Calcul du nombre de classes d'équivalences pour l'action de D_{12} sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$. On calcule les valeurs de $\# \text{Fix}(s, t)$ pour tout $(s, t) \in D_{12}$. On trouve $\sum_{(s,t) \in D_{12}} \# \text{Fix}(s, t) = 5376$, ce qui montre qu'il y a un total de $\frac{5376}{24} = 224$ classes d'équivalences.

On considère désormais l'action du groupe diédral d'ordre 24 sous le prisme des transformations musicales usuelles que sont la transposition et l'inversion. On note ainsi

$$T_n : x \in \mathbb{Z}_{12} \mapsto x + n \in \mathbb{Z}_{12}$$

et

$$I_n : x \in \mathbb{Z}_{12} \mapsto -x + n \in \mathbb{Z}_{12}$$

les fonctions *transposition* par un intervalle n et *inversion* selon un intervalle n . On pourra avec profit représenter ces transformations sur une échelle musicale circulaire. La transposition T_1 correspond à une rotation d'angle $\frac{2\pi}{12}$ tandis que l'inversion I_0 correspond à une symétrie d'axe 0 – 6. En remarquant qu'on a de plus les relations $(T_1)^n = T_n$ et $T_n \circ I_0 = I_n$, on constate que les 12 transpositions et les 12 inversions forment le groupe diédral d'ordre 24. On a en outre les relations

$$T_m \circ T_n = T_{m+n} \pmod{12} \tag{2.1}$$

$$T_m \circ I_n = I_{m+n} \pmod{12} \tag{2.2}$$

$$I_m \circ T_n = I_{m-n} \pmod{12} \tag{2.3}$$

$$I_m \circ I_n = T_{m-n} \pmod{12} \tag{2.4}$$

3. L'octave étant établie comme un rapport de fréquence (2 : 1). En tempérament égal, on la partage en douze demi-tons de même rapport $2^{\frac{1}{12}}$.

4. Cela correspond à la dénomination *usuelle* $do, do\# = réb, ré, ré\# = mi\flat, fa, \dots$ ou encore $C, C\# = D\flat, D, \dots$ en notation anglo-saxonne

Ce groupe sera aussi appelé *groupe T/I* . On étudie l'action de ce groupe sur l'ensemble \mathcal{S} des triades⁵ majeures et mineures.

Proposition 2.1.1. *L'action du groupe T/I est simplement transitive.*

Démonstration. Les 12 triades majeures sont obtenues par les transpositions de l'accord (de do majeur) $C := (0, 4, 7)$ tandis que les 12 triades mineures sont obtenues par les inversions de ce même accord (en particulier, $I_0(C) = f$ en notant $f := (0, 8, 5)$ un accord de fa mineur). Si A est une triade et g, h sont deux éléments du groupe T/I tels que $gA = hA$, alors $h^{-1}gA = A$. D'après la relation orbite-stabilisateur, $\#(\text{groupe } T/I) = \#\text{Stab}(A) \cdot \#\text{Orb}(A)$. Or $\#\text{Orb}(A) = \#(\text{groupe } T/I) = 24$, on en déduit que le stabilisateur est trivial et que $g = h$. \square

2.1.3 transformations PLR

Les théories néo-Riemanniennes ont été notamment initiées par David Lewin. Elles étudient les transformations PLR dans une optique d'analyse musicale. Le groupe PLR est défini comme un sous-groupe du groupe symétrique de l'ensemble \mathcal{S} . Ce groupe est isomorphe à D_{12} . On considère les fonctions $P, L, R : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ définies par

$$P(n_1, n_2, n_3) = I_{n_1+n_3}(n_1, n_2, n_2) \quad (2.5)$$

$$L(n_1, n_2, n_3) = I_{n_2+n_3}(n_1, n_2, n_2) \quad (2.6)$$

$$R(n_1, n_2, n_3) = I_{n_1+n_2}(n_1, n_2, n_2) \quad (2.7)$$

Remarquons que les axes d'inversion sont dépendants des triades en variable. Pour cette raison, les fonctions P, L , et R sont dites « contextuelles ». On a les interprétations suivantes

- La transformation P (*Parallel*) envoie une triade majeure sur une triade mineure et *vice versa*.
- La transformation L (*Leading-tone*) envoie une triade majeur sur la triade mineure obtenue en abaissant la note fondamentale d'un demi-ton.
- La transformation R (*Relative*) envoie une triade majeure sur sa triade mineure relative.

On vérifie que les transformations P, L, R sont bijectives, qu'elles génèrent un groupe, appelé groupe PLR ou groupe néo-Riemannien⁶

Proposition 2.1.2. *On a les relations $PT_1 = T_1P$, $LT_1 = T_1L$ et $RT_1 = T_1R$.*

Proposition 2.1.3. *Le groupe PLR est généré par L et R et est diédral d'ordre 24.*

Démonstration. En appliquant R et L successivement à l'accord $C := \{0, 4, 7\}$, on obtient les accords

$$C, a, F, d, Bb, g, Eb, c, Ab, f, Db, bb, Gb, eb, B, g\#, E, c\#, E, c\#, A, f\#, D, b, G, e, C.$$

Cela montre que les 24 bijections $R, LR, R(LR), \dots, R(LR)^{11}, (LR)^{12}$ sont distinctes, et que le groupe PLR a au moins 24 éléments, et que LR est d'ordre 12. De plus, $P = R(LR)^3$ puisque $R(LR)^3$ est un élément d'ordre 2 qui commute avec T_1 . Le groupe PLR est donc généré par L et R . On pose $s = LR$ et $t = L$, alors $s^{12} = 1$ et $t^2 = 1$. On a $tst = L(LR)L = RL = s^{-1}$. Montrons que PLR est exactement d'ordre 24. Le groupe PLR est contenu dans le centralisateur $C(T/I)$ du groupe T/I dans $\mathfrak{S}_{\mathcal{S}} \sim \mathfrak{S}_{24}$. Tout élément de PLR commute avec tout élément de T/I . Pour tout élément $y \in \mathcal{S}$, le stabilisateur de y pour l'action de $C(T/I)$ contient seulement l'identité. Supposons que h est dans $C(T/I)$ et fixe y , si $g \in T/I$, alors $hy = h, ghY = gY, hgY = gY$. Comme le groupe T/I agit simplement transitivement, tout Y' de \mathcal{S} est de la forme gY pour un certain g , ce qui implique que h est la fonction identité de \mathcal{S} . D'après la relation orbite stabilisateur, $\frac{\#C(T/I)}{\#C(T/I)_y} = \#\{\text{orbite de } Y\} \leq \#\mathcal{S} \leq 24$. Comme le groupe PLR est un sous-groupe de $C(T/I)$, on a en particulier $\#\{\text{groupe } PLR\} \leq \#C(T/I) \leq 24$. \square

Corollaire 2.1.1. *Le groupe PLR agit simplement transitivement sur l'ensemble \mathcal{S} .*

Démonstration. Cela résulte de la relation orbite-stabilisateur, en considérant par exemple l'orbite de C sur l'action susdite. \square

Représentations graphiques Le Tonnetz⁷ de Riemann est une représentation géométrique du groupe PLR . Les sommets du graphe sont les classes de hauteurs ($C, G\#, A, \text{etc}$), chaque face représentant une triade majeur ou mineure. On retrouve le cycle des quintes (axe horizontal) et le cycle des tierces majeures et mineures (axes diagonaux), qui induisent une double périodicité du Tonnetz. On obtient par recollement un tore. Les fonctions P, L, R permettent de naviguer d'un triangle à ses triangles adjacents.

5. ensemble de trois notes jouées simultanément

6. Hugo Riemann, théoricien de la musique.

7. De l'allemand « réseau de sons »

Dualité entre les groupes PLR et T/I

On note toujours \mathcal{S} l'ensemble des triades majeures et mineures.

Théorème 2.1.1. *Les groupes PLR et T/I sont duaux dans le sens suivant : ils agissent simplement transitivement sur \mathcal{S} , et chacun est le centralisateur de l'autre dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{\mathcal{S}} \simeq \mathfrak{S}_{24}$.*

Démonstration. On a remarqué dans la preuve précédente que les éléments du groupe PLR commutent avec ceux de T/I . Comme PLR est d'ordre 24, il est égal au centralisateur $C(T/I)$. De même le groupe T/I est d'ordre 24 et contient $C(PLR)$, d'où la deuxième égalité. \square

Ce résultat est en fait un cas particulier du théorème suivant

Théorème 2.1.2 (Cayley). *Soit G un groupe. Les groupes duaux sont exactement ceux donnés par les plongements $G \hookrightarrow \mathfrak{S}_G$ obtenus pour l'action à gauche et à droite de G sur lui-même.*

2.1.4 Généralisation des systèmes intervalliques

On peut se demander si le formalisme utilisé pour manipuler les classes de hauteur peut être généralisé à d'autres objets musicaux. David Lewin, dans [LEW07], présente un *système généralisé d'intervalles* qui modélise aussi bien des relations mélodiques, harmoniques que des rythmes. Les transpositions et inversions sont généralisées par les opérations préservant les intervalles. Du point de vue de l'homologie persistante, cela permettrait par exemple d'unifier le format des données à analyser.

Définition 2.1.1 (Generalized Interval System, GIS). Un système d'intervalles généralisé ou GIS est un triplet $(S, IVLS, \text{int})$ où S est un ensemble, $IVLS$ est un groupe, et int est une fonction $S \times S \rightarrow IVLS$ vérifiant

- A) $\forall r, s, t \in S, \text{int}(r, s) \cdot \text{int}(s, t) = \text{int}(r, t)$
- B) $\forall s \in S, \forall i \in IVLS, \exists! t \in S, \text{int}(s, t) = i$.

Remarque 2.1.1. On peut voir la notion de GIS comme une généralisation de celle d'espace affine.

Proposition 2.1.4. *On note e l'élément neutre du groupe $IVLS$. On a alors*

$$\forall (s, t) \in S \times S, \text{int}(s, s) = e, \text{int}(t, s) = \text{int}(s, t)^{-1}$$

Pour les classes de hauteur, il est usuellement convenu que la note « do » correspond à l'élément $0 \in \mathbb{Z}_{12}$. On généralise cette notion dans le cadre des GIS par l'introduction d'un élément de référence.

Définition 2.1.2. Soit $(S, IVLS, \text{int})$ un GIS a $r \in S$. On définit la fonction

$$\text{LABEL} : s \in S \mapsto \text{int}(r, s) \in IVLS$$

Dans tout ce qui suit, on a posé $L := \text{LABEL}$ pour alléger les notations.

Proposition 2.1.5. *Pour tout $r \in S$, la fonction $L : S \rightarrow IVLS$ est une bijection et*

$$\text{int}(s, t) = L(s)^{-1} \cdot L(t), \forall (s, t) \in S \times S$$

Démonstration. Soit $i \in IVLS$, il existe un unique $s \in S$ tel que $\text{int}(r, s) = i$ par définition. De plus $L(s)^{-1}L(t) = \text{int}(r, s)^{-1}\text{int}(r, t) = \text{int}(s, r)\text{int}(r, t) = \text{int}(s, t)$. \square

Remarque 2.1.2. On peut construire le quotient d'un GIS par une relation d'équivalence sur S , ainsi que le produit cartésien de deux GIS. Plus précisément soit $\text{GIS}_1 = (S_1, G_1, \text{int}_1)$ un GIS, et \mathcal{C} une relation de congruence⁸ sur le groupe G_1 . On appelle relation d'équivalence induite sur S la relation \mathcal{E} définie par $s\mathcal{E}s'$ si et seulement si $\text{int}(s, s')\mathcal{C}e$. On pose alors $S' = S/\mathcal{E}$, $G' = G/\mathcal{C}$ et on considère $\text{int}' : S' \times S' \rightarrow G'$ la fonction induite par int . On vérifie facilement que (S', G', int') définit un GIS, noté GIS_1/\mathcal{C} et appelé GIS quotient de GIS_1

Si $\text{GIS}_2 = (S_2, G_2, \text{int}_2)$ est un autre GIS, on définit le produit direct $\text{GIS}_1 \times \text{GIS}_2 = (S_1 \times S_2, G_1 \times G_2, \text{int}_1 \times \text{int}_2)$ et on vérifie que cela définit bien un GIS.

Définition 2.1.3 (Transposition). Soit $(S, IVLS, \text{int})$ un GIS et $i \in IVLS$. On définit l'application $T_i : S \rightarrow S$ ainsi : pour $s \in S$, $T_i(s)$ est l'unique élément de S tel que $\text{int}(s, T_i(s)) = i$.

8. On appelle relation de congruence sur un groupe G une relation d'équivalence \mathcal{R} compatible avec la loi de groupe, i.e., si $x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{R}y'$, alors $xy\mathcal{R}x'y'$.

Proposition 2.1.6. *Pour tout $i \in IVLS$, la transposition T_i est une bijection vérifiant la relation $T_i T_j = T_{ji}$ pour tout $j \in IVLS$. L'ensemble des transpositions $\{T_i\}_{i \in IVLS}$ forme un groupe isomorphe à $IVLS$. Si on fixe de plus un élément de référence $r \in S$, on a*

$$L(T_i(s)) = L(s) \cdot i.$$

Démonstration. On a $L(T_i(s)) = \text{int}(r, T_i(s)) = \text{int}(r, s) \text{int}(s, T_i(s)) = L(s) \cdot i$. □

De même on définit pour une transformation P_i correspondant à la multiplication à gauche.

Définition 2.1.4. Soit $r \in S$ un élément de référence, $i \in IVLS$. On définit la transformation $P_i : S \rightarrow S$ ainsi : pour $s \in S$, $P_i(s)$ est l'unique élément vérifiant $L(P_i(s)) = i \cdot L(s)$, autrement dit, tel que

$$\text{int}(r, P_i(s)) = i \cdot \text{int}(r, s).$$

On obtient un résultat similaire à la proposition 2.1.6

Proposition 2.1.7. *Pour tout $i \in IVLS$, la transformation P_i est une bijection vérifiant la relation $P_i P_j = P_{ij}$ pour tout $j \in IVLS$. L'ensemble des transformations $\{P_i\}_{i \in IVLS}$ forme un groupe isomorphe à $IVLS$.*

On définit alors les opérations préservant les intervalles, propriété que vérifient les transformations P_i .

Définition 2.1.5 (Préservation des intervalles). Soit $(S, IVLS, \text{int})$ un GIS. Une application $X : S \rightarrow S$ préserve les intervalles lorsque

$$\text{int}(X(s), X(t)) = \text{int}(s, t), \forall s, t \in S.$$

Proposition 2.1.8. *[Caractérisation des applications préservant les intervalles] Pour tout élément de référence $r \in S$, les applications préservant les intervalles sont exactement les transformations P_i .*

Démonstration. On vérifie tout d'abord que ces transformations préservent les intervalles. Soit $i \in IVLS$ et $s, t \in S$. On a

$$\begin{aligned} \text{int}(P_i(s), P_i(t)) &= L(P_i(s))^{-1} L(P_i(t)) \\ &= (i \cdot L(s))^{-1} (i \cdot L(t)) \\ &= L(s)^{-1} L(t) \\ &= \text{int}(s, t). \end{aligned}$$

Soit à présent $X : S \rightarrow S$ une application préservant les intervalles. On pose $i = L(X(r)) = \text{int}(r, X(r))$ et on vérifie que $X = P_i$. □

Théorème 2.1.3. *Soit $i \in IVLS$, les assertions suivantes sont équivalentes*

- i) T_i préserve les intervalles,*
- ii) Il existe $r \in S$ tel que $T_i = P_i$,*
- iii) Pour tout $r \in S$, on a $T_i = P_i$,*
- iv) i est dans le centralisateur de $IVLS$.*

Démonstration. On montre que $i) \Rightarrow iii) \Rightarrow ii) \Rightarrow iv) \Rightarrow i)$. Supposons que T_i préserve les intervalles, et soit $r \in S$. D'après la proposition 2.1.8, il existe j tel que $T_i = P_j$. Soit $s \in S$, on a $L(s) \cdot i = L(T_i(s)) = L(P_j(s)) = j \cdot L(s)$. En prenant $s = r$, on voit que $i = j$. Il est clair que $iii) \Rightarrow ii)$. Supposons $ii)$, et soit $j \in IVLS$, il existe un unique s tel que $L(s) = \text{int}(r, s) = j$. Le calcul précédent montre que $ij = ji$. Enfin supposons $iv)$, et soient $s, t \in S$. On a

$$\begin{aligned} \text{int}(T_i(s), T_i(t)) &= L(T_i(s))^{-1} L(T_i(t)) \\ &= (L(s) \cdot i)^{-1} (L(t) \cdot i) \\ &= i^{-1} \cdot (L^{-1} L(t)) \cdot i \\ &= i^{-1} \cdot \text{int}(s, t) \cdot i \\ &= \text{int}(s, t). \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.1.2. *Dans un GIS commutatif, les transpositions sont exactement les applications préservant les intervalles.*

Dans un GIS non commutatif, il existe des transpositions ne préservant pas les intervalles, de même qu'il existe des applications préservant les intervalles qui ne sont pas des transpositions.

Proposition 2.1.9 (Commutativité). *Les transpositions commutent avec les applications préservant les intervalles.*

Démonstration. On fixe un élément de référence $r \in S$. Soient $i, j \in \text{IVLS}$ et $s \in S$. On a $L(P_j(T_i(s))) = j \cdot L(T_i(s)) = j \cdot L(s) \cdot i = L(P_j(s)) \cdot i = L(T_i(P_j(s)))$, d'où $P_j T_i = T_i P_j$. \square

On étudie désormais la généralisation de la notion d'inversion.

Définition 2.1.6 (inversion). Soient $u, v \in S$, on définit l'inversion de u/v ainsi : pour $s \in S$, $I_u^v(s)$ est l'unique élément de S tel que

$$\text{int}(v, I_u^v(s)) = \text{int}(s, u).$$

Proposition 2.1.10 (Formule d'inversion). *Soit $r \in S$ un élément de référence fixé. On pose $i = L(u)$ et $j = L(v)$. On a alors*

$$L(I_u^v(s)) = i \cdot L(s)^{-1} \cdot j.$$

Démonstration. Soit $s \in S$. Au vu de la définition, on a $L^{-1}L(I_u^v(s)) = L(s)^{-1}L(u)$, d'où le résultat. \square

Proposition 2.1.11 (Égalité des inversions). *Soient $u, v, w, x \in S$. On a l'égalité $I_u^v = I_x^w$ si et seulement si $w = I_u^v(x)$ et $\text{int}(x, u)$ est dans le centralisateur de IVLS.*

Démonstration. On fixe un élément de référence $r \in S$ et on note i, j, k et m les labels respectifs de v, u, w et x . Supposons que $I_u^v = I_x^w$. D'après la proposition 2.1.10, on a $i \cdot L(s)^{-1} \cdot j = k \cdot L(s)^{-1} \cdot m$, ce qui revient à dire que $inj = knm$ pour tout $n \in \text{IVLS}$, ou encore

$$cn = nc, \forall n \in \text{IVLS},$$

où l'on a posé $c := k^{-1}i = mj^{-1}$ (prendre $n = e$). L'élément c est central et on a $c = j^{-1}m = \text{int}(x, u)$. Par ailleurs $L(I_u^v(x)) = im^{-1}j = ic^{-1} = c^{-1}i = (m^{-1}j)i = (ki^{-1})i = k$, d'où $I_u^v(x) = w$.

Réciproquement, supposons que $w = I_u^v(x)$ et que $\text{int}(x, u) = j^{-1}m$ est un élément central. La première hypothèse implique $k^{-1}i = j^{-1}m$ tandis que $j^{-1}m = mj^{-1} =: c$ ce qui est équivalent à $I_u^v = I_x^w$ d'après le sens direct. \square

Corollaire 2.1.3. *Soient $u, v \in S$, on a l'équivalence $I_u^v = I_v^u$ si et seulement si $\text{int}(v, u)$ est central.*

Corollaire 2.1.4 (Cas commutatif). *On suppose le GIS commutatif. Soit $u, v, w, x \in S$. On a toujours $I_u^v = I_v^u$ et $I_u^v = I_x^v$ si et seulement si $w = I_u^v(x)$.*

Proposition 2.1.12. *On considère T_n une transposition et I_u^v une inversion. On a*

- $T_n I_u^v = I_x^v$ où $x = T_n(u)$,
- $I_u^v T_n$ où $w = T_n^{-1}(v)$,
- T_n commute avec I_u^v si et seulement si n est central et $n^2 = e$.

Démonstration. On fixe un élément de référence $r \in S$ et on note i et j les labels de v et u respectivement. Il vient

$$L(T_n I_u^v(s)) = L(I_u^v(s)) \cdot n = i \cdot L(s)^{-1} \cdot jn = L(I_x^v(s)), \forall s \in S.$$

De même,

$$L(I_u^v T_n(s)) = i \cdot L(T_n(s))^{-1} \cdot j = i(L(s) \cdot n)^{-1} \cdot j = L(I_u^w(s)), \forall s \in S.$$

On a utilisé le fait que $L(w) = in^{-1}$. Pour le troisième point, on a les équivalences T_n commute avec I_u^v si et seulement si $I_x^v = I_n^w$ où $x = T_n(u)$ et $w = T_n^{-1}(v)$, ce qui équivaut d'après la proposition 2.1.11 à $w = I_x^v(u)$ i.e. $in = in^{-1}$ ou encore $n^2 = e$, et $n = \text{int}(u, x)$ est central. \square

Proposition 2.1.13. *L'inverse de I_v^u est l'opération I_u^v .*

Démonstration. On a $L(I_u^v(I_v^u(s))) = j \cdot (L(I_v^u(s)))^{-1} \cdot i = j \cdot (i \cdot L(s) \cdot j)^{-1} \cdot i = L(s)$ pour tout $s \in S$. \square

Exemple 2.1.1. On présente désormais quelques exemples musicaux concrets dans le cadre du formalisme de David Lewin.

- On considère S l'ensemble des hauteurs obtenues par intonation juste depuis une note fixée⁹, G le sous-groupe de \mathbb{Q}^* défini par $G := \{2^a 3^b 5^c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$, et $\text{int} : S \times S \rightarrow G$ l'application définie ainsi : $\text{int}(s, t)$ est égal au rapport de la fréquence fondamentale de t sur celle de s , pour tout $s, t \in S$. Le triplet (S, G, int) définit un GIS dont le quotient par la relation d'équivalence $s \sim t \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z} \text{int}(s, t) = 2^a$ définit un GIS appelé espace harmonique modulaire.

9. i.e. les fréquences obtenues par un rapport de tierce majeure juste, de quinte juste ou d'octave juste, ce qui correspond aux premières harmoniques naturelles.

- Soient $S_1 = \mathbb{Z}_{12}$, $G_1 = \mathbb{Z}_{12}$ et $\delta_1 : (p, q) \in S_1 \times S_1 \mapsto q - p \in G_1$ d'une part, et soient $S_2 = \mathbb{Z} = G_2$, et $\delta_2 : (s, t) \in S_2 \times S_2 \mapsto t - s \in G_2$ d'autre part. Les triplets $\mathcal{G}_1 := (S_1, G_1, \delta_1)$ et $\mathcal{G}_2 := (S_2, G_2, \delta_2)$ définissent des GIS, vus respectivement comme l'échelle chromatique en tempérament égal à 12 demi-tons et une échelle de temps. Le produit direct $\mathcal{G} := \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ définit un GIS. Dans [LEW07], David Lewin analyse notamment des extraits des *Variations op.27 pour piano* de Webern¹⁰.

2.1.5 Construction d'un nuage de points

Soient X et Y deux sous ensembles non vides d'un espace métrique (M, d) . On note d_H la distance de Hausdorff entre X et Y , définie par

$$d_H(X, Y) := \max \left\{ \sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X) \right\}$$

où $d(x, Y) := \inf_{y \in Y} d(x, y)$.

Chaque mesure (musicale) est vue comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_{12}$ (un triplet étant la donnée d'une note, caractérisée par ses coordonnées : position, durée et hauteur). Un morceau est un ensemble de mesures $\mathcal{S} := \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n\}$. On définit la distance de Hausdorff d_H entre deux mesures \mathcal{B}_i et \mathcal{B}_j par

$$d_H(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j) := \max \left\{ \max_{n_i \in \mathcal{B}_i} \min_{n_k \in \mathcal{B}_j} d_1(n_i, n_k), \max_{n_j \in \mathcal{B}_j} \min_{n_i \in \mathcal{B}_i} d_1(n_j, n_i) \right\}$$

où d_1 est la distance induite par la norme $\|\cdot\|_1$. On pose $d_{max} := \max_{i,j} d_H(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)$ et on pose $\rho = d_{max}/100$ la précision. Pour $t \in \{0, \dots, 100\}$, on construit le complexe de Vietoris-Rips $VR(\mathcal{S})(t\rho)$. On parlera de marge d'erreur de $t\%$ plutôt que de temps de filtration t .

Il faut également choisir le format des données. Rappelons que nous faisons le choix de considérer des points de la forme $p = (n, t, d) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ où n désigne la classe de hauteur, t le temps d'attaque et d la durée. Sur \mathbb{Z}_{12} , un choix de distance à priori pertinent est le suivant. Pour $x, y \in \mathbb{Z}_{12}$, on pose

$$d_{12}(x, y) := \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - y + 12k| = \min\{|x - y|, |x - y + 12|\}.$$

Dans les faits, nos fichiers MIDI vérifient de plus $t, d \in \mathbb{N}^*$. On considérera donc un nuage de points

$$\mathfrak{N} := \{p_i\}_{i \in I} = \{(n_i, t_i, d_i)\}_{i \in I} \subset \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*.$$

2.1.6 Analyse des code-barres

Afin d'exploiter les résultats, on utilisera une distance bien choisie sur les diagrammes de persistance ou les code-barres obtenus.

Définition 2.1.7 (Diagramme de persistance). Un diagramme de persistance est une union d'un sous-ensemble fini de points de $\overline{\mathbb{R}^2}$ avec l'ensemble des points de la diagonale $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

On considère deux diagrammes de persistance X et Y , sur lesquels on définit les distances suivantes.

Définition 2.1.8 (Distance de Wasserstein). Soit $p \in [1; +\infty]$, la distance de Wasserstein d'ordre p entre X et Y est définie par

$$W_p[d](X, Y) := \inf_{\varphi: X \rightarrow Y} \left[\sum_{x \in X} d(x, \varphi(x))^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

si $p \neq \infty$ et par

$$W_\infty[d](X, Y) := \inf_{\varphi: X \rightarrow Y} \sup_{x \in X} d(x, \varphi(x))$$

où φ est une bijection entre X et Y .

On appelle distance de Bottleneck la distance $W_\infty[L_\infty]$.

10. Anton Webern (1883-1945), compositeur et chef d'orchestre autrichien membre de la seconde école de Vienne.

2.1.7 Résultats

Dans un premier temps, nous avons déterminé une filtration de Vietoris-Rips à partir de notre nuage de points \mathfrak{N} vu comme un sous-ensemble d'un espace euclidien. Les résultats obtenus dans ce cadre étaient peu satisfaisant.

L'approche finalement adoptée est la suivante : plutôt qu'un nuage de points, on construit les complexes de Vietoris-Rips à partir d'une matrice de *distances* à définir. On construit sur $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ une « pré-métrique ¹¹ » ainsi : pour $x = (n, t, d)$ et $y = (n', t', d')$, on pose

$$\delta(x, y) = \sqrt{d_{12}(n, n')^2 + \varepsilon(x, y)^2}$$

où $\varepsilon(x, y)$ est une fonction dépendant des variables temporelles et d'un paramètre $\tau > 0$. En notant $I_x = [t, t + d]$ et $I_y = [t', t' + d']$, on prend

$$\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\tau} |[\min\{\sup I_x, \sup I_y\}, \max\{\inf I_x, \inf I_y\}]|.$$

Nous utilisons une base de données MIDI libre comprenant des œuvres de Johann Sebastian Bach (1685-1750), Frédéric Chopin (1810-1849), Claude Debussy (1862-1918), Igor Stravinsky (1882-1971) et Arnold Schönberg (1874-1951). Cette base de donnée regroupe environ 150 fichiers MIDI de styles différents, et est disponible à l'adresse <https://math-musique.pages.math.unistra.fr/>.

En ce qui concerne l'homologie persistante, nous employons la librairie `Gudhi` ¹² sur Python. Enfin, nous prenons la distance de Wasserstein d'ordre $p = 1$ pour l'analyse des diagrammes obtenus.

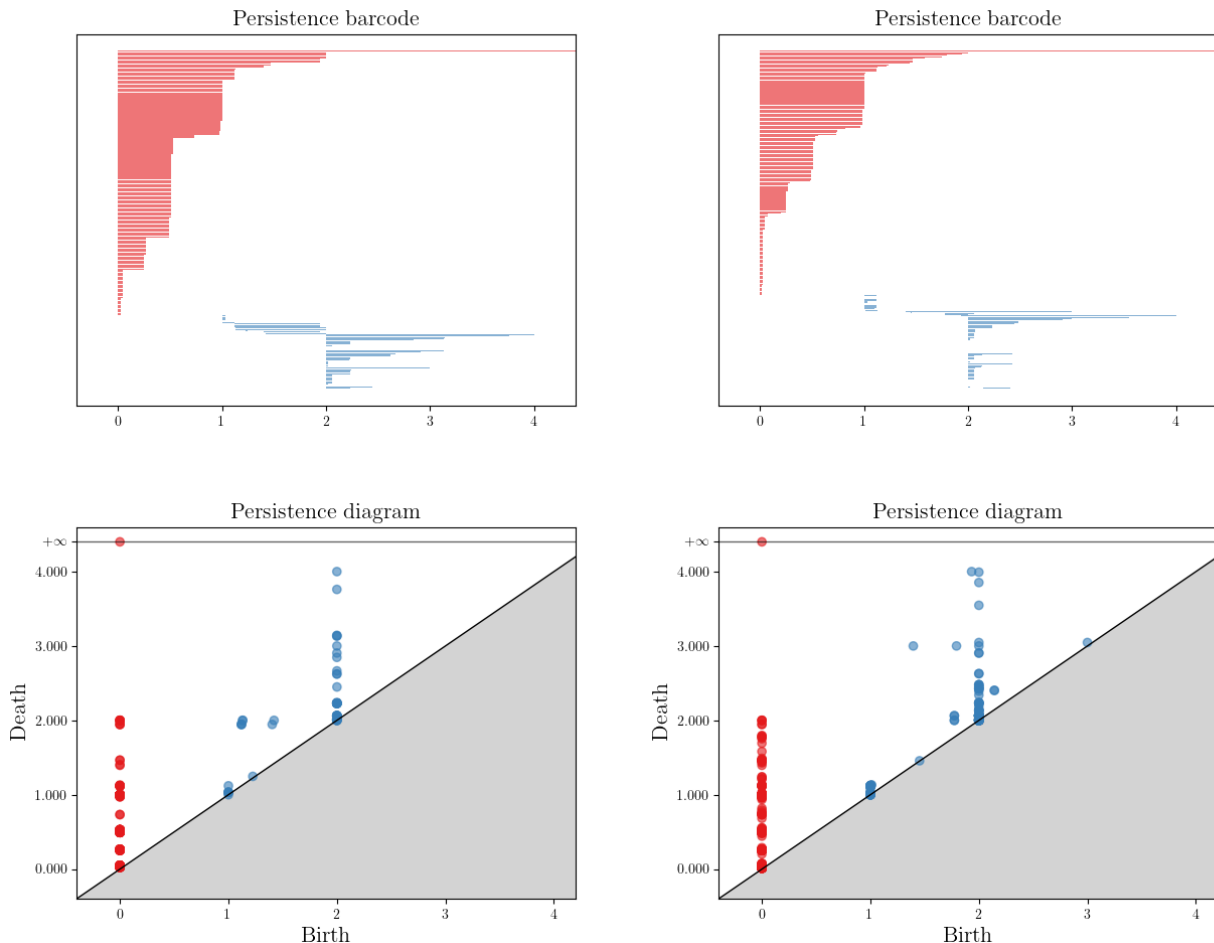


FIGURE 2.2 – Deux code-barres de chorals de Bach (BWV687 et BWV47) et leur diagramme de persistance correspondant.

11. *i.e.* vérifiant $\delta(x, x) = 0$ et $\delta(x, y) = \delta(y, x) > 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. En particulier on voit que δ ne vérifie pas l'inégalité triangulaire en considérant le paramètre $\tau = 1$, et les points $(0, 0, 1)$, $(1, 2, 3)$ et $(0, 0, 3)$.

12. Librairie open source C++, avec une interface Python, destinée à l'analyse topologique de données et la géométrie en haute dimension. <https://gudhi.inria.fr/>, version 3.8.0

Nous limitons les calculs de l'homologie en dimensions 0 et 1, qui correspondent respectivement aux données en rouge et en bleu sur les représentations ci-dessus. Les résultats sur la base de donnée MIDI sont présentés sous la forme d'une matrice de corrélation des distance de Wasserstein calculées sur les diagrammes de persistance.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1		61	30	17	33	24	16	20	23	22	29	41	59	27	26	67	41	331	335	172	205	280	210	63
2			82	58	50	65	55	59	68	69	49	95	19	54	61	51	67	279	301	120	151	226	181	35
3				34	49	35	39	33	33	23	46	21	79	36	34	84	41	356	381	194	227	305	224	80
4					32	22	21	17	18	21	24	42	63	32	26	67	50	330	354	170	202	277	217	68
5						27	35	26	32	35	16	60	61	32	25	50	53	315	338	156	186	263	201	61
6							31	17	13	20	26	41	74	34	15	67	52	336	359	176	207	285	210	70
7								22	30	27	32	49	54	25	28	68	37	324	349	162	196	272	214	65
8									19	17	20	40	62	28	15	66	48	333	357	172	204	281	207	62
9										20	29	36	74	37	21	75	56	342	366	181	212	289	214	71
10											29	31	71	25	17	72	44	343	367	181	215	291	212	69
11												55	57	33	21	55	54	317	341	160	191	265	205	60
12													91	46	42	96	53	369	394	206	241	317	236	91
13														56	66	61	66	281	304	123	155	229	181	36
14															24	60	30	327	351	165	199	275	204	57
15																62	45	333	357	172	204	282	204	63
16																	75	290	318	127	155	252	206	62
17																		325	349	161	195	270	220	71
18																			66	180	159	104	228	289
19																				207	187	121	246	312
20																					58	140	197	131
21																						142	204	161
22																							197	237
23																								167
24																								

Légende :

- J.S.Bach ; n°1 à 16 (Chorals BWV687, BWV47, BWV65, BWV184, BWV261, BWV277, BWV269, BWV347, BWV2, BWV9, BWV267, BWV281, BWV389, BWV40, BWV248, Invention n°8)
- F.Chopin ; n°17 (Ballade op.23, n°1)
- C.Debyussy ; n°18 à 22 (Arabesque n°1 et n°2, Clair de lune, Doctor Gradus ad parnassum, rêverie)
- A.Schönberg ; n°23 (Menuett op.25)
- I.Stravinsky ; n°24 (Berceuse de l'oiseau de feu)

Analyse des résultats. Nous remarquons une homogénéité des résultats en ce qui concerne les Choral de Bach. La ballade de Chopin (n°17) est plus proche des pièces de Bach que du reste des morceaux étudiés. Les œuvres de Debussy (n°18 à 22) ont une très faible corrélation avec celles de Bach, mais aussi une faible corrélation interne. On remarque également que la pièce de Stravinsky (n°24) est significativement corrélée à certains chorals de Bach. Le Menuet de Schönberg n'est corrélé à aucun des autres morceaux du corpus : on peut penser qu'on a distingué en ce sens une pièce atonale des pièces tonales ou modales. On trouvera en annexe un certain nombre de diagrammes de persistance et la représentation équivalente en code-barres.

Ses résultats partiels sont prometteurs, mais le procédé complexe que nous avons appliqué occulte la question suivante : qu'observe-t-on réellement ? Une compréhension exhaustive de la substance topologique (composantes connexes, homologie en dimension 1 et supérieure, ...) serait souhaitable afin de mieux cerner les caractéristiques musicales que nous espérons discriminer. On peut se demander si les corrélations obtenues ne sont pas biaisées par certaines propriétés du corpus choisi : style d'écriture (homophonie pour les chorals de Bach), longueur des morceaux (quelques périodes), nombre de voix (pour chœur mixte à quatre voix), etc. Une définition précise de ce que l'on entend par *style musical* serait également souhaitable. Nous pensons en ce sens que notre procédé indiquerait une faible corrélation entre une œuvre chorale et une pièce contrapuntique du même auteur. D'autres tests seraient nécessaires afin de mieux cerner ces aspects.

2.2 Quelques applications de la transformée de Fourier discrète

Motivation La transformée de Fourier discrète (TFD) est un outil abondamment employé en théorie musicale. Nous présentons dans cette dernière section ses propriétés de base ainsi que quelques applications remarquables : nous étudions quelques résultats mathémusicaux autour de la TFD, en nous intéressant notamment au problème

(ouvert) de la détermination des ensembles non trivialement homométriques. Des travaux récents¹³ suggèrent en effet l'utilisation de la la TFD dans le cadre de l'homologie persistante appliquée à l'analyse musicale.

2.2.1 Le théorème de Babbitt

David Lewin, dans [LEW07], introduit les fonctions et les contenus intervalliques d'accords.

Définition 2.2.1 (Contenu intervallique). Soit $A \subset \mathbb{Z}_{12}$, le contenu intervallique de A est l'ensemble de tous les intervalles des notes de A , comptés avec leurs multiplicités. Formellement, on définit la fonction contenu intervallique I_A par

$$I_A : k \in \mathbb{Z} \mapsto \#\{(i, j) \in A \times A \mid i - j = k\}$$

Lorsque $B \subset \mathbb{Z}_n$ est un autre sous-ensemble, on définit aussi la fonction intervallique entre A et B par

$$\text{ifunc}_{A,B} : k \in \mathbb{Z} \mapsto \#\{(i, j) \in A \times B \mid i - j = k\}.$$

Dans cette section on présente une démonstration du théorème suivant

Théorème 2.2.1 (Théorème de l'Hexacorde). Soit H un hexacorde (i.e. un sous-ensemble de 6 notes de \mathbb{Z}_{12}), alors H et son complémentaire \overline{H} possèdent le même contenu intervallique.

Le musicologue Milton Babbitt (1916-2011) a découvert expérimentalement ce résultat en 1955. La démonstration présentée ici repose sur une idée du compositeur et théoricien de la musique David Lewin (1933-2003).

Démonstration. On voit facilement que

Lemme 2.2.1. Soit $\mathbb{1}_A$ la fonction caractéristique d'un ensemble $A \subset \mathbb{Z}_{12}$. On a $I_A = \mathbb{1}_A \star \mathbb{1}_A^*$ où $\mathbb{1}_A^*(k) = \mathbb{1}_A(-k)$

ce qui invite à appliquer une transformée de Fourier discrète. On note $\mathcal{F}(f)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{12}} f(k) e^{ikt\pi/6}$ la TFD d'une fonction $f : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{C}$. On a alors d'une part

$$\mathcal{F}(I_H) = \mathcal{F}(\mathbb{1}_H)(t) \times \mathcal{F}(\mathbb{1}_{\overline{H}})(-t) = \mathcal{F}_H(t) \times \overline{\mathcal{F}_H(t)} = |\mathcal{F}_H(t)|^2.$$

D'autre part

$$(\mathcal{F}_H + \mathcal{F}_{\overline{H}})(t) = \mathcal{F}_{H \cup \overline{H}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En combinant ces deux formules, on voit que $\mathcal{F}(I_H) = \mathcal{F}(I_{\overline{H}})$, ce qui implique que $I_H = I_{\overline{H}}$. \square

On peut se demander comment prolonger ce résultat. Une première généralisation évidente est possible dans le groupe \mathbb{Z}_n pour $n \geq 2$ pair, en considérant un accord (sous-ensemble) à $n/2$ éléments de \mathbb{Z}_n au lieu d'un hexacorde. Ce résultat de nature combinatoire a été généralisé d'un point de vue géométrique et probabiliste dans [AND20].

Définition 2.2.2 (Condition de croissance commune). Soit (\mathfrak{X}, d, μ) un espace mesuré métrique. On dit qu'il satisfait la condition de croissance commune s'il existe une fonction ρ sur $[0; +\infty[$ telle que pour tout centre $x \in \mathfrak{X}$ et pour tout rayon $r \in [0; +\infty[$, on a $\mu(B(x, r)) = \rho(r)$. Cela se reformule

$$\forall x, y \in \mathfrak{X}, \forall r \geq 0, \mu(B(x, r)) = \mu(B(y, r)).$$

Théorème 2.2.2 (Hexacorde généralisé). Soit (\mathfrak{X}, d, μ) un espace métrique probabilisé satisfaisant la condition de croissance commune. Pour tout ensemble mesurable A de mesure $\mu(A) = 1/2$, on a

$$\mu^2\{(x, y) \in A^2 \mid d(x, y) \in E\} = \mu^2\{(x, y) \in (A^c)^2 \mid d(x, y) \in E\}$$

pour tout sous-ensemble ouvert $E \subset [0; +\infty[$, où μ^2 désigne la mesure produit sur \mathfrak{X}^2 et $A^c := \mathfrak{X} \setminus A$ le complémentaire de A .

Démonstration. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathfrak{X} et de même loi μ , et $D := d(X, Y)$. Le théorème 2.2.2 se reformule alors

$$\mathbf{P}(X \in A \text{ et } Y \in A \text{ et } D \in E) = \mathbf{P}(X \in A^c \text{ et } Y \in A^c \text{ et } D \in E).$$

13. Victoria Callet, *La Transformée de Fourier Discrète au service de l'Homologie Persistante : applications à l'Analyse Musicale*, séminaire de l'IRCAM, 2022

En ajoutant le terme $\mathbf{P}(X \in A \text{ et } Y \in A^c \text{ et } D \in E)$ de part et d'autre, on voit que le théorème 2.2.2 est équivalent à

$$\mathbf{P}(X \in A \text{ et } D \in E) = \mathbf{P}(Y \in A^c \text{ et } D \in E)$$

pour tout ensemble borélien $E \subset \mathbb{R}$.

Soit alors $S \subset \mathfrak{X}$ un borélien et $r \geq 0$. On a

$$\mathbf{P}(X \in S \text{ et } D \in [0; r]) = \int \int_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}} \mathbb{1}_{\{x \in S\}} \cdot \mathbb{1}_{\{d(x,y) \leq r\}} d\mu(x) d\mu(y) \quad (2.8)$$

$$= \int_S \left(\int_{\mathfrak{X}} \right) d\mu(x) \quad (2.9)$$

$$= \int_S \mu(B(x, r)) d\mu(x) \quad (2.10)$$

$$= \mu(S) \cdot \rho(r). \quad (2.11)$$

Cela montre que X et D sont des variables aléatoires indépendantes, X étant de loi μ et D ayant pour fonction de répartition ρ . Par conséquent, $\mathbf{P}(X \in A \text{ et } D \in E) = \mathbf{P}(X \in A) \cdot \mathbf{P}(D \in E) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{P}(D \in E)$. De même, Y et D sont indépendantes et on a $\mathbf{P}(Y \in A^c \text{ et } D \in E) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{P}(D \in E)$, d'où l'égalité annoncée. \square

Lien avec le théorème de l'hexacorde On montre dans ce paragraphe dans quelle mesure on peut voir le théorème de Babbitt comme un cas particulier de ce théorème. Sur le groupe \mathbb{Z}_{12} , on définit la distance suivante (héritée de la représentation en graphe circulaire)

$$d(x, y) := \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - y + 12k| = \min\{|x - y|, |x - y + 12|\}.$$

On munit \mathbb{Z}_{12} de la mesure de comptage normalisée, *i.e.* $\mu(A) = \frac{\#A}{12}$. Le théorème 2.2.2 se reformule ainsi

$$\frac{1}{12^2} \#\{(x, y) \in A^2 \mid d(x, y) \in E\} = \frac{1}{12^2} \#\{(x, y) \in (A^c)^2 \mid d(x, y) \in E\}$$

2.2.2 Propriétés de la TFD

On définit de manière générale la transformée de Fourier discrète d'une application $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$.

Définition 2.2.3 (Transformée de Fourier discrète).

$$\mathcal{F}(f) : t \in \mathbb{Z}_n \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} f(k) e^{-\frac{2i\pi kt}{n}}.$$

Déterminons \mathcal{F}_A pour quelques sous-ensembles A de \mathbb{Z}_c . En particulier on observera la valeur de $|\mathcal{F}_A(t)|$ ($\leq \#A$) pour $t \in \mathbb{Z}_c$.

- Si $A = \mathbb{Z}_c$, on a $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_c} = c \cdot \mathbb{1}_{\{0\}}$.
- Soit $A = m\mathbb{Z}_c$ un sous-groupe de \mathbb{Z}_c , où $m := c/d$ avec d un diviseur de c . Comme A est l'unique sous-groupe de \mathbb{Z}_c d'ordre d , l'isomorphisme

$$k \pmod{d} \in \mathbb{Z}_d \mapsto km \pmod{c} \in \mathbb{Z}_c$$

permet d'écrire

$$\mathcal{F}_A(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_d} e^{-\frac{2i\pi kmt}{c}} = \sum_{k=0}^{d-1} e^{-\frac{2i\pi kt}{d}} = d \cdot \mathbb{1}_{\{\text{multiples de } d\}}(t).$$

Remarquons qu'on peut avoir $|\mathcal{F}_A(t)| = \#A$ pour $t \neq 0$ dans ce cas.

- Si A possède une périodicité interne, *i.e.* s'il existe $1 < d < c$ tel que $A + d = A$, alors on a $\mathcal{F}_A(t) = e^{-\frac{2i\pi dt}{c}} \mathcal{F}_A(t)$. En particulier si $t \in \frac{c}{d}$ alors $\mathcal{F}_A(t) = 0$.
- Une partie $A \subset \mathbb{Z}_c$ pave \mathbb{Z}_c s'il existe une partie $B \subset \mathbb{Z}_c$ telle que $\mathbb{Z}_c = A \oplus B$, ce qui est équivalent à ce que $\mathbb{1}_A \star \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_c}$. En notant $Z(\mathcal{F}_A)$ l'ensemble des zéros de la transformée de Fourier discrète de A , on voit que deux ensembles A et B pavent \mathbb{Z}_c si et seulement si $\#A \cdot \#B = c$ et $Z(\mathcal{F}_A) \cup Z(\mathcal{F}_B) = \mathbb{Z}_c \setminus \{0\}$.

Proposition 2.2.1 (Formule d'inversion). *Soit $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$, on a la formule d'inversion*

$$f(k) = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \mathcal{F}(p) e^{\frac{2ip\pi k}{n}}.$$

Démonstration. On a $\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \mathcal{F}(p) e^{\frac{2ip\pi k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} f(q) e^{-\frac{2i\pi qp}{n}} \cdot \frac{2ip\pi k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-1} f(q) e^{-\frac{2i\pi(k-q)p}{n}} = f(k)$ puisque $\sum_{p=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi(k-q)p}{n}} = 0$ dès que $(k-q)p \neq 0$. □

2.2.3 Étude de la Z -relation

Les ensembles en Z -relations (ou homométriques) sont les ensembles dont les différences définissent le même ensemble. Dans cette section, on présente l'étude théorique des ensembles en Z -relation de \mathbb{Z}_n . Ces ensembles ont été introduits par Allen Forte en 1977 dans [FOR77].

Définition 2.2.4 (Z -relation). Soit $n \geq 2$ un entier. On dit que deux sous-ensembles A et B de \mathbb{Z}_n sont en Z -relation s'ils ont le même contenu intervallique

$$AZ_n B \Leftrightarrow I_A = I_B.$$

Définition 2.2.5 (fonction de Patterson). Soit $n \geq 2$ un entier, et $A \subset \mathbb{Z}_n$. On associe à A le polynôme

$$A(x) := \sum_{a \in A} x^a \in \mathbb{Z}[x]/(x^n - 1)$$

et on définit la fonction de Patterson de A par

$$P_A(x) := A(x)A^*(x) \pmod{x^n - 1}$$

où $A^*(x) := A(x^{-1})$ désigne la réflexion de A .

Proposition 2.2.2. Soit $n \geq 2$ un entier et $A \subset \mathbb{Z}_{12}$. La fonction de Patterson de A vérifie

$$- P_A(e^{2i\pi t/n}) = \mathcal{F}_A(t) \text{ pour tout } t = 0, \dots, n-1.$$

$$- P_A(x) = \sum_{c_k \in \text{Im } I_A} c_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} I_A(k) x^k.$$

Cette dernière égalité montre en particulier que la donnée de la fonction intervallique est équivalente à celle de la fonction de Patterson.

Exemple 2.2.1. Soit $n = 12$ et $C = \{0, 4, 7\} \subset \mathbb{Z}_{12}$. On a $A(x) = 1 + x^4 + x^7$ et $P_A(x) = (1 + x^4 + x^7)(1 + x^8 + x^5) = 3 + x^3 + x^4 + x^5 + x^7 + x^8 + x^9$. Le coefficient constant correspond par exemple au nombre de notes.

Corollaire 2.2.1. Deux ensembles $A, B \in \mathbb{Z}_n$ sont homométriques si et seulement si ils ont la même fonction de Patterson.

2.3 Détermination des accords non trivialement homométriques

Une première approche consiste à calculer explicitement des représentants de l'action du groupe diédral T/I sur l'ensemble des parties de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, puis de déterminer ceux qui ont la même fonction de Patterson. Pour cela, on peut par exemple calculer les orbites de cette action.

Algorithm 3 Calcul de l'orbite d'un élément $\omega \in \Omega$ pour l'action d'un groupe G sur un ensemble Ω .

```

1: procedure ORBIT( $G, \gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \subset G, \omega \in \Omega$ )
2:    $\Delta := [\omega]$ 
3:   for  $\delta \in \Delta$  do
4:     for  $i \in \{1, \dots, m\}$  do
5:        $x := \delta^{\gamma_i}$ 
6:       if  $\gamma \notin \Delta$  then
7:         ajouter  $\gamma$  à  $\Delta$ 
   return  $\Delta$ 

```

L'ensemble γ désigne un système de générateurs de G . Dans notre cas, il suffit de prendre $\gamma = \{T, I\}$. La correction de l'algorithme est assurée par le lemme suivant

Lemme 2.3.1. Soient $G = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle, \omega \in \Omega$ et $\Delta \subset \Omega$ tels que

$$- \omega \in \Delta$$

- Pour tout $\delta \in \Delta$ et pour tout générateur γ_i , on a $\delta^{\gamma_i} \in \Delta$.
- Pour tout $\delta \in \Delta$, il existe une suite i_1, \dots, i_k telle que $\delta = (\dots (\omega^{\gamma_{i_1}})^{\gamma_{i_2}} \dots)^{\gamma_{i_k}}$, alors $\omega^G = \Delta$.

Démonstration. L'inclusion $\Delta \subset \omega^G$ résulte de la première et de la dernière propriété. Réciproquement, la seconde propriété montre que Δ est une union d'orbites. \square

Une fois un système de représentants obtenus, on détermine la liste des fonctions de Patterson associées, puis on élimine les ensembles A dont la fonction de Patterson P_A n'apparaît qu'une fois dans la liste. Cette méthode *manuelle* s'est révélée toutefois coûteuse, nécessitant par exemple le calcul de $2^{24} = 16777216$ éléments pour la détermination des orbites de l'action de D_{24} sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{24})$. Le cas $n = 24$ est musicalement intéressant puisqu'il correspond aux quart de tons, *i.e.* au partage de l'octave en 24 intervalles égaux. L'utilisation de la librairie GAP sur SAGE a permis d'augmenter significativement l'efficacité de la détermination de tels représentants. On trouvera en appendice la feuille de calcul SAGE ainsi qu'un tableau répertoriant pour $n = 8, \dots, 24$ le nombre de t -uplets non trivialement homométriques d'ensemble à k éléments. On remarquera en particulier l'existence de triplets et de quadruplets d'accords en Z -relation, la plus petite valeur de n pour laquelle ce phénomène apparaît étant $n = 16$. Ainsi il existe 3 triplets ($t = 3$) d'accords à $k = 6$ notes en Z -relation dans \mathbb{Z}_{16} . En pratique, ces accords peuvent être utilisés en composition.

Application en homologie persistante. Nous présentons les travaux prolongeant [CAL22]. Une partition est vue comme un ensemble de mesures. Chaque mesure \mathcal{B} est un ensemble de points de la forme $p = (n, t) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_c$ où n est une classe de hauteur et c un temps d'attaque. La valeur de c peut être prise comme étant une valeur rythmique élémentaire de la mesure¹⁴. À une mesure \mathcal{B} , on associe la transformée de Fourier discrète de sa matrice caractéristique $\widehat{\mathbb{1}}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{12 \times c}(\{0, 1\})$. On définit alors une distance sur les mesures à partir de leurs TFD. Le nuage de points avec lequel on travaille est alors l'ensemble des mesures \mathcal{B}_i muni d'une matrice des distances sur les $\widehat{\mathbb{1}}_{\mathcal{B}_i}$. On calcule un complexe filtré et on calcule l'homologie persistante comme précédemment.

14. Par exemple, pour une signature rythmique $\frac{4}{4}$ et une mesure présentant des noires, des triolets de croches et des croches, on pourra prendre $c = 24$.

Annexe A

Homologie persistante

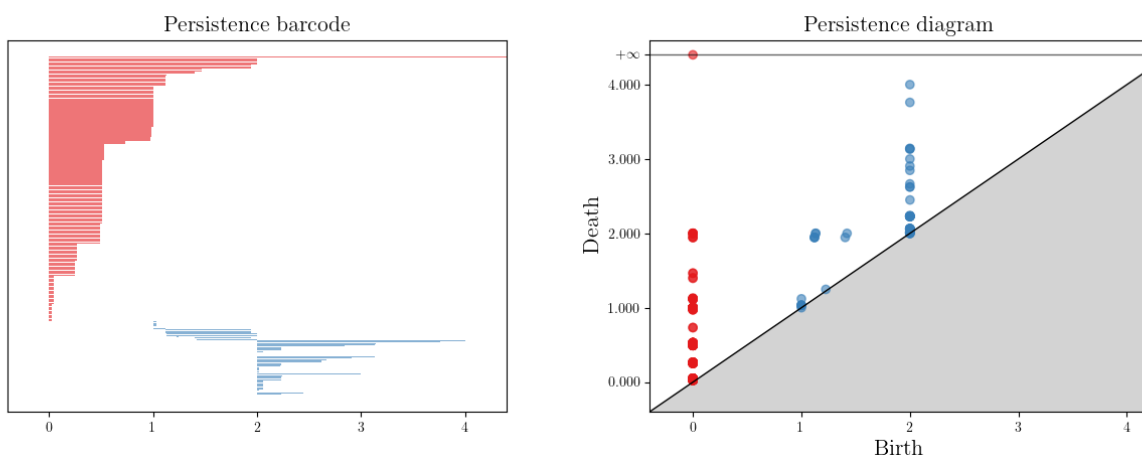


FIGURE A.1 – J.S.Bach, Choral BWV687

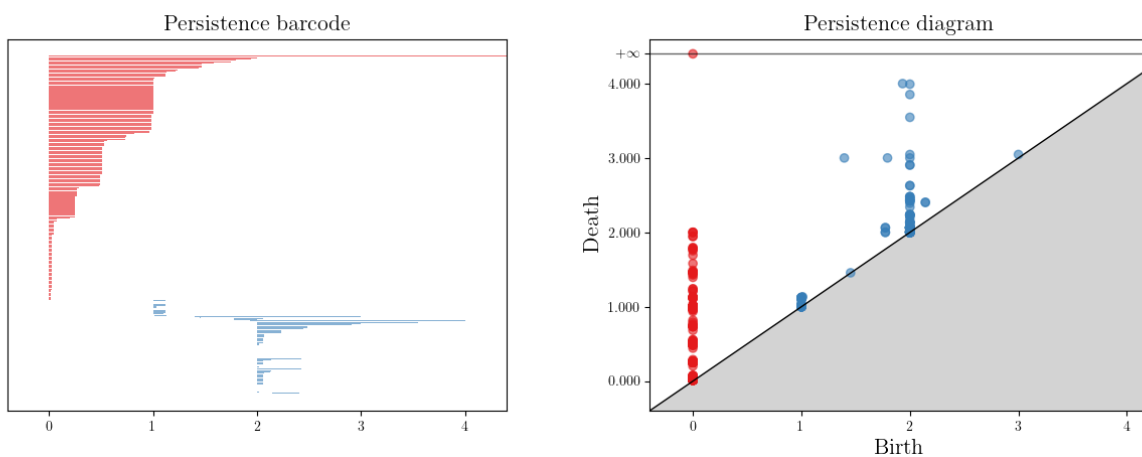


FIGURE A.2 – J.S.Bach, Choral BWV47

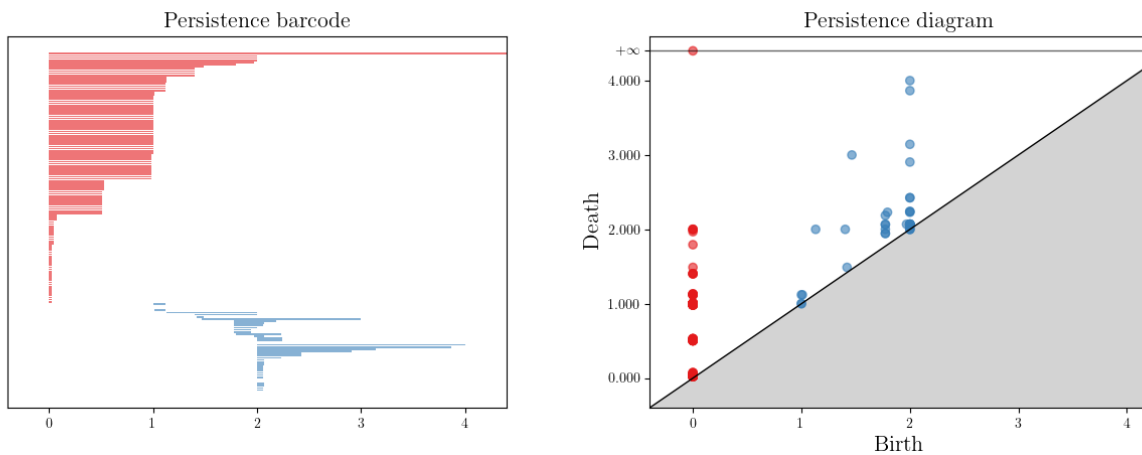


FIGURE A.3 – J.S.Bach, Choral BWV65

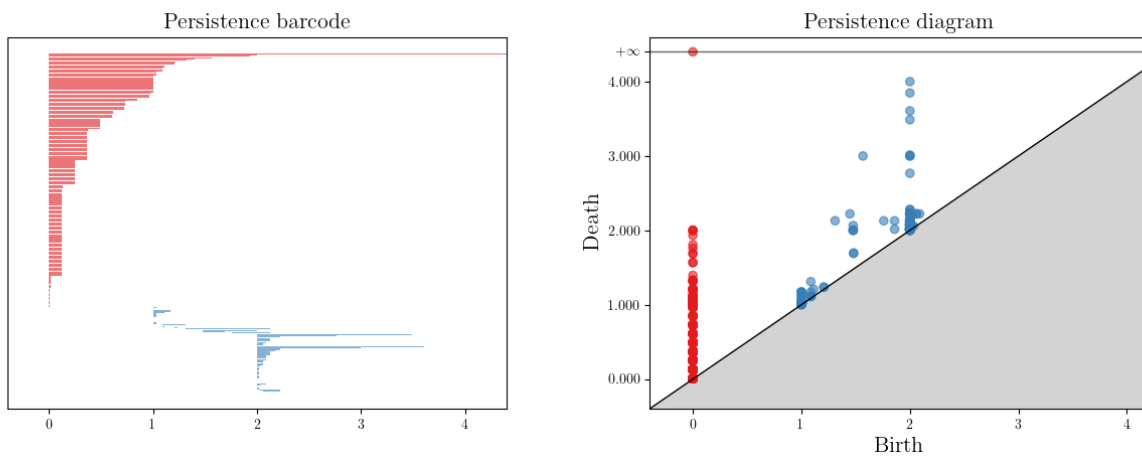


FIGURE A.4 – J.S.Bach, Invention n°8.

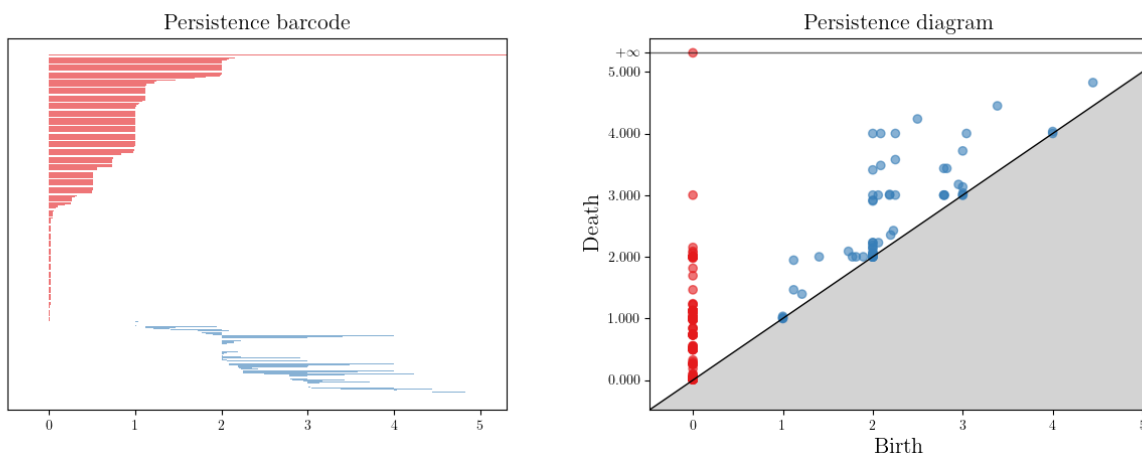


FIGURE A.5 – F.Chopin, Ballade op.23, n°1.

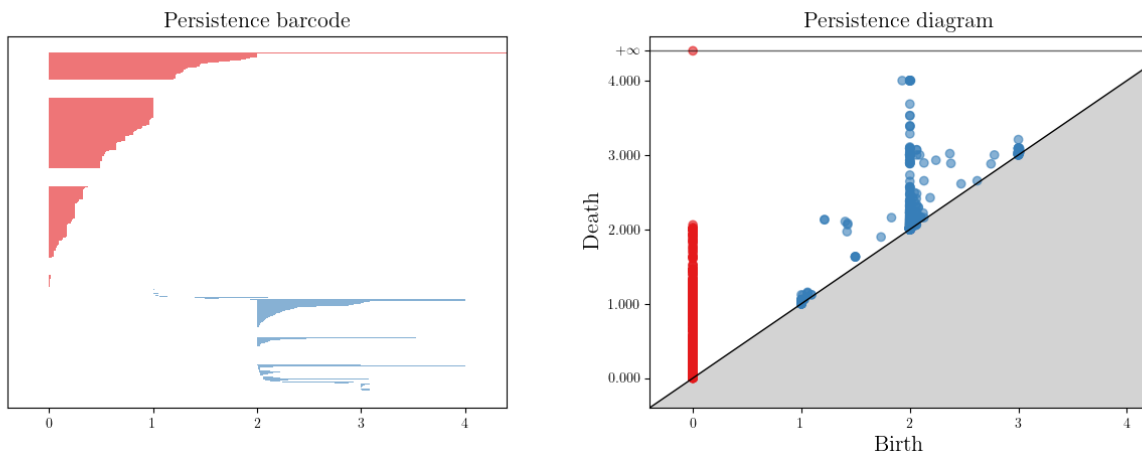


FIGURE A.6 – C.Debussy, Arabesque n°1.

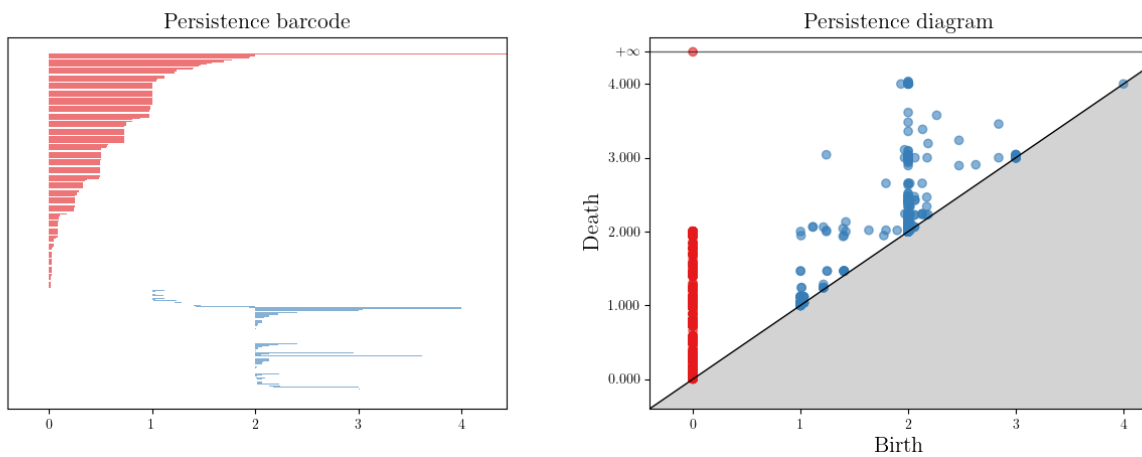


FIGURE A.7 – C.Debussy, Arabesque n°2.

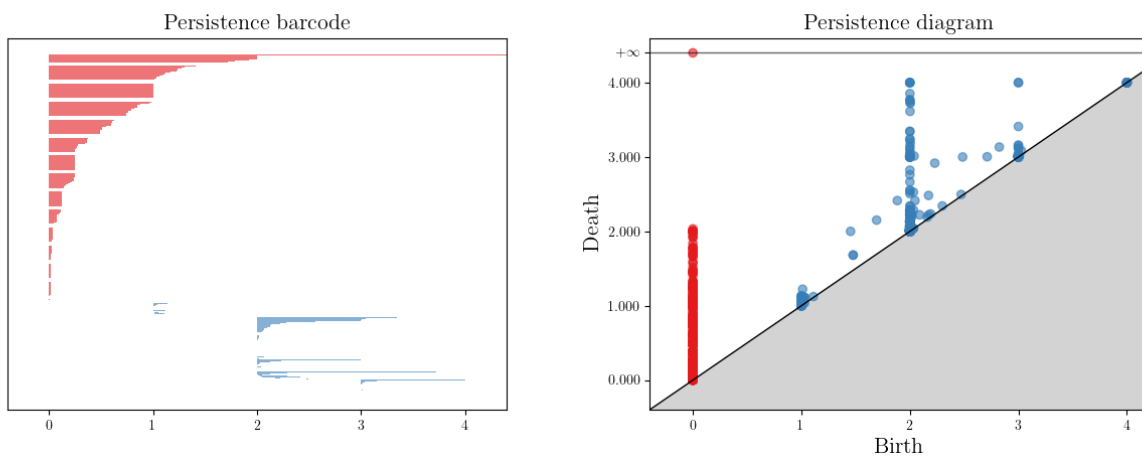


FIGURE A.8 – C.Debussy, Clair de lune.

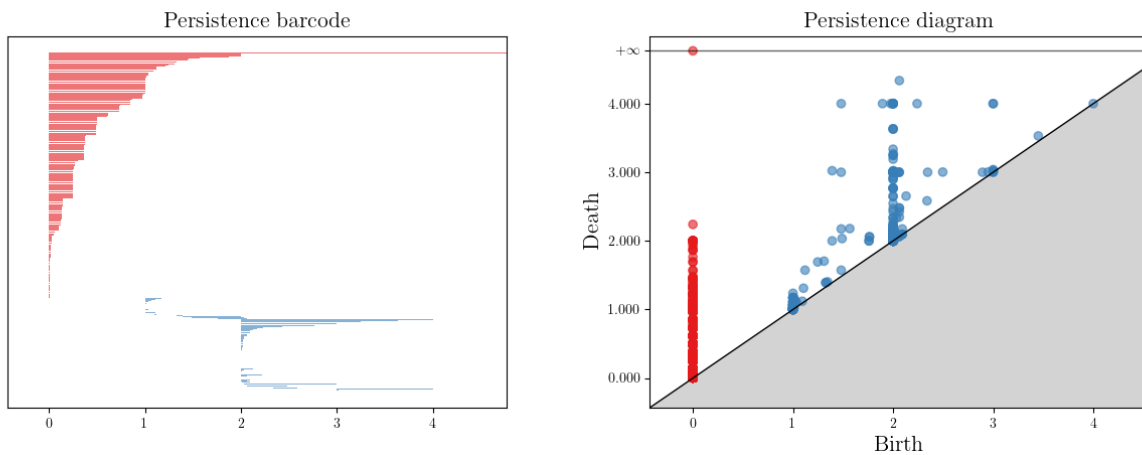


FIGURE A.9 – C. Debussy, Doctor gradus ad parnassum.

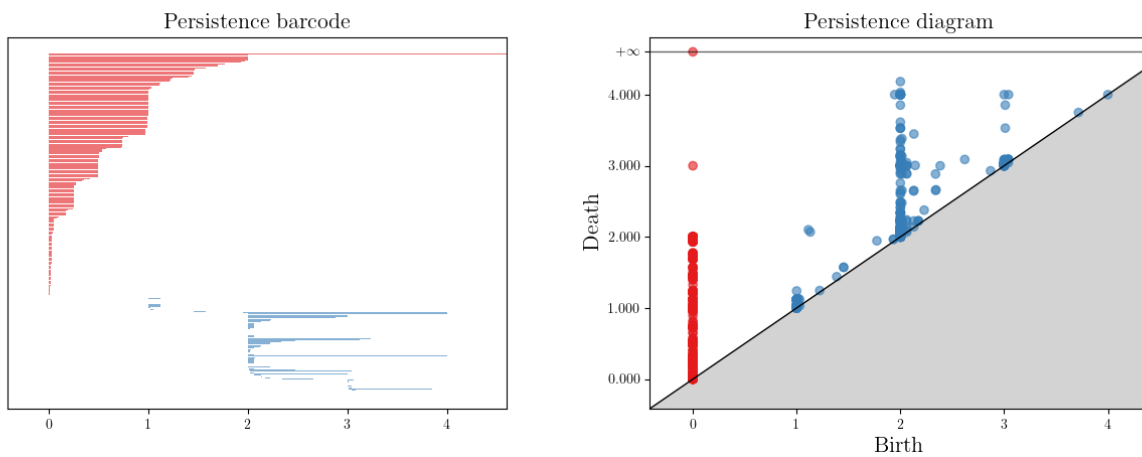


FIGURE A.10 – C. Debussy, Rêverie

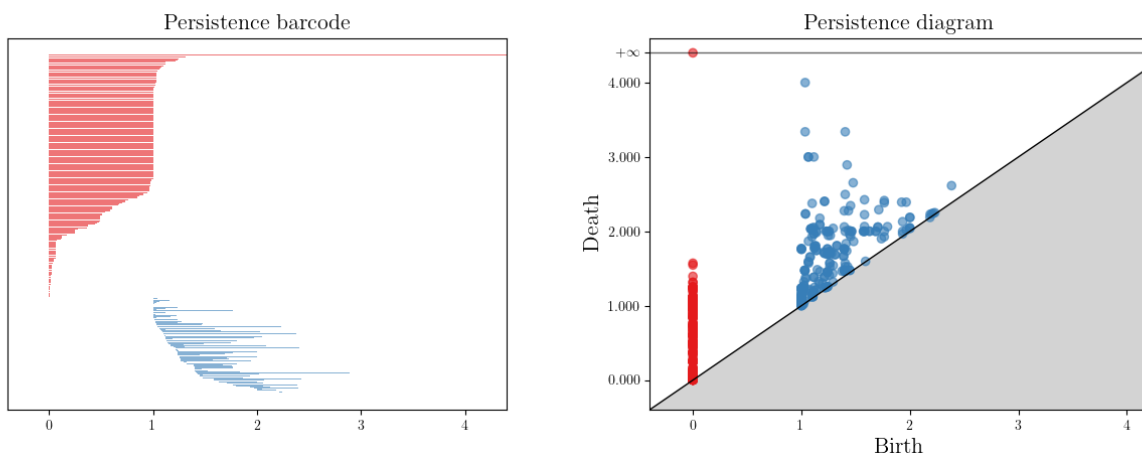


FIGURE A.11 – A. Schönberg, Menuett op.25.

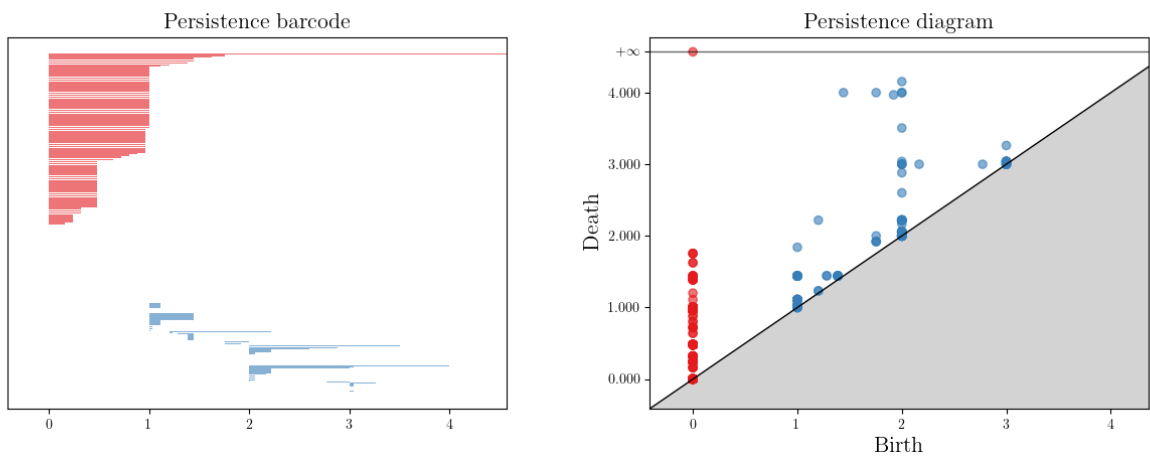


FIGURE A.12 – I.Stravinsky, Berceuse de l'oiseau de feu.

Annexe B

Feuille de calcul SAGE

May 18, 2023

Action of the Dihedral group of order 24 on the subsets of $\{1, \dots, 12\}$

Pierre Guillot, may 2023

```
[1]: def Cycle(*args):
      return libgap.eval(str(args))

[2]: def reps(n,k):
      """Calcule un système de représentants pour les orbites de G
      sur les parties à k éléments de X. """
      OnSets= libgap.eval("OnSets")
      a= Cycle(*tuple(range(1,n+1)))
      b= prod([ Cycle(i, n-i) for i in range(1,ceil(n/2)) ])
      G= libgap.Group([a,b])
      X= libgap(list(range(1,n+1)))
      orbits= G.OrbitsDomain(X.Combinations(k), OnSets)
      return [[x-1 for x in orb[0]] for orb in orbits]
```

Number of non trivially homometric sets in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Maximilien Wang, may 2023

```
[3]: def count(L,P):
      """ INPUT : $L$ list of lists, $P$ list of unhashable values with $P[k]$,
      value of $L[k]$
      OUTPUT : $D$ dict such that key $D[k]$ gives elements of $L$ with value $Q$
      """
      P = [tuple(value) for value in P]
      seen = {value:[] for value in P} #lists unhashable
      duplicate_sublists = []
      for k,sublist in enumerate(L):
          value = P[k]
          if len(seen[value])>=1 and sublist not in duplicate_sublists:
              duplicate_sublists.append(sublist)
              seen[value].append(sublist)
      return seen
```

```
[4]: L = ["A","B","C","D","E"] #list of elements
P = [[0],[1],[0],[0],[2]] #list of unhashable values
D = count(L,P) # A,C,D have same value $0$
for key,value in D.items():
    print(key,value)
```

```
(0,) ['A', 'C', 'D']
(1,) ['B']
(2,) ['E']
```

```
[5]: import numpy as np
from numpy.polynomial import polynomial as Poly

def char_poly(n,l):
    """ INPUT : $n$ integer, $l$ list
    OUTPUT : characteristic polynomial of $l$
    """
    p = [0]*n
    for k in range(len(l)):
        p[l[k]]=1
    return p

def mult(n,p,q):
    """ INPUT : $n$ integer, $p$, $q$ lists representing two polynomials
    OUTPUT : multiplication of $p$ and $q$ modulo $X^n-1$
    """
    m = list(Poly.polymul(p,q))
    mult = [0]*n
    for k in range(len(m)):
        mult[k%n] = (mult[k%n]+int(m[k]))%n #exponent mod n
    return mult

def star(A):
    """ INPUT : $$ list representing a subset of a group
    OUTPUT : $A^{-1}$ inverse elements of $$
    """
    return [(-a)%n for a in A]

def patterson(n,A):
    """ INPUT : $n$ integer, $$ list of elements of $Z_n$
    OUTPUT : patterson function associated to $$
    """
    a = char_poly(n,A)
    a_star = char_poly(n,star(A))
    return mult(n,a,a_star)
```



```
[6]: def count_hom(n,k,D):
    """ INPUT : $k$ integer, $D$ dictionary
        OUTPUT : $c$ dictionary, giving the number of $t$-tuples of $k$ subsets that
        are non trivially homometric
    """
    c = {(k,t):0 for t in range(1,n)}
    for key,value in D.items():
        t = len(value)
        if t>1:
            c[(k,t)]+=1
    return(c)
```

```
[7]: L = ["A","B","C","D","E"] #list of elements
P = [[0],[1],[0],[0],[2]] #list of unhashable values
D = count_hom(4,1,count(L,P))
for key,value in D.items():
    print(key,value) #t=1 triplet of elements of length k=1 with same value
```

```
(1, 1) 0
(1, 2) 0
(1, 3) 1
```

```
[8]: def polynomial_homometric_reduction(n):
    """ INPUT : $n$ integer
        OUTPUT : $D$ dictionary
    """
    for k in range(1,floor(n/2)+1):

        EC = reps(n,k) #reduction modulo dihedral group T/I
        d = count(EC,[patterson(n,x) for x in EC])
        D = count_hom(n,k,d)
        for key,value in D.items():
            if k>3 and value!=0:
                print("There are ",value, "non trivial homometric
                ",key[1],"-tuples of k=",key[0],"notes in Z/",n,"Z.")
        return D

n = int(input("n=?"))
hom = polynomial_homometric_reduction(n)
```

```
n=?12
There are 1 non trivial homometric 2 -tuples of k= 4 notes in Z/ 12 Z.
There are 3 non trivial homometric 2 -tuples of k= 5 notes in Z/ 12 Z.
There are 15 non trivial homometric 2 -tuples of k= 6 notes in Z/ 12 Z.
```

Annexe C

Homométrie

		t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=8	SUM
N=8	K=4	1						1
N=10	K=5	3						3
N=12	K=4	1						1
	K=5	3						3
	K=6	15						15
N=13	K=4	1						1
	K=6	2						2
N=14	K=5	6						6
	K=6	6						6
	K=7	48						48
N=15	K=5	5						5
	K=6	25						25
	K=7	10						10
N=16	K=4	2						2
	K=5	10						10
	K=6	28	3					31
	K=7	40	4					44
	K=8	177		3				180
N=17	K=6	16						16
	K=7	24						24
	K=8	52						52
N=18	K=5	13	1					14
	K=6	56	6					62
	K=7	118	16					134
	K=8	139	11					150
	K=9	512	6	54				572
N=19	K=6	21						21
	K=7	57						57
	K=8	90						90
	K=9	156						156
N=20	K=4	2						2
	K=5	22						22
	K=6	96	2					98
	K=7	180	11					191
	K=8	491	12	32				535
	K=9	535	14	16				565
	K=10	1973	1	130		2		2106
N=21	K=6	96						96
	K=7	220						220
	K=8	276	6					282
	K=9	1032	23	7				1062
	K=10	568	45					613
N=22	K=5	20						20
	K=6	55	5					60
	K=7	310	25					335
	K=8	540	35					575
	K=9	1300	125					1425
	K=10	1430	120					1550
	K=11	6985	5	390		10		7390

		t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=8	t=12	SUM
N=23	K=6	33							33
	K=7	110							110
	K=8	429							429
	K=9	803	11						814
	K=10	1144							1144
	K=11	1342	33						1375
N=24	K=4	3							3
	K=5	30	1						31
	K=6	270		5					275
	K=7	651	9	15		1			676
	K=8	2389	87	53		3			2532
	K=9	4569	304	233		5	1		5112
	K=10	6999	254	445	3	11	3		7715
	K=11	8037	412	299	2	13	2		8765
	K=12	20838	46	3128		146	75	3	24236

Bibliographie

- [AMI06] Emmanuel Amiot, « Une preuve élégante du théorème de Babbitt par transformée de Fourier discrète », *Quadrature*, 28, 2006.
- [ASS02] Gérard Assayag, Hans Georg Feichtinger, Jose Francisco Rodrigues, *Mathematics and Music*, Springer, 2002.
- [AND18] Moreno Andreatta, *From music to mathematics and backwards : introducing algebra, topology and category theory into computational musicology*, Springer, 2018.
- [AND20] Moreno Andreatta, Corentin Guichaoua, Nicolas Juillet, « New hexachordal theorems in metric spaces with a probability measure », *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, European Mathematical Society Publishing House, 2020.
- [BAB55] Milton Babbitt, *Some aspects of twelve-tone composition*, *The Score*, vol. 12, 1955, pp. 53-61.
- [BAU14] Ulrich Bauer, Michael Kerber, Jan Reininghaus, Hubert Wagner, « PHAT : persistent homology algorithms toolbox », In : H.Hong, C.Yap, *Mathematical software - ICMS*, Lecture notes in computer science, vol. 8592, Springer, 2014, pp.137-143.
- [BEA11] Pierre Beauguitte, *Transformée de Fourier discrète et structures musicales*, mémoire de master, UPMC, 2011.
- [BIG14] Louis Bigo, Daniele Ghisi, Antoine Spicher, Moreno Andreatta, « Spatial Transformations in Simplicial Chord Spaces », in A. Georgaki and G. Kouroupetroglou (Eds.), *Proceedings ICMC*, 2014, pp. 1112-1119.
- [BIG16] Louis Bigo, Moreno Andreatta, « Topological Structures in Computer-Aided Music Analysis », in D. Meredith (Eds.) *Computational Music Analysis*, Springer, 2016, pp. 57-80.
- [BJO95] Anders Björner, « Topological methods », in R. Graham, M.G rötschel, L. Lovasz, *Handbook of combinatorics*, 1995, pp 1819-1872.
- [BUB14] Peter Bubenik, Jonathan A.Scott, « Categorification of persistent homology », in *Discrete and Computational Geometry*, Vol. 51, n°3, 2014, pp.600-627.
- [CAL22] Victoria Callet, « Persistent Homology on Musical Bars », in *Mathematics and Computation in Music*, volume 13267, Springer, 2022, pp. 349-355.
- [CHA09] Frédéric Chazal, David Cohen-Steiner, Marc Glisse, Leonidas J. Guibas, and Steve Y. Oudot, « Proximity of persistence modules and their diagrams », in *Proceedings of the 25th annual symposium on Computational geometry*, 2009, pp. 237-246.
- [COH70] Marshall M.Cohen, *A course in simple homotopy theory*, Graduate texts in Mathematics, Springer, 1970.
- [EDE02] Herbert Edelsbrunner, D.Letscher, Afra Zomorodian, « Topological persistence and simplification », in *Discrete and Computational Geometry*, vol. 8, pp. 511-533, 2002

- [EDE10] Herbert Edelsbrunner, John L.Harer, *Computational topology an introduction*, American Mathematical Society, 2010
- [FOR77] Allen Forte, *The Structure of Atonal Music*, Yale University Press, second edition, 1977.
- [GHR07] Robert Ghrist, « Barcodes : The persistent topology of data », in Bulletin of the American Mathematical Society, 2007, pp.61-75.
- [HUL10] Alexander Hulpke, *Notes on Computational Group Theory* Colorado State University, 2001, pp. 11-13.
- [KER13] Michael Kerber and R. Sharathkumar, *Approximate Cech Complexes in Low and High Dimensions*, 2013, pp. 666-676.
- [LAS18] Paul Lascabettes , *Homologie Persistante Appliquée à la Reconnaissance de Genres Musicaux*, mémoire de master, ENS Paris-Saclay, IRMA, 2018.
- [LEW59] David Lewin, « Intervallic relations between two collections of notes », in *Journal of Music Theory*, Vol. 3, n°2, 1959, pp. 298-301.
- [LEW07] David Lewin, *Generalized Musical Intervals and Transformations*, Oxford University Press, 2007.
- [MAR14] C.Maria, J-D.Boissonat, M.Glisse, M.Yvinec, « The Gudhi library : simplicial complexes and persistent homology », in H.Hong, C.Yap, *Mathematical software - ICMS 2014. Lecture notes in computer science*, vol. 8592, Springer, 2014, pp. 167-174.
- [OTT17] Nina Otter, Mason A Porter, Ulrike Tillmann, Peter Grindrod, Heather A Harrington, *A roadmap for the computation of persistent homology*, EPJ Data Science, 2017.
- [VIR22] Žiga Virk, *Introduction to Persistent Homology*. Univerza v Ljubljani Fakulteta za računalništvo in informatiko, 2022.
- [WEI22] Christophe Weis, *La trajectoire spatiale dans le Tonnetz comme outil de classification stylistique automatique et de génération*, mémoire de master, Sorbone, IRCAM, 2022.
- [ZOM05] Afra Zomorodian, Gunnar Carlsson, « Computing persistent homology », in *Discrete and Computational Geometry*, 2005, pp. 249-274.