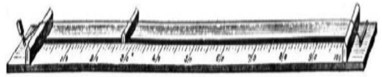
Formalisation algébrique et représentations géométriques en musique

Orleans, 26 janvier 2012

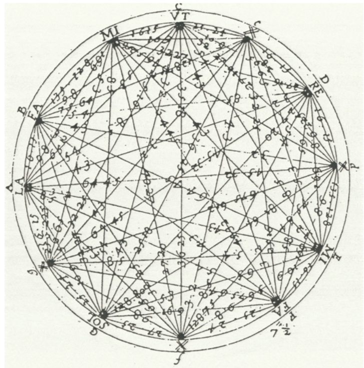
Moreno Andreatta
Equipe Représentations Musicales
IRCAM/CNRS/UPMC UMR 9912
Moreno.Andreatta@ircam.fr

Musique et mathématiques : deux destinées parallèles

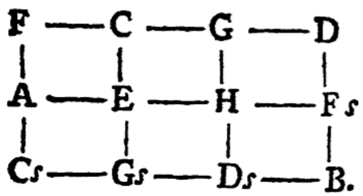
MUSIQUE	MATHS
500 av. J. C. Relation hauteur/longueur corde. La musique est source d'inspiration pour la théorie des nombres et la géométrie.	Nombres naturels et rationnels
300 a.J. Invention (théorique) de la gamme chromatique tempérée égale par Atistoxène de Tarente) et **prémonition de la théorie des groupes**. Isomorphismes entre les logarithmes (intervalles musicaux) et les exponentiels (longueur d'une corde)	*Aucune relation.*
1000 Invention de la représentation bidimensionnelle des hauteurs	*Aucune correspondance*
1500 *Aucune reprise des concepts précédents*	Nombres négatifs. Construction des rationnels
1600 *Aucune relation*	Nombres réels et les logarithmes
Marin Mersenne (1588-1648) : combinatoire musicale	Calcul des probabilités
1700 La fugue comme un automate abstrait. Manipulation inconsciente du groupe de Klein	Nombres complexes (Euler, Gauss), les quaternions (Hamilton), continuité (Cauchy), structure de groupe (Galois, Abel)
Leonhard Euler : *Speculum Musicum* (1773)	Théorie des graphes
1900 Libération de la prison de la tonalité (Loquin, Hauer, Schoenberg)	Nombres infinis et transfinis (Cantor). Axiomatique de Peano. Théorie de la mesure (Lebesgue, Borel)
1920 Formalisation radicale des macrostructures à travers le système sériel (Schoenberg)	*Aucun développement de la théorie des nombres.*
Ernst Krenek (1900-1991) : les axiomes dans le système dodécaphonique	*David Hilbert, Les fondements de la géométrie (1899)*



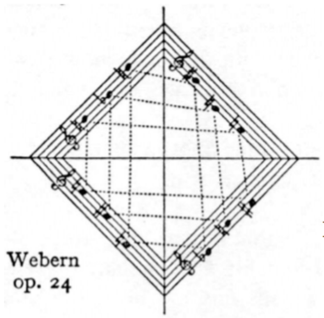
Pythagore et le monocorde, VIe-Ve siècle av. J. C.

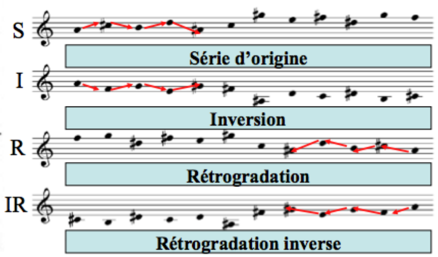


Mersenne, *Harmonicorum Libri* XII, 1648



Euler : *Speculum musicum*, 1773





Iannis Xenakis, *Musique. Architecture*, Tournai, Casterman, 1971, (New, revised edition: Tournai, Casterman, 1976, 238 p.)

Mathématiques/Musique…une histoire récente!

- 1999 : 4e Forum Diderot (Paris, Vienne, Lisbonne), *Mathematics and Music* (G. Assayag, H.G. Feichtinger, J.F. Rodrigues, Springer, 2001)
- 2000-2001 : Séminaire *MaMuPhi, Penser la musique avec les mathématiques ?* (Assayag, Mazzola, Nicolas éds., Coll. « M/S », Ircam/Delatour, 2006)
- 2000-2003 : International Seminar on *MaMuTh* (*Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory* (Mazzola, Noll, Luis-Puebla eds, epOs, 2004)
- 2003 : *The Topos of Music* (G. Mazzola et al.)
- 2003: *Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals* (J. Fauvel et al.)
- 2001 - 2011 : Séminaire *MaMuX* de l'Ircam
- 2004 - 2011 : Séminaire *mamuphi* (Ens/Ircam)
- 2006 : *Mathematical Theory of Music* (F. Jedrzejewski), Coll. « M/S »
- 2007 : *La vérité du beau dans la musique* (G Mazzola), Coll. « Musique/Sciences »
- 2007 : Journal of Mathematics and Music (Taylor & Francis) et MCM 2007
- 2007: *Music. A Mathematical Offering* (Dave Benson), CUP
- 2008: *Music Theory and Mathematics* (Jack Douthett et al.), URP
- 2009 : *Computational Music Science Series* (Springer)
- 2009 : MCM 2009 (Yale) et Proceedings chez Springer
- 2010 : Mathematics Subject Classification : 00A65 Mathematics and music
- 2011 : Conférence de la SMCM (Ircam, 15-17 juin 2011)

Les mathématiques modernes et la création des concepts

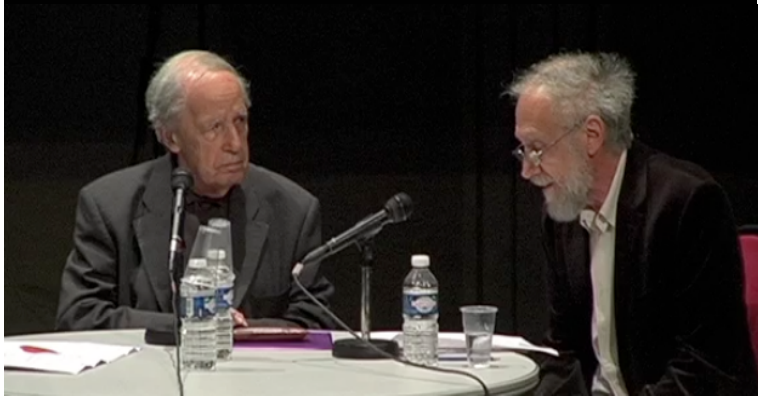
MATH / MUSIC MEETINGS

Creativity in Music and Mathematics

Pierre Boulez & Alain Connes

Encounter with two major figures of musical creation and contemporary mathematical research: Pierre Boulez and Alain Connes.

What is the role of intuition in mathematical reasoning and in artistic activities? Is there an aesthetic dimension to mathematical activity? Does the notion of elegance of a mathematical demonstration or of a theoretical construction in music play a role in creativity?



Gérard Assayag, director of the CNRS/IRCAM Laboratory for The Science and Technology of Music and Sound, will lead this dialogue on invention in the two disciplines.

Photo: Pierre Boulez © Jean Radel

Wednesday, June 15, 2011, 6:30pm / IRCAM, Espace de projection

Creativity in Mathematics and the Arts

Do mathematics have a unique place within scientific disciplines, as music does within artistic practices?

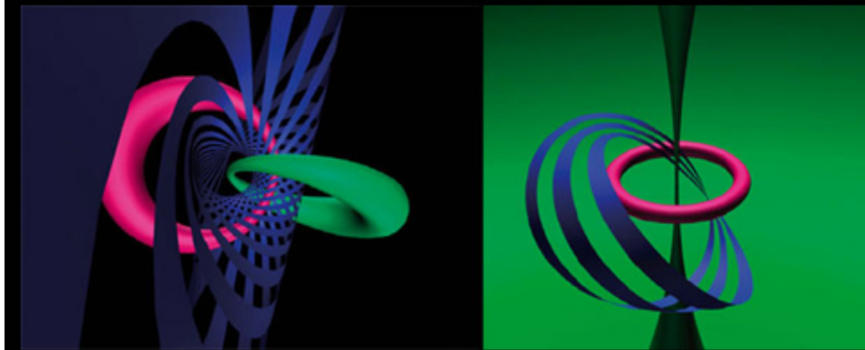
Starting from the mathematics/music relationship, this final round-table will raise the issue of the connections between art and science.

11am-1pm Round-Table Discussion

Palais de la découverte, Salle de conférences

With **Jean-Paul Allouche**, mathematician | **Claude Bruter**, mathematician and president of the ESMA | **Yves Hellegouarch**, mathematician | **Tom Johnson**, composer | **Jean-Marc Lévy-Leblond**, physicist and author | **Jacques Mandelbrojt**, painter and theoretical physicist | **Jean-Claude Risset**, physicist and composer

Session led by **Moreno Andreatta** (researcher IRCAM/CNRS and vice president of the Society for Mathematics and Computation in Music).



"…the role of mathematics, which at the beginning was considered as a part of physics, has become – thanks to modern mathematics – a kind of substitution of philosophy with respect to the creation of concepts".

➔ `http://agora.ircam.fr/971.html?event=1002`

ircam Centre Pompidou AGORA FESTIVAL 8-18 JUIN 2011

Société Mathématique de France SMF

Mathematics and Computation in Music

Formation ATIAM

Acoustique Traitement du Signal Informatique Appliqués à la Musique Parcours multi-mentions du Master (M2) Sciences et Technologies de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

MODELES MATHEMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE MUSICALE (MMIM) : OUTILS THEORIQUES ET STRATEGIES PEDAGOGIQUES

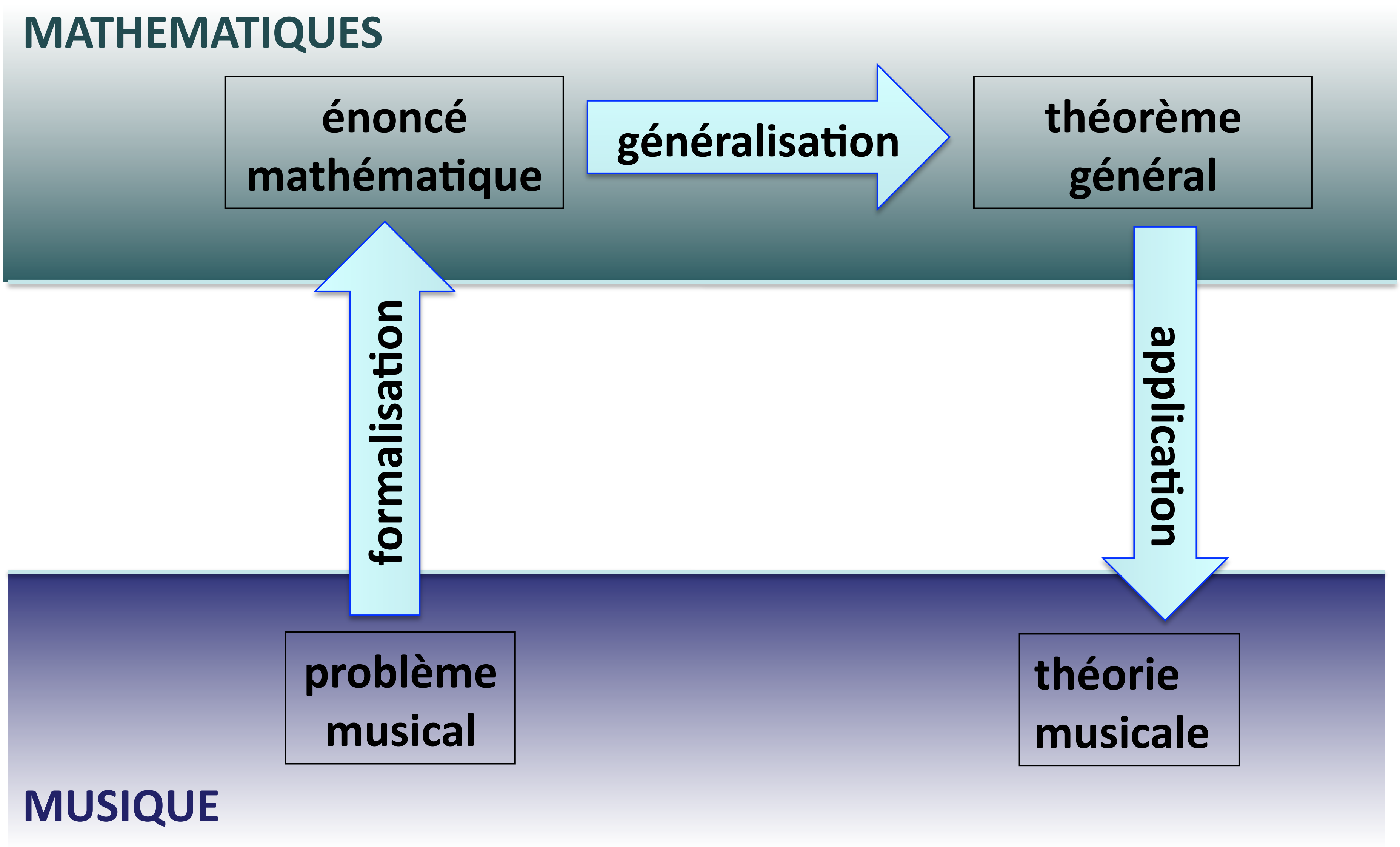
Moreno Andreatta
Équipe Représentations Musicales
Ircam/CNRS
Moreno.Andreatta@ircam.fr

Marc Chemillier
GREYC
Université de Caen
marc@info.unicaen.fr

Andreatta M. et M. Chemillier (2007), « Modèles mathématiques pour l'informatique musicale (MMIM): Outils théoriques et stratégies pédagogiques », Actes des Journées d'Informatique Musicale, Lyon, avril, p. 113-12

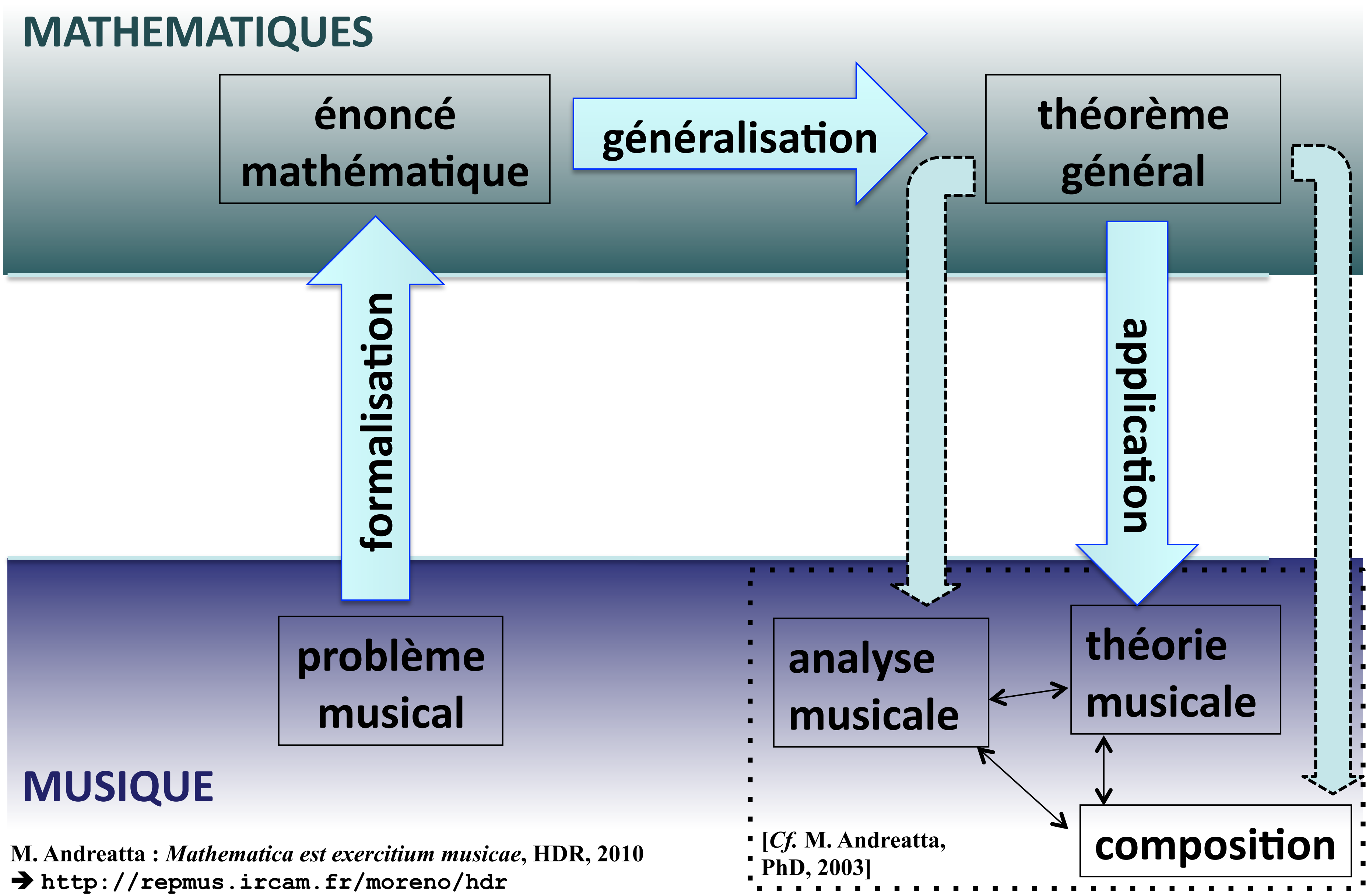
➔ **`http://articles.ircam.fr/textes/Andreatta07b/index.pdf`**

Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



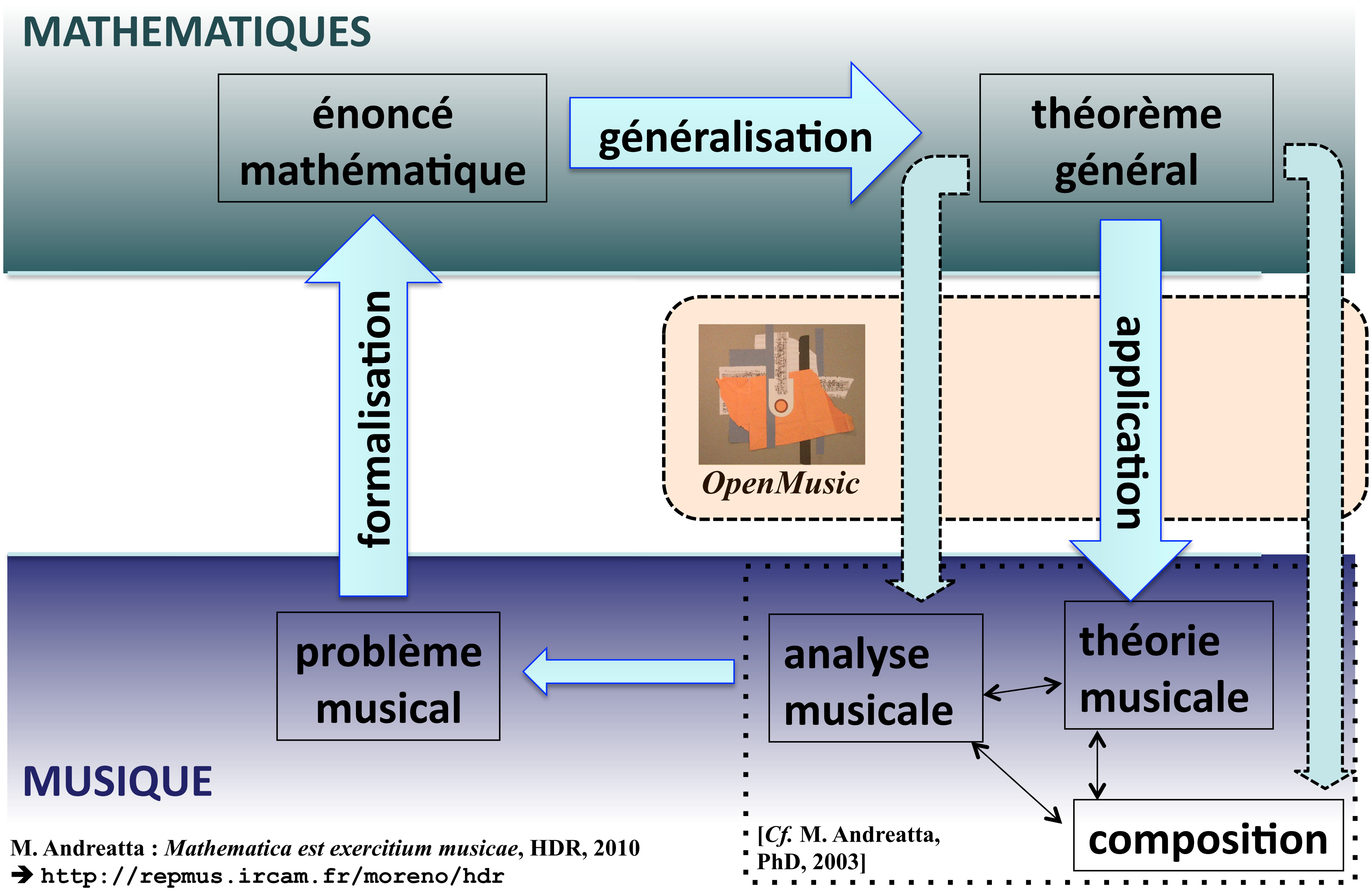
M. Andreatta : *Mathematica est exercitium musicae*, HDR, 2010
➔ `http://repmus.ircam.fr/moreno/hdr`

Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



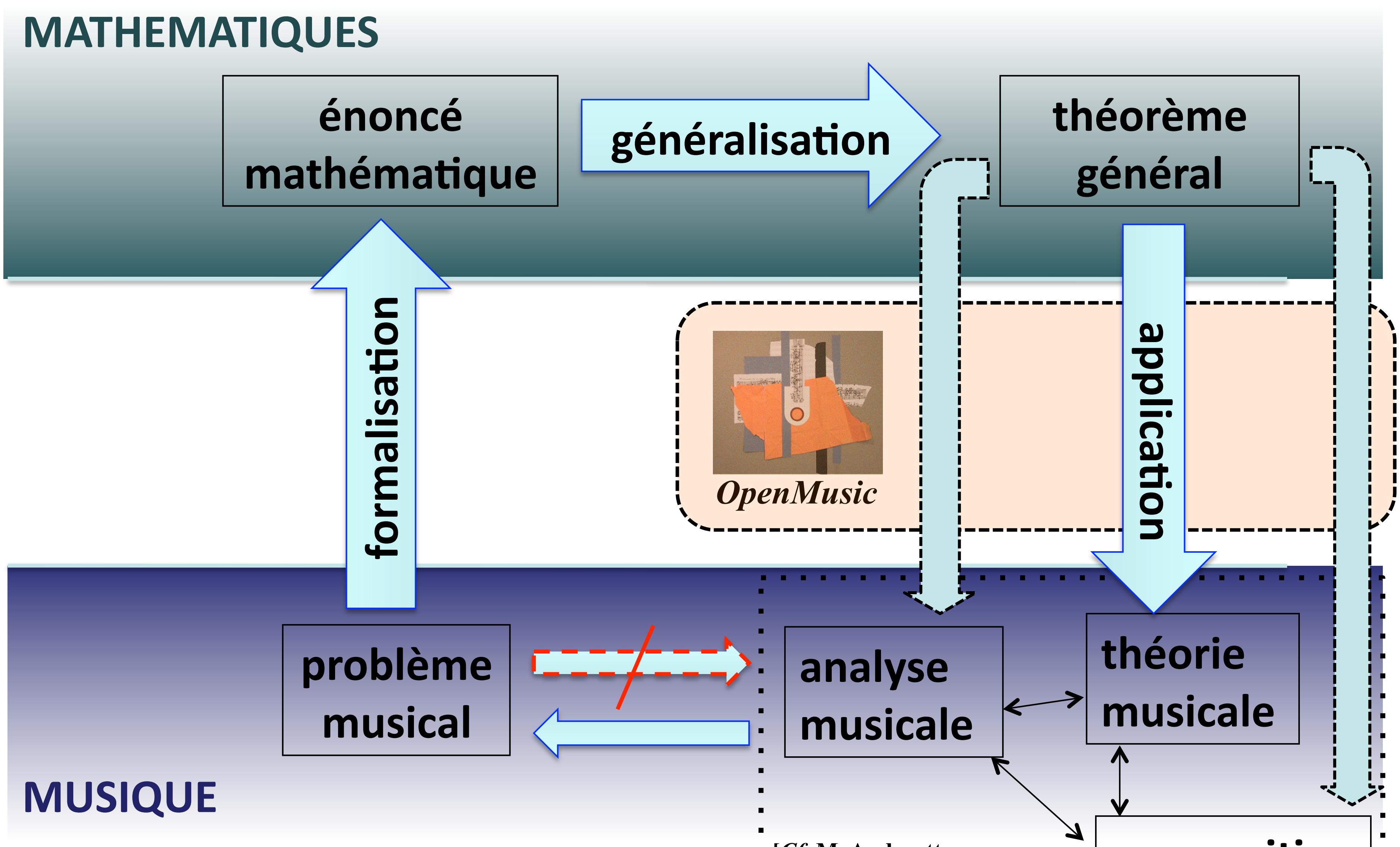
M. Andreatta : *Mathematica est exercitium musicae*, HDR, 2010
➔ `http://repmus.ircam.fr/moreno/hdr`

Double mouvement d'une dynamique mathémusicale



M. Andreatta : *Mathematica est exercitium musicae*, HDR, 2010
➔ `http://repmus.ircam.fr/moreno/hdr`

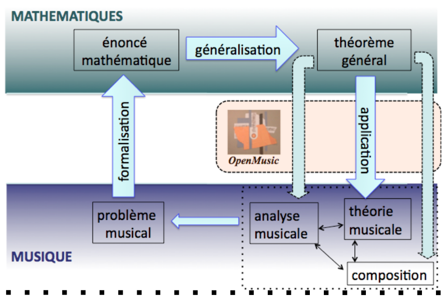
Double mouvement d’une dynamique mathémusicale

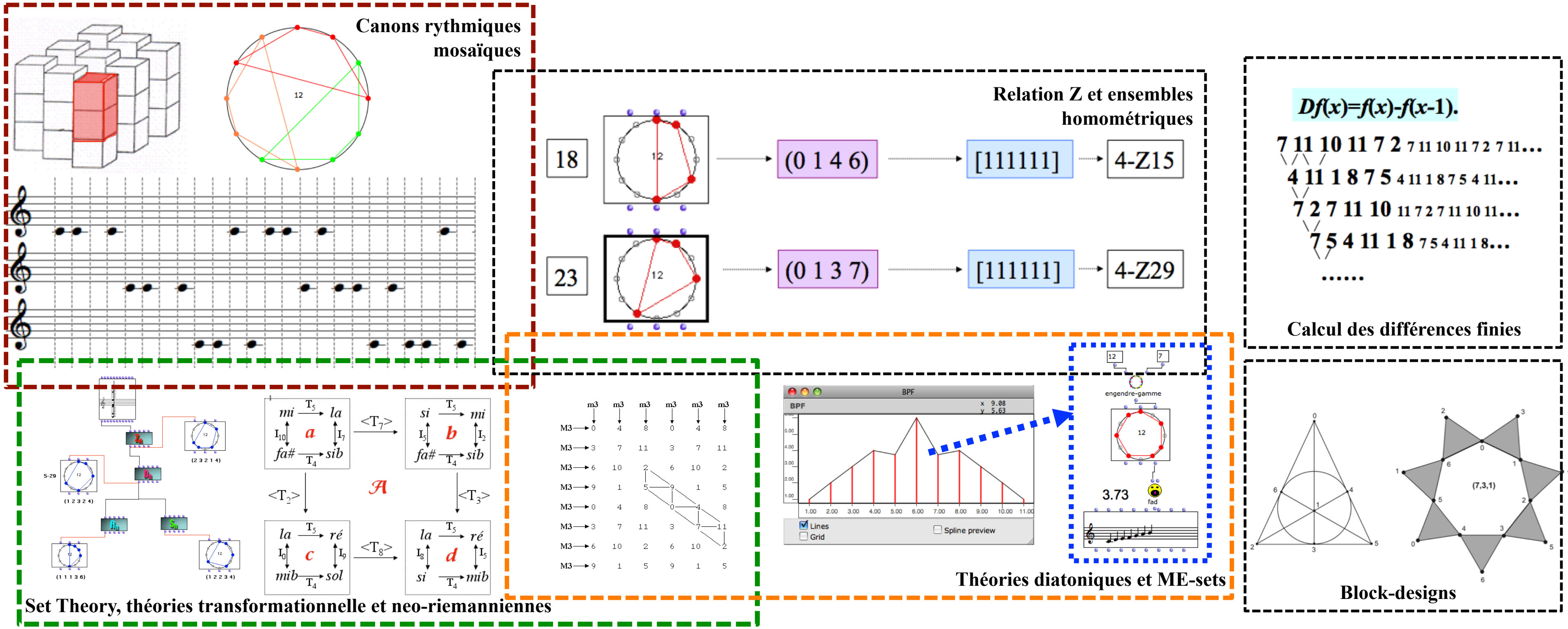


M. Andreatta : *Mathematica est exercitium musicae*, HDR, 2010
➔ `http://repmus.ircam.fr/moreno/hdr`

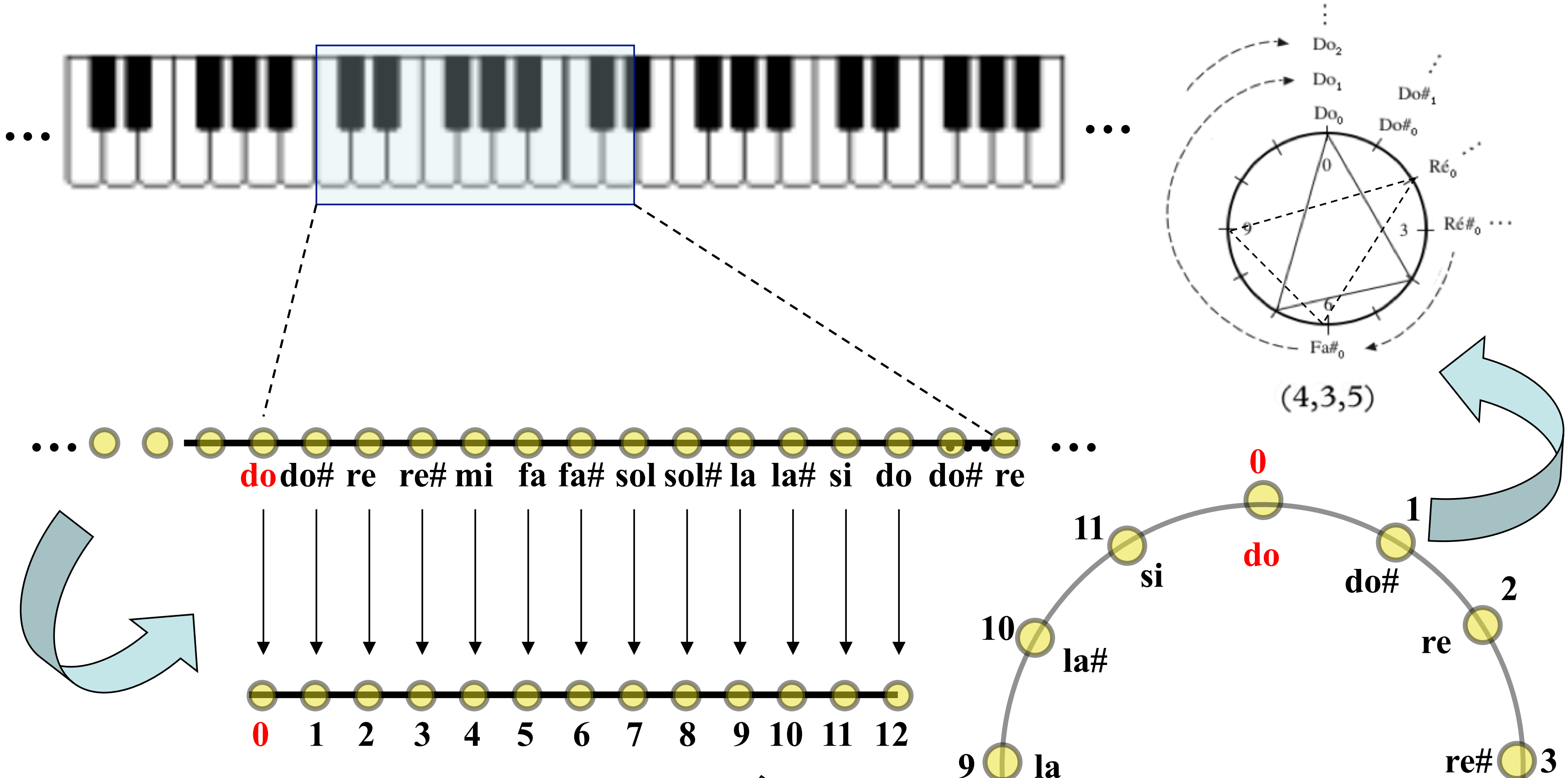
Un aperçu de quelques problèmes mathémusicaux

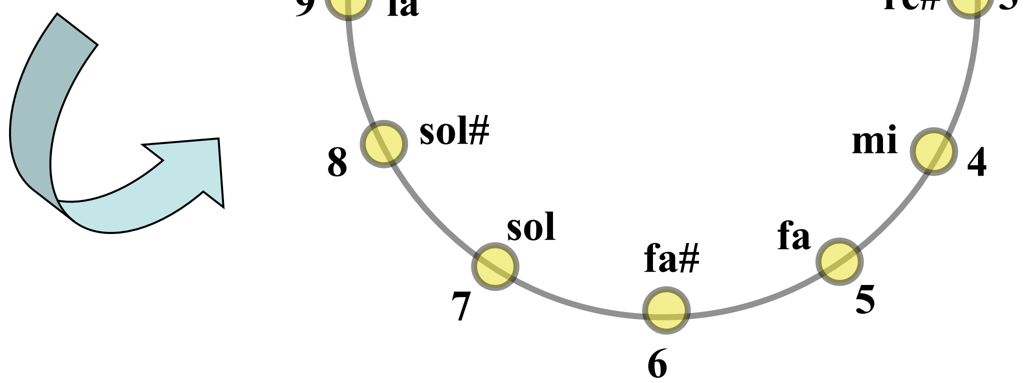
1. La construction des canons rythmiques mosaïques : de Minkowski à Fuglede
2. La relation *Z* et la théorie des ensembles homométriques
3. La *Set Theory* et la théorie transformationnelle
4. Les théories diatoniques et les *ME-sets*
5. Suites périodiques et calcul de différences finies
6. La théorie des block-designs en composition algorithmique
7. Modèles algébriques et catégoriels pour la cognition musicale





Représentation circulaire et structure intervallique



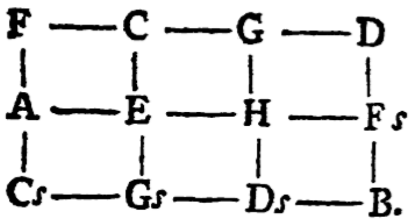


$$\mathbf{Z_{12}} = < a \mid a^{12} = 0 >$$

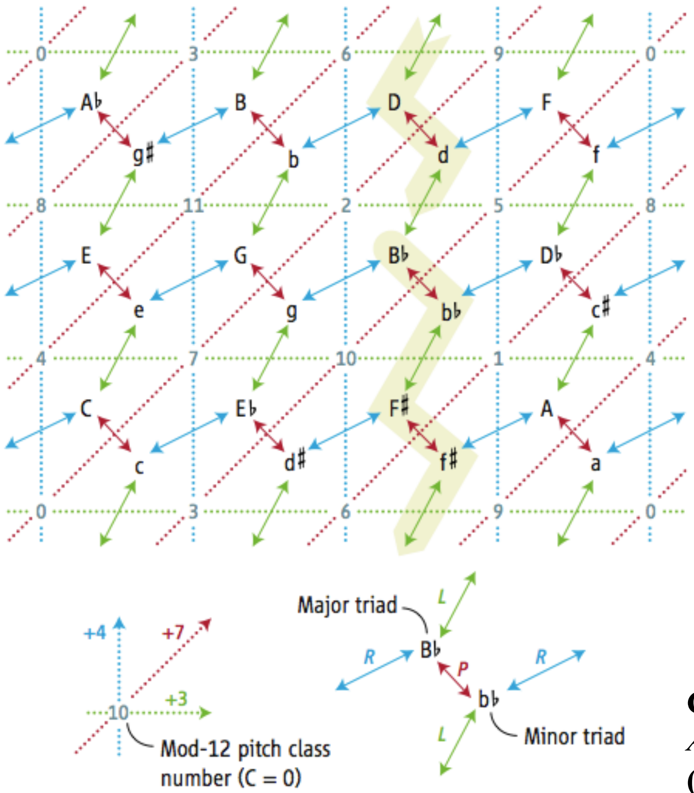
$$\mathbf{Z_{12}} = < \mathrm{T_k} \mid (\mathrm{T_k})^{12} = \mathrm{T_0} >$$

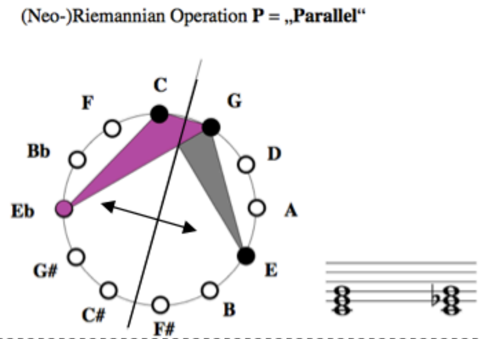
$\mathrm{T_k} : x \rightarrow x + \mathrm{k} \bmod 12$

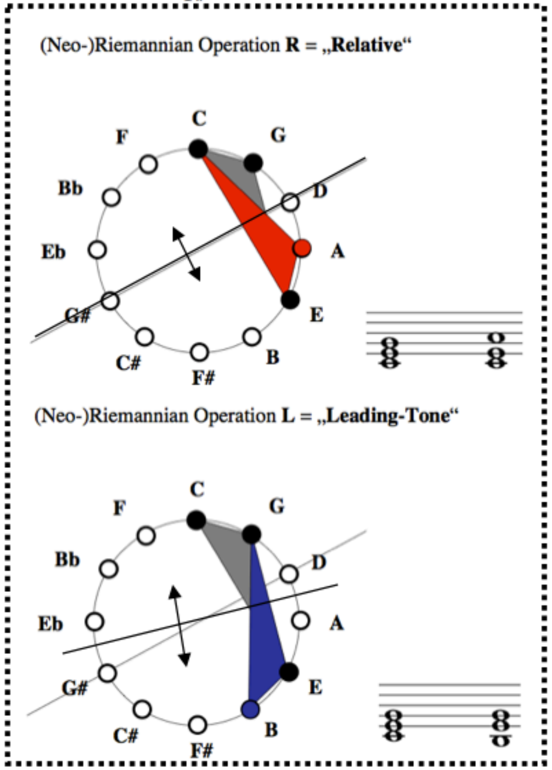
Du réseau d’Euler au *Tonnetz*



Euler : *Speculum musicum*, 1773







ρ = <L,R | $L^2 = (LR)^{12} = 1$
LRL=$L(LR)^{-1}$ >

$$\rho \subseteq C_{Sym}(D_{12})$$

$$D_{12} \subseteq C_{Sym}(\rho)$$

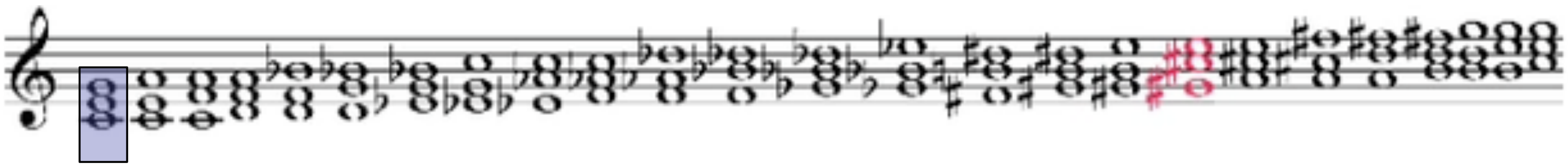
D_{12} = <I, T | $I^2 = T^{12} = 1$
ITI=$I(IT)^{-1}$ >

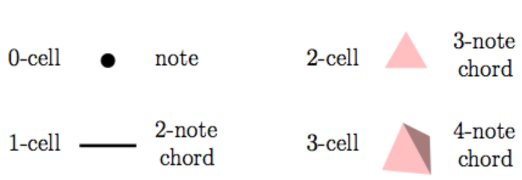
$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & \circ \arrow[d, "g"] \\ \circ \arrow[r, "f"] & \circ \end{tikzcd}$$

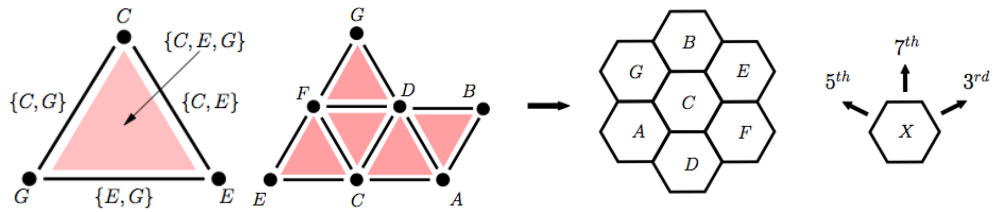
Tout diagramme commute
$\forall f \in D_{12}$
$\forall g \in \rho$

Crans A., Fiore T., and Satyendra R. "Musical Actions of Dihedral Groups." *The American Mathematical Monthly*, Vol. 116 (2009), No. 6: 479 – 495
(Winner of the The Mathematical Association of America's Merten M. Hasse Prize 2011)

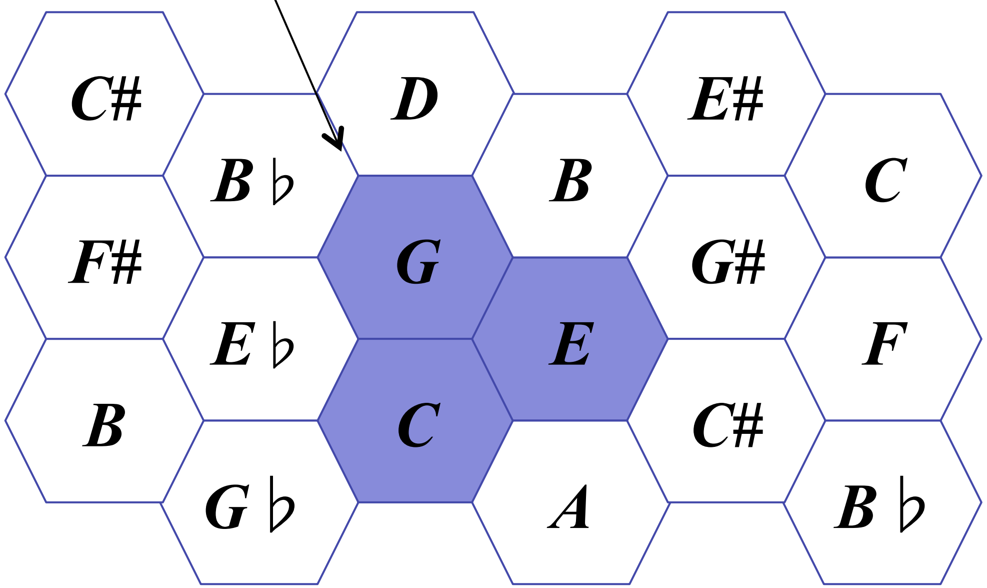
Du *Tonnetz* à la programmation spatiale

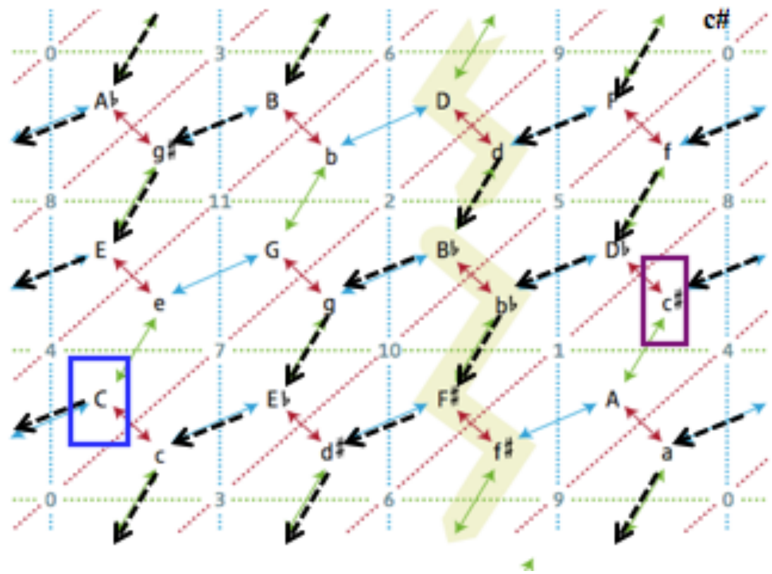




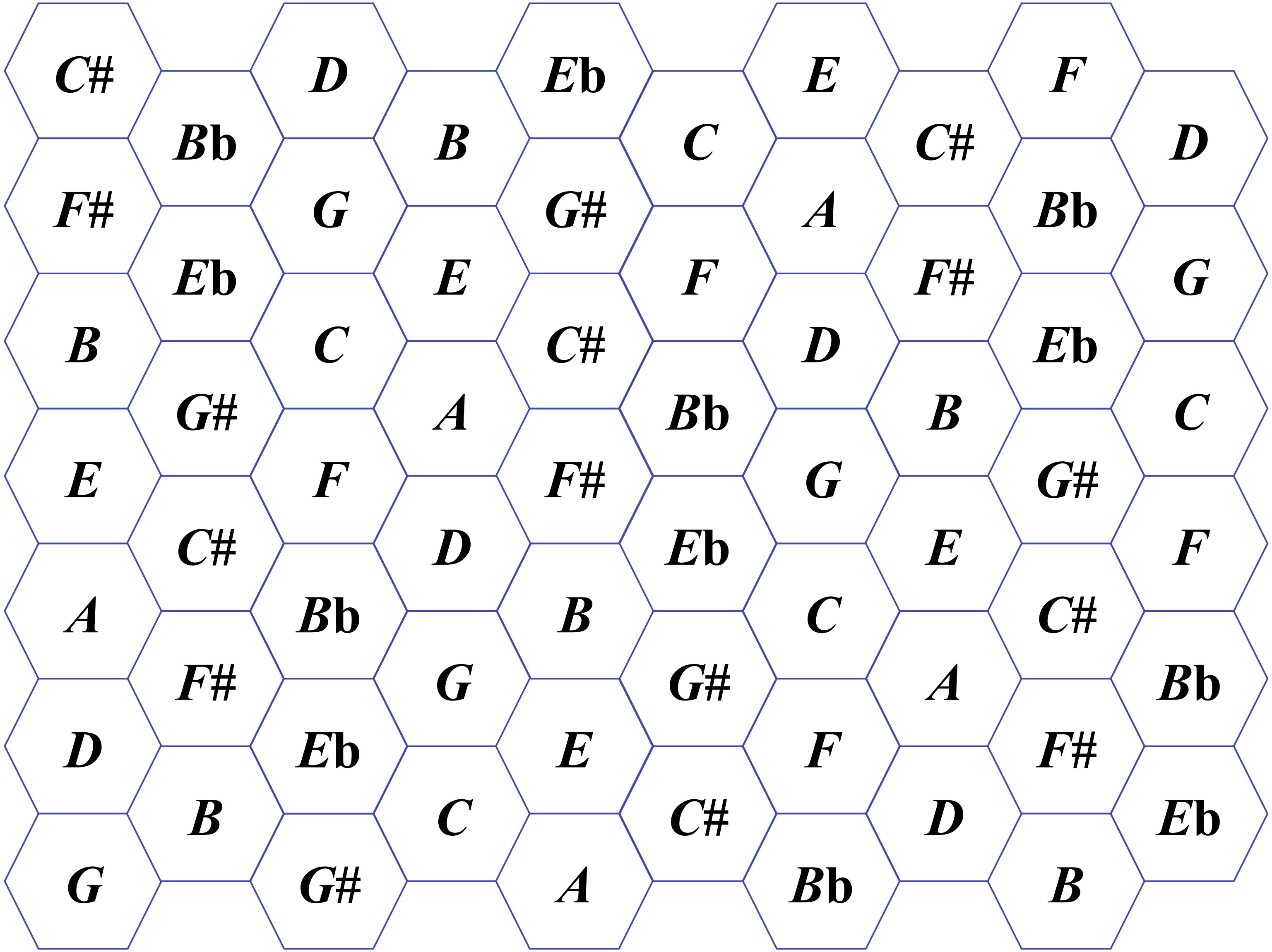


L. Bigo, J.-L. Giavitto, A. Spicher, "Building Topological Spaces for Musical Objects", MCM 2011
L. Bigo, thèse (en cours), Ircam / Université Paris 12

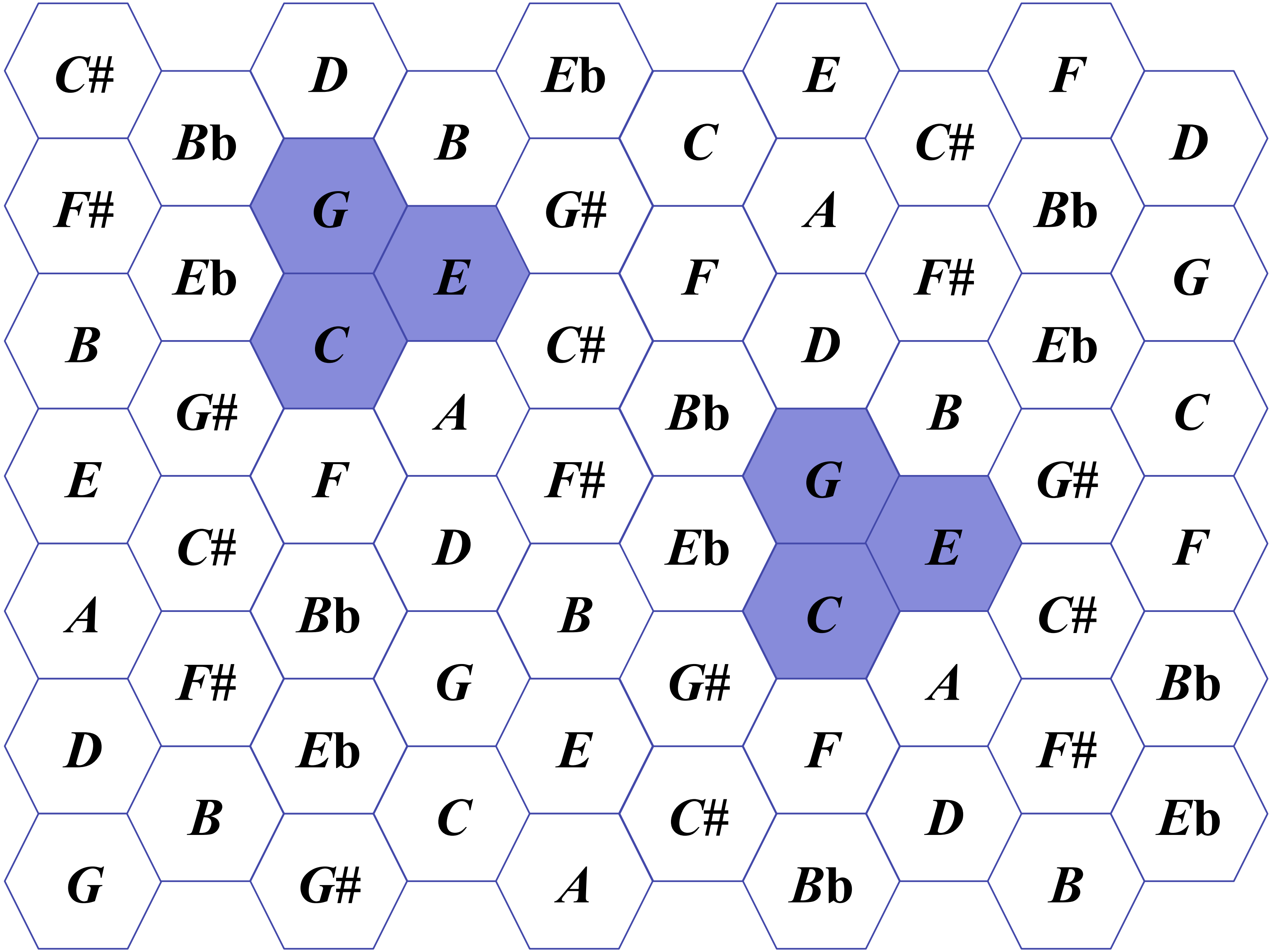




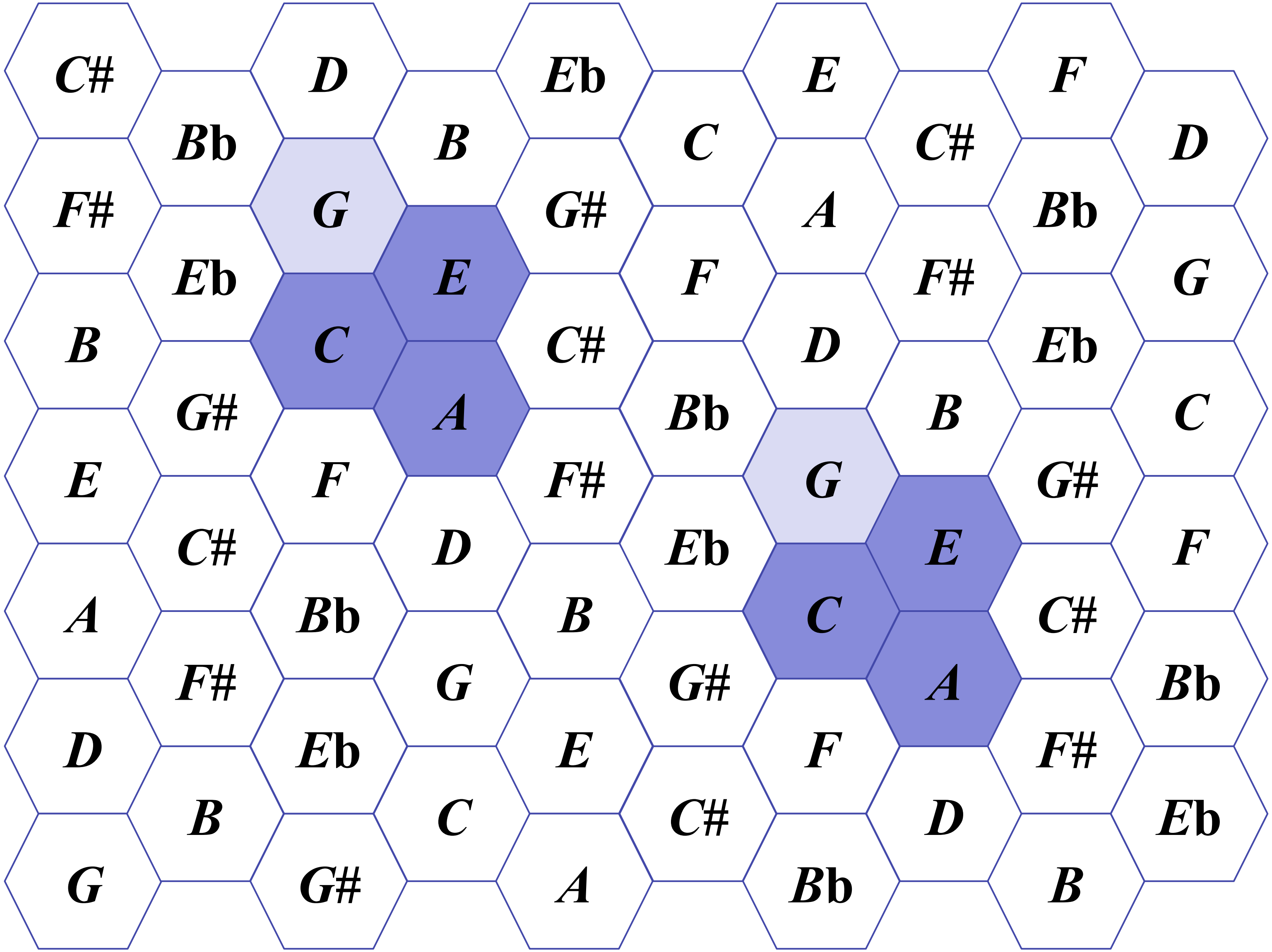
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)



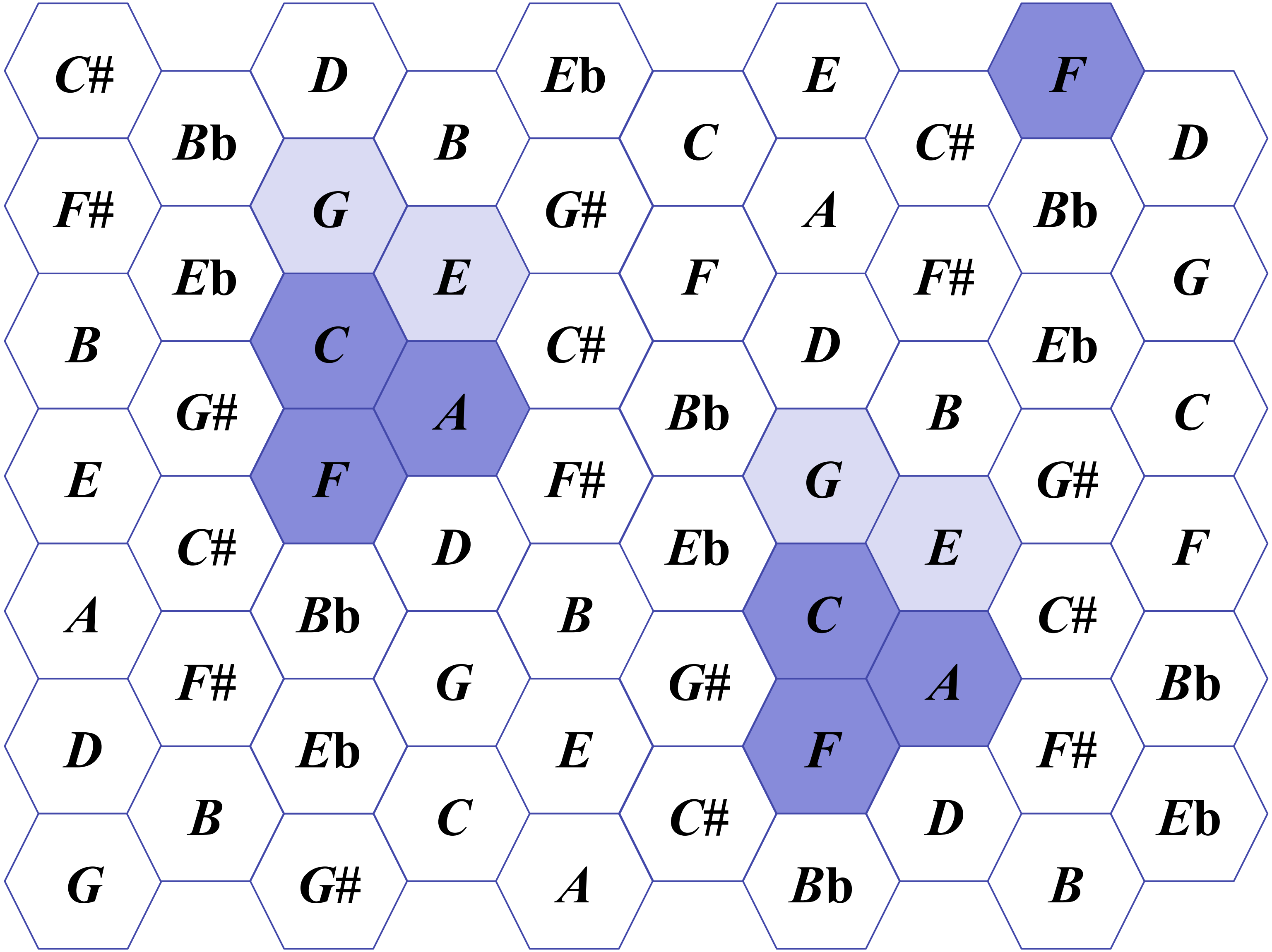
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)



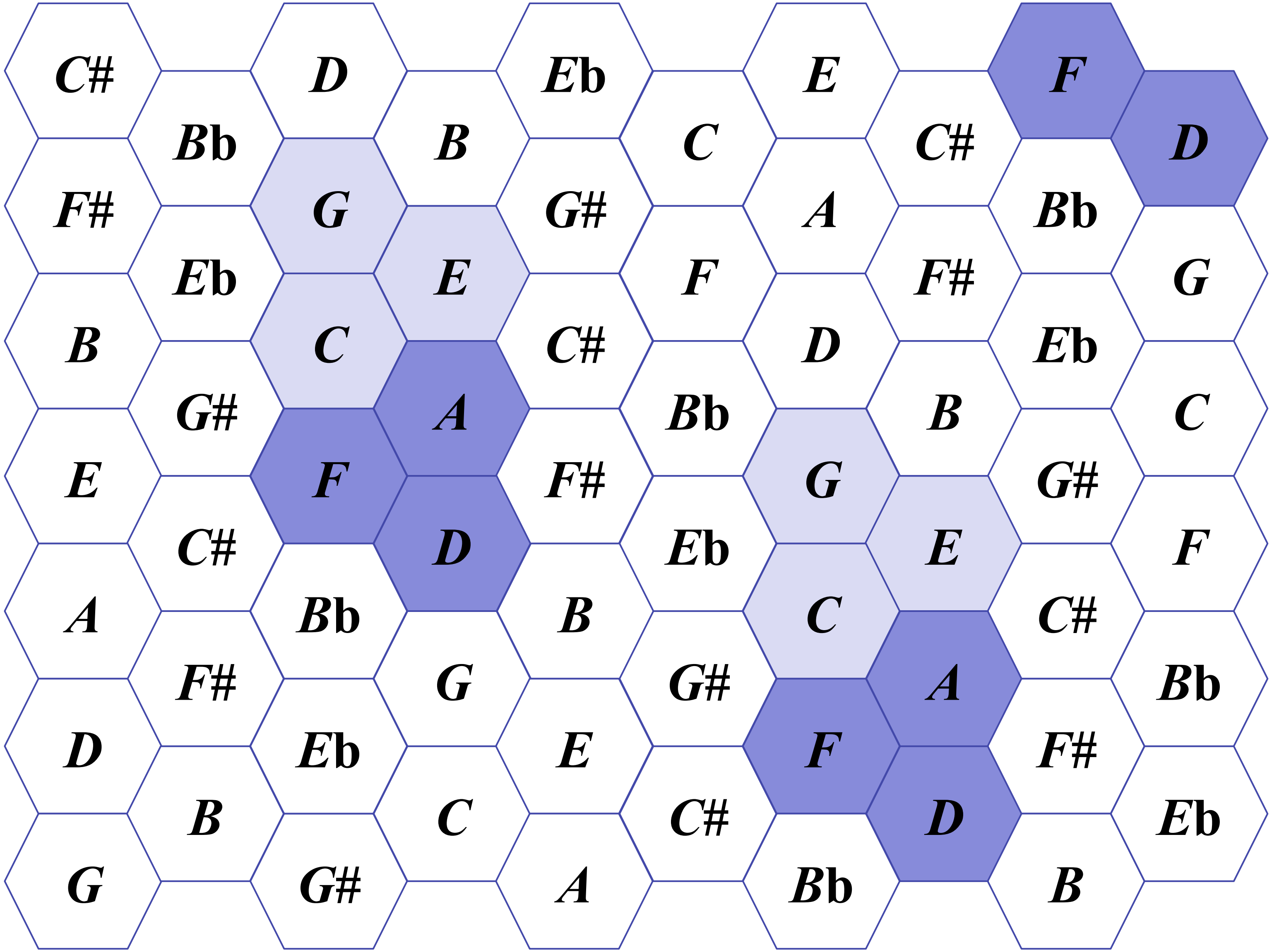
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)



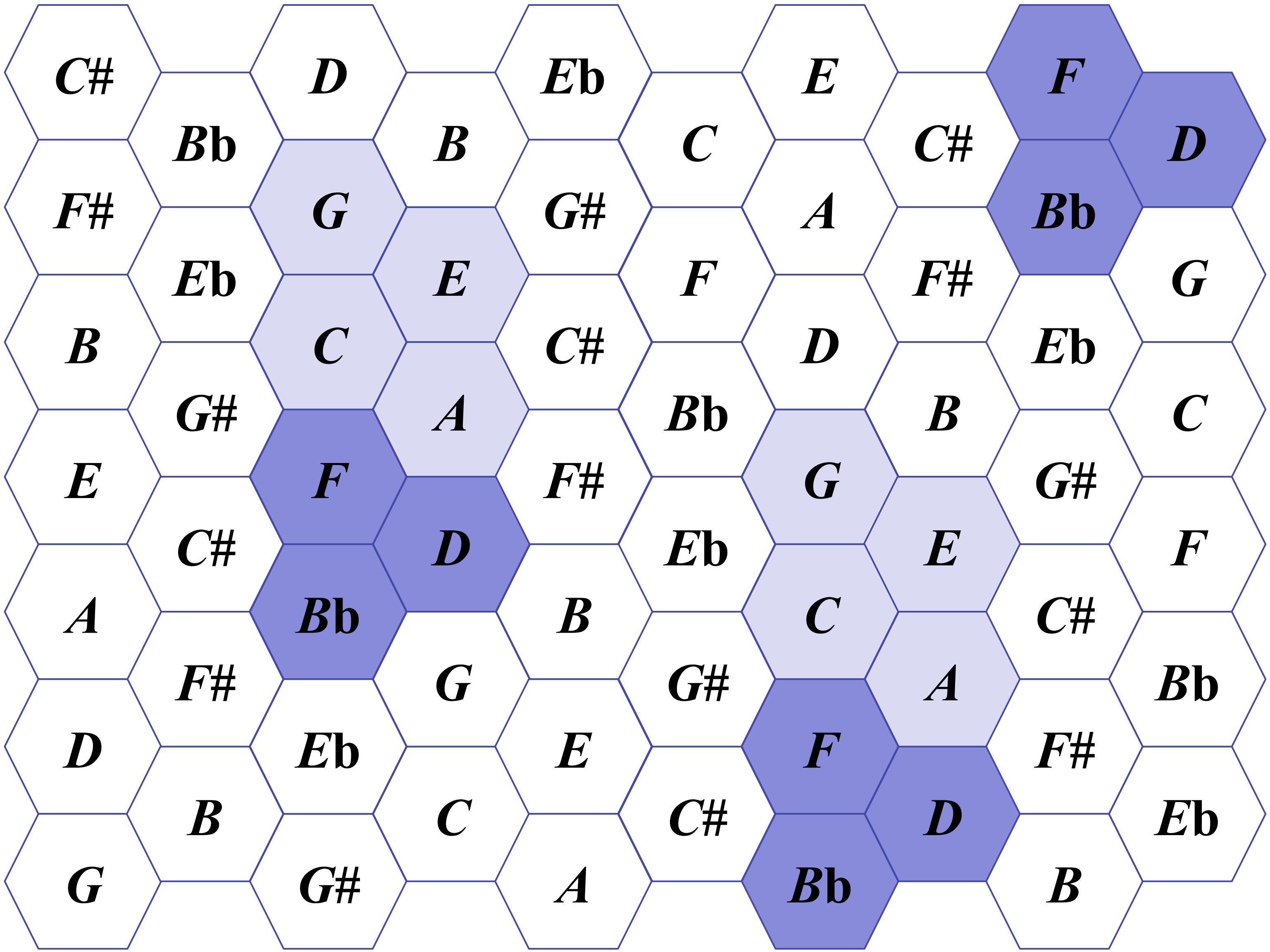
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)



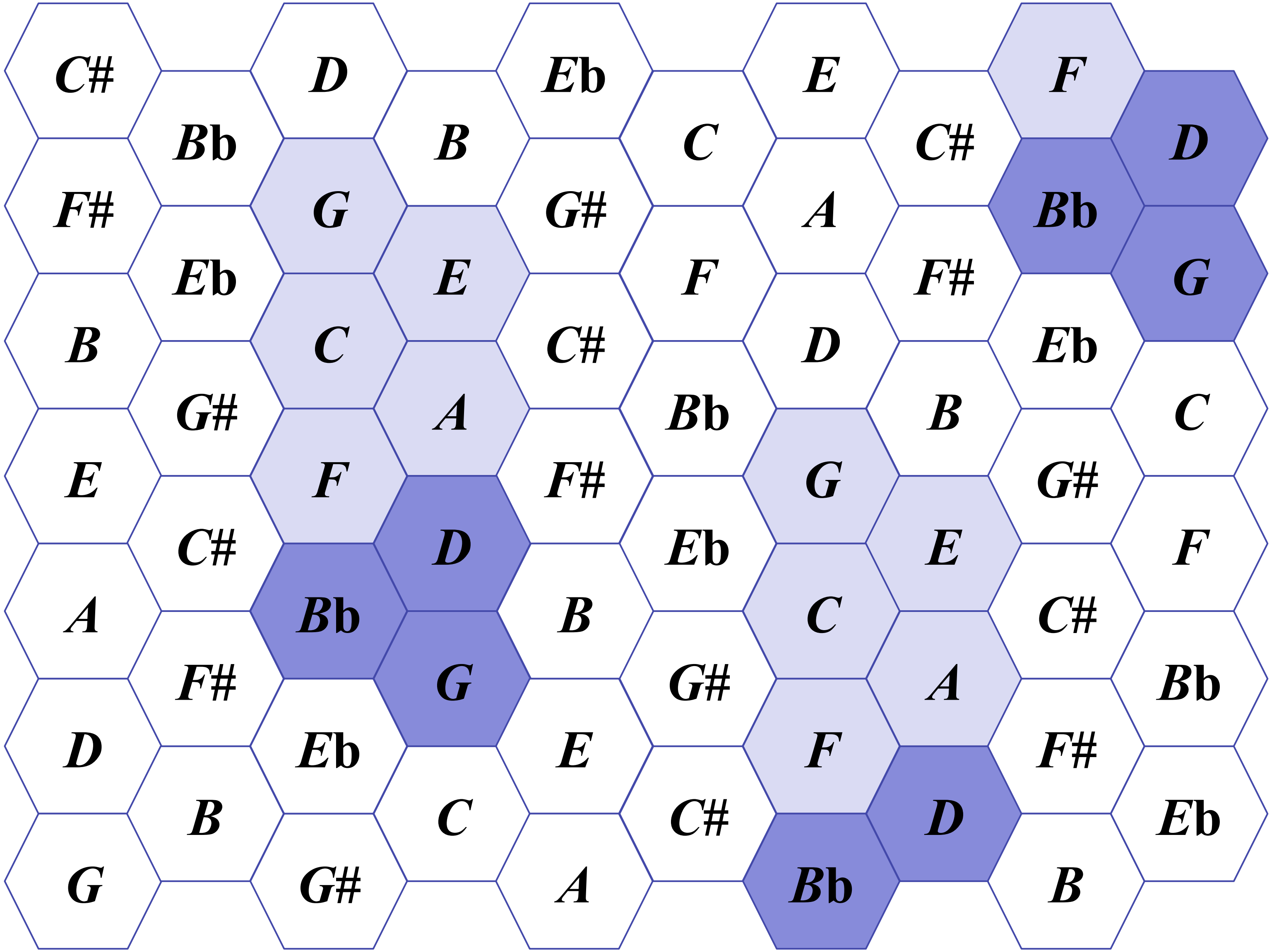
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)



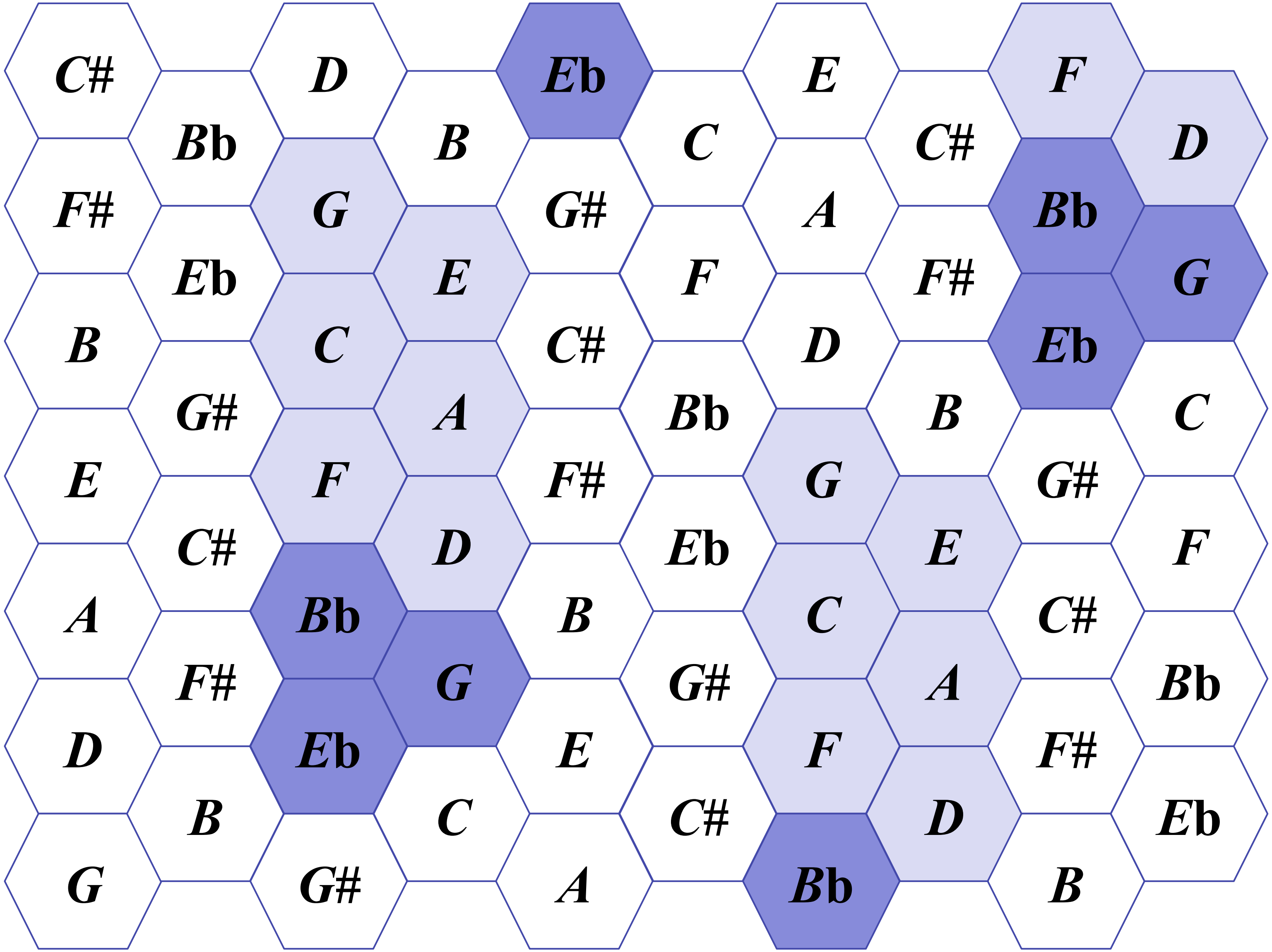
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9
(L. van Beethoven)



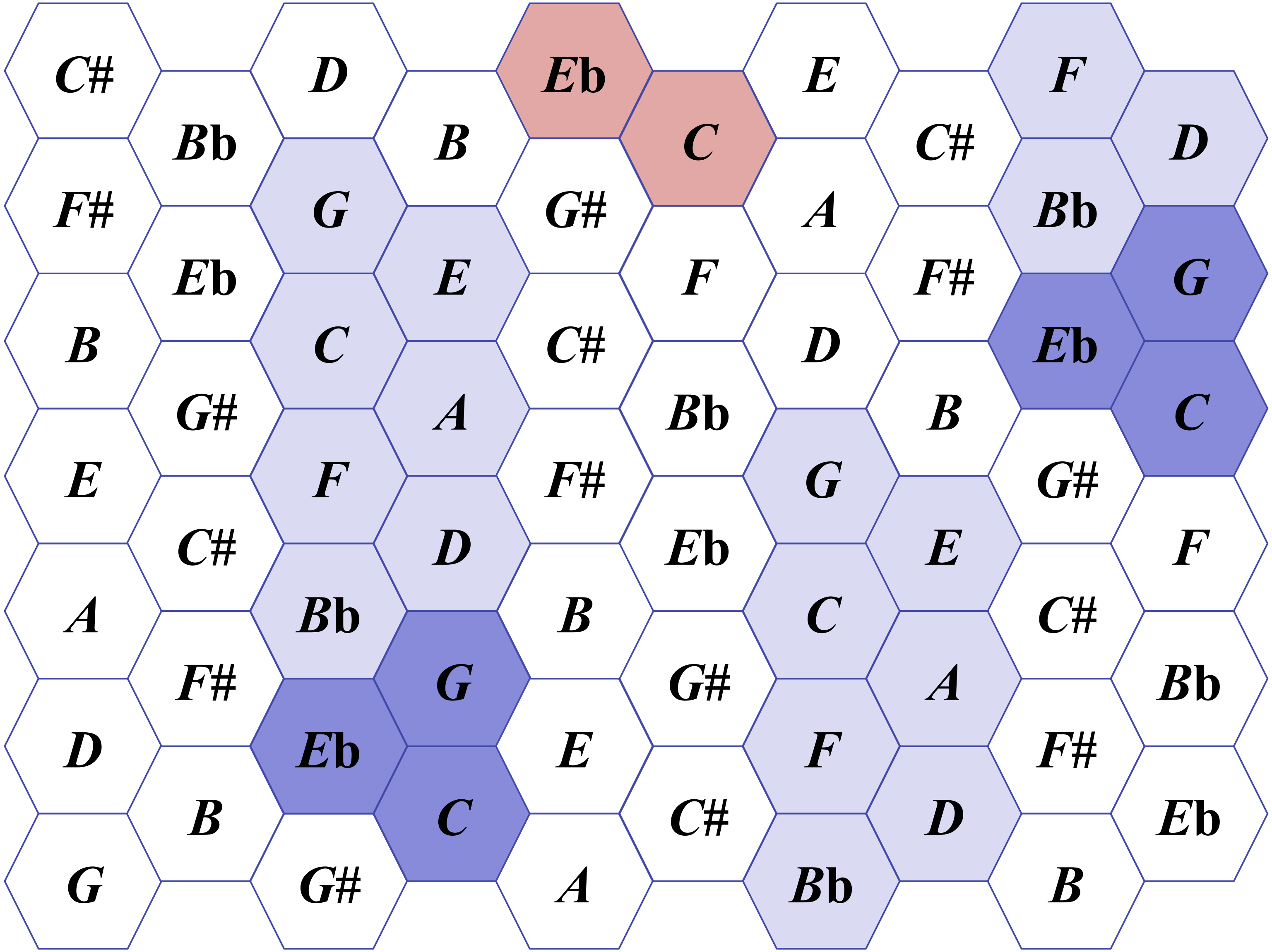
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)



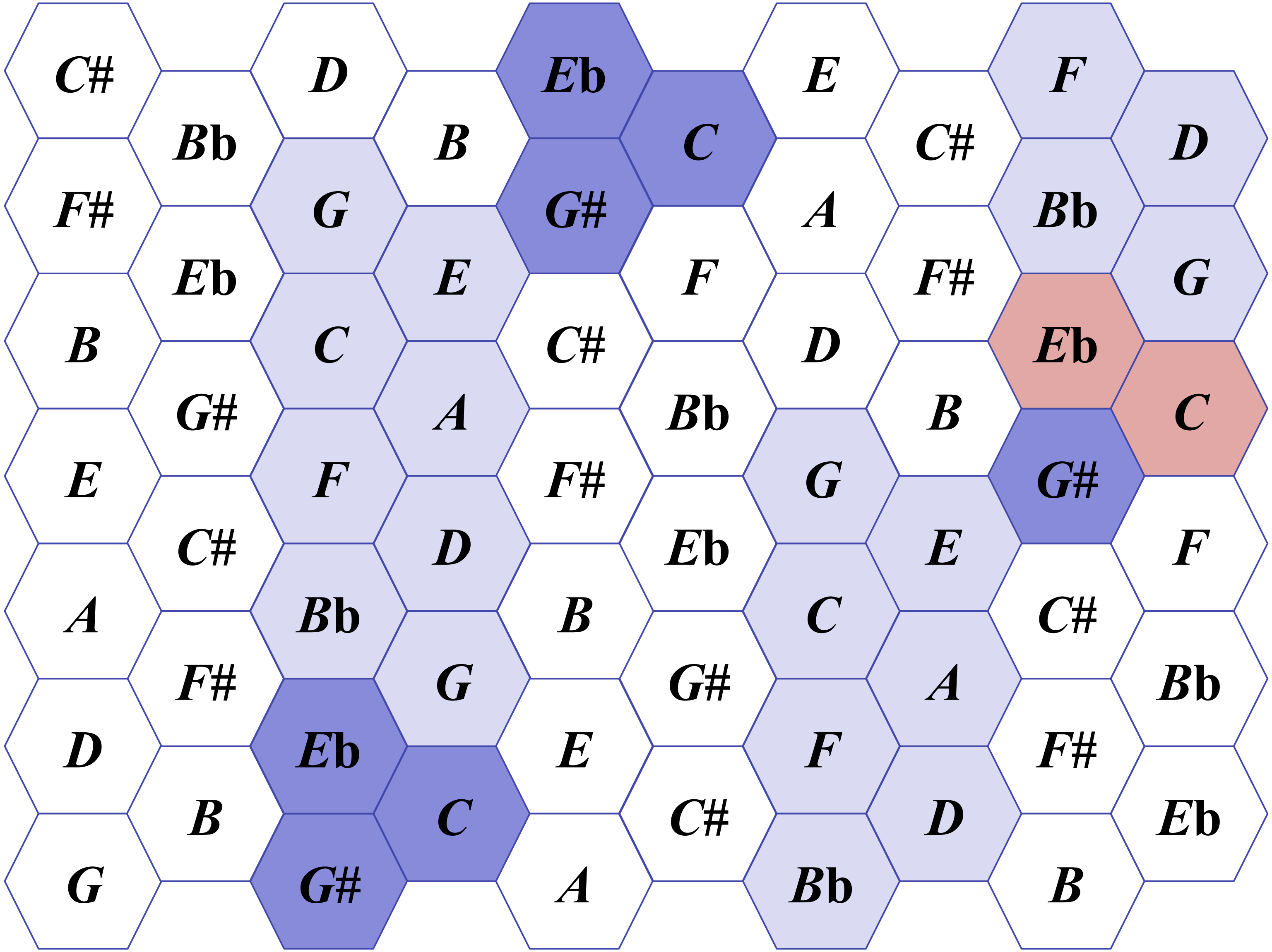
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9
(L. van Beethoven)



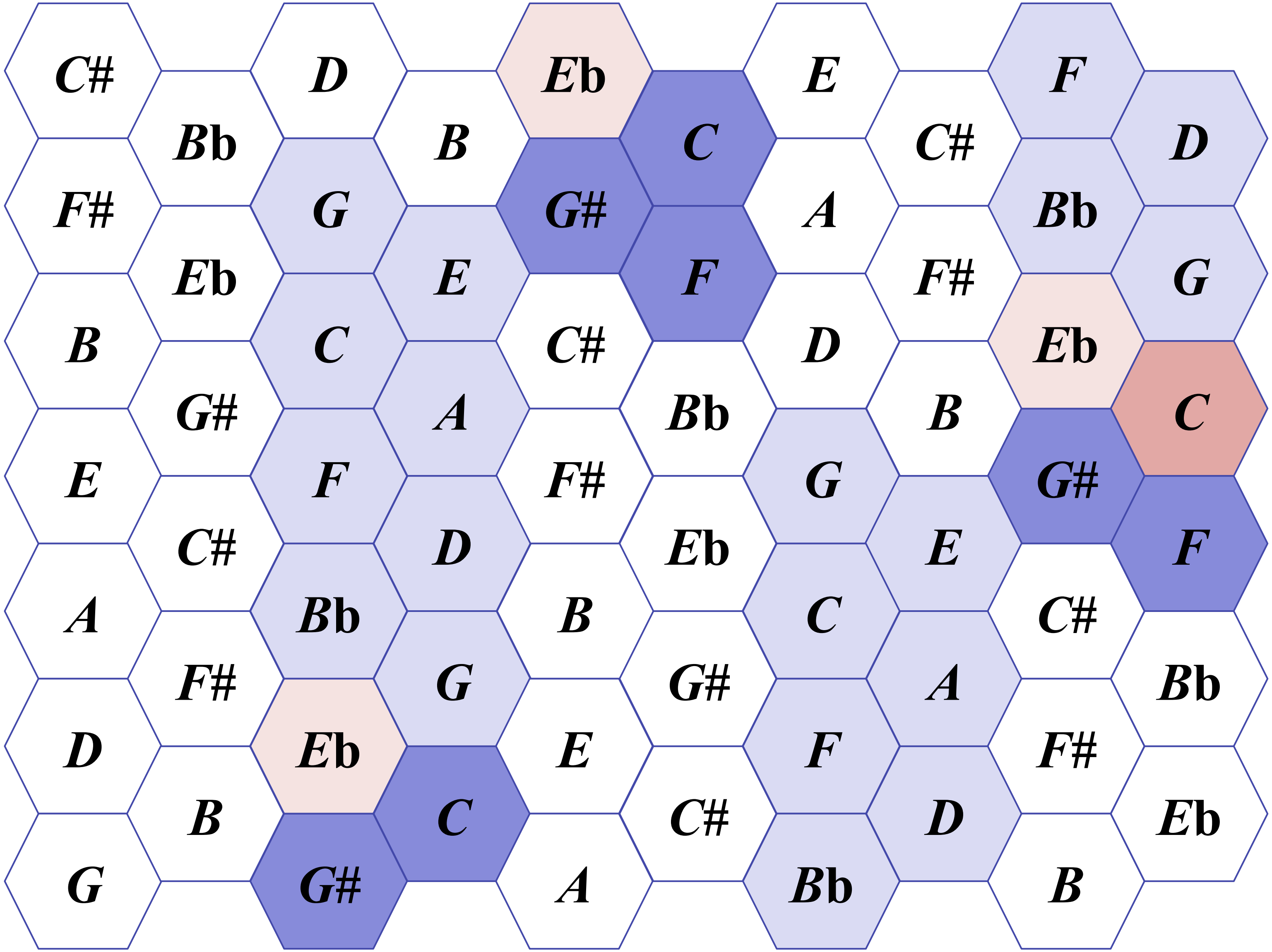
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9
(L. van Beethoven)



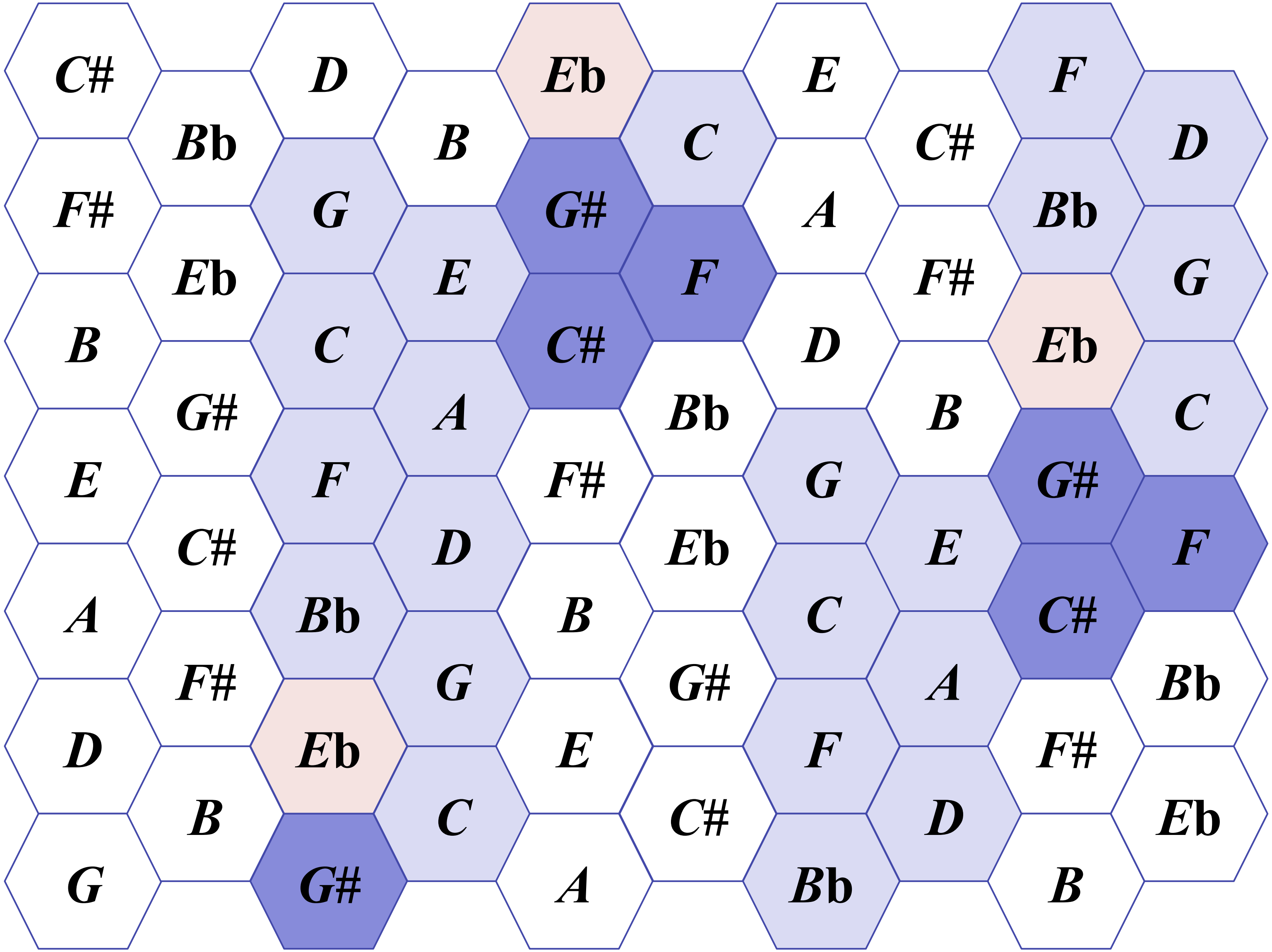
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)



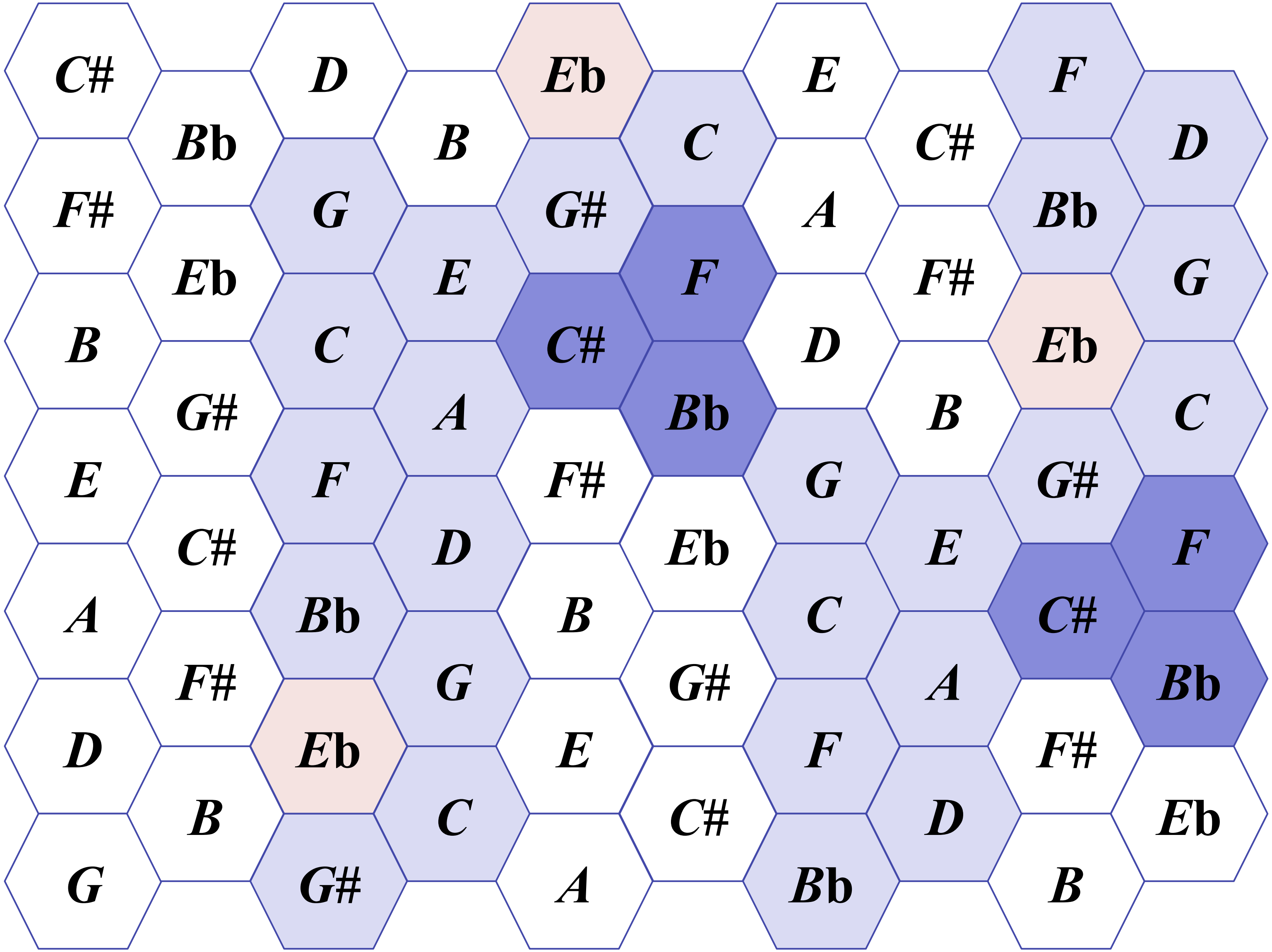
Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9
(L. van Beethoven)



Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)



Extract of the 2nd movement of the Symphony No. 9 (L. van Beethoven)

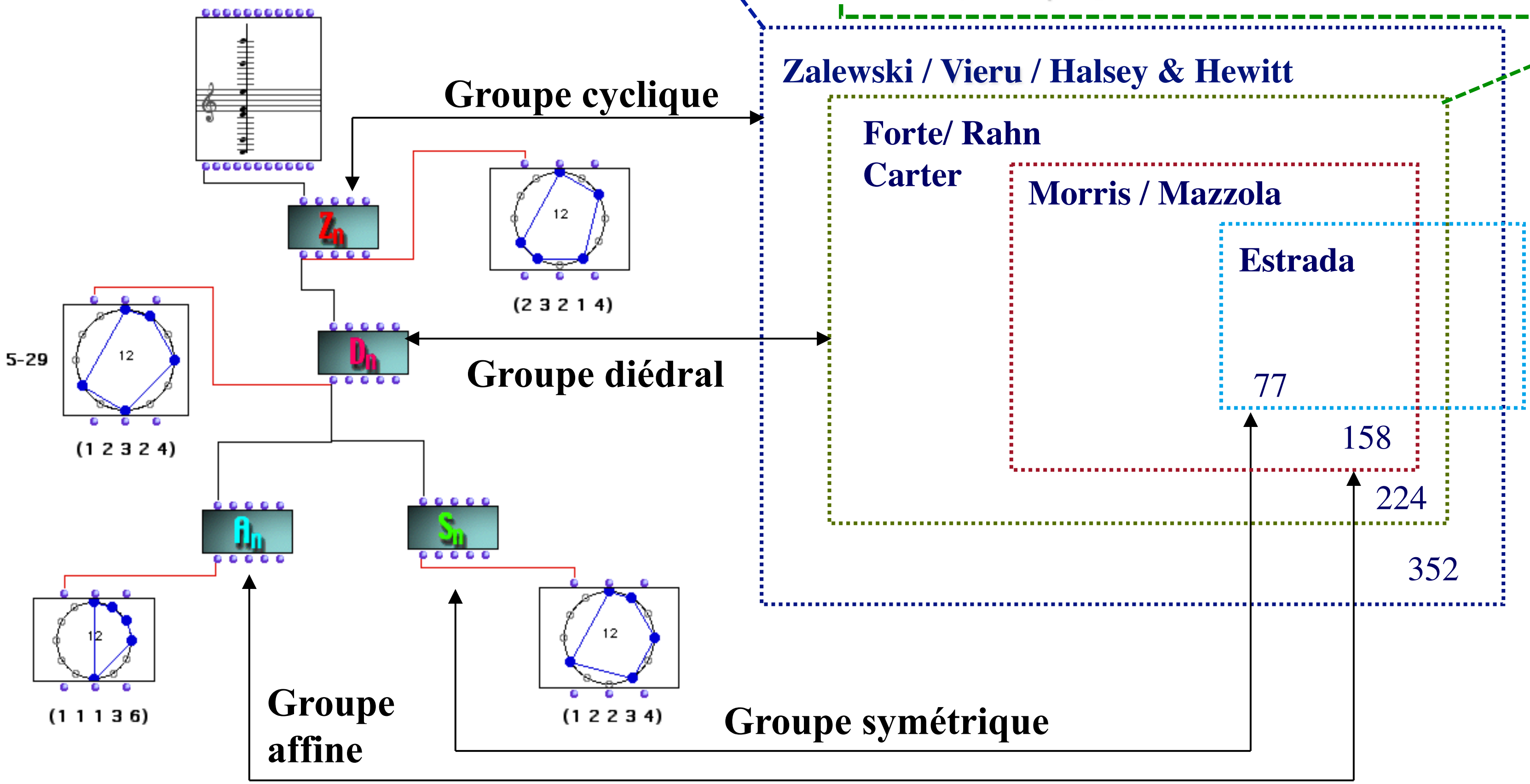


Classification paradigmatique des structures musicales

$$\#\text{ of }k\text{-chords} = \frac{1}{n}\sum_{j|(n,k)} \phi(j)\binom{n/j}{k/j} = \frac{1}{n}\Phi_n(k)$$

$$\#\text{ of }k\text{-chords} = \begin{cases} \frac{1}{2n}\left[\Phi_n(k) + n\binom{(n-1)/2}{[k/2]}\right], & \text{if } n \text{ is odd,} \\ \frac{1}{2n}\left[\Phi_n(k) + n\binom{n/2}{k/2}\right], & \text{if } n \text{ is even and } k \text{ is even,} \\ \frac{1}{2n}\left[\Phi_n(k) + n\binom{(n/2)-1}{[k/2]}\right], & \text{if } n \text{ is even and } k \text{ is odd.} \end{cases}$$

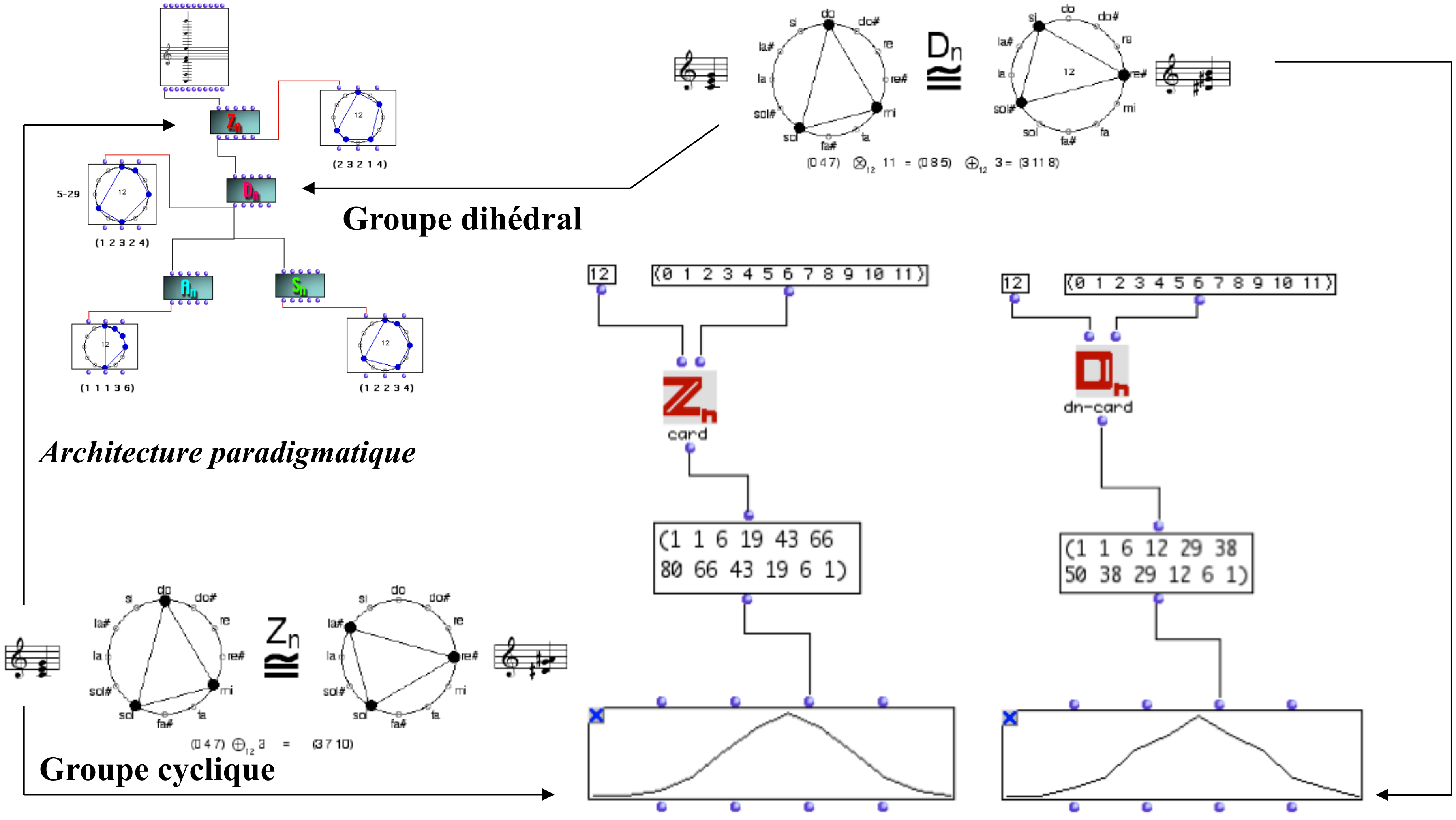
Architecture paradigmatique



- D. Halsey & E. Hewitt: « Eine gruppentheoretische Methode in der Musik-theorie », *Jahresber. Der Dt. Math.-Vereinigung*, 80, 1978.
- D. Reiner: «Enumeration in Music Theory», *Amer. Math. Month*. 92:51-54, 1985
- H. Fripertinger: «Enumeration in Musical Theory», *Beiträge zur Elektr. Musik*,1,1992
- R.C. Read: « Combinatorial problems in the theory of music », *Discrete Math.*, 1997
- H. Fripertinger: « Enumeration of mosaics », *Discrete Math.*, 1999
- H. Fripertinger: « Enumeration of non-isomorphic canons », *Tatra Mt. Math. Publ.*, 2001

Felix Klein

Classes d’équivalence d’accords et groupes de transformations



$G\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_{12}	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1
D_{12}	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1
$\mathrm{Aff}_1(Z_{12})$	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1


Enumération d’accords par rapport à l’action d’un groupe

Transformation	*Cycle representation*	*No. of cycles*	*Fixed configs.*	*Cycle type*	*Cycle index*
T_0	(0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(A)(B)	12	$2^{12} = 4096$	1^{12}	t_1^{12}
T_1	(0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
T_2	(0 2 4 6 8 A)(1 3 5 7 9 B)	2	$2^2 = 4$	6^2	t_6^2
T_3	(0 3 6 9)(1 4 7 A)(2 5 8 B)	3	$2^3 = 8$	4^3	t_4^3
T_4	(0 4 8)(1 5 9)(2 6 A)(3 7 B)	4	$2^4 = 16$	3^4	t_3^4
T_5	(0 5 A 3 8 1 6 B 4 9 2 7)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
T_6	(0 6)(1 7)(2 8)(3 9)(4 A)(5 B)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_7	(0 7 2 9 4 B 6 1 8 3 A 5)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
T_8	(0 8 4)(1 9 5)(2 A 6)(3 B 7)	4	$2^4 = 16$	3^4	t_3^4
T_9	(0 9 6 3)(1 A 7 4)(2 B 8 5)	3	$2^3 = 8$	4^3	t_4^3
T_{10}	(0 A 8 6 4 2)(1 B 9 7 5 3)	2	$2^2 = 4$	6^2	t_6^2
T_{11}	(0 B A 9 8 7 6 5 4 3 2 1)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
I	(0)(1 B)(2 A)(3 9)(4 8)(5 7)(6)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
T_1I	(0 1)(2 B)(3 A)(4 9)(5 8)(6 7)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_2I	(0 2)(1)(3 B)(4 A)(5 9)(6 8)(7)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
T_3I	(0 3)(1 2)(4 B)(5 A)(6 9)(7 8)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_4I	(0 4)(1 3)(2)(5 B)(6 A)(7 9)(8)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
T_5I	(0 5)(1 4)(2 3)(6 B)(7 A)(8 9)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_6I	(0 6)(1 5)(2 4)(3)(7 B)(8 A)(9)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
T_7I	(0 7)(1 6)(2 5)(3 4)(8 B)(9 A)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_8I	(0 8)(1 7)(2 6)(3 5)(4)(9 B)(A)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
T_9I	(0 9)(1 8)(2 7)(3 6)(4 5)(A B)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
$T_{10}I$	(0 A)(1 9)(2 8)(3 7)(4 6)(5)(B)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
$T_{11}I$	(0 B)(1 A)(2 9)(3 8)(4 7)(5 6)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6

Lemme de Burnside

$$n = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |X^g|.$$

$X^g = \{x \in X : gx = x\}$

Julian Hook, « Why are there 29 Tetrachords? A Tutorial on Combinatorics and Enumeration in Music Theory », MTO, 13(4), 2007

d’accords = 1/12[4096+2+4+8+16+2+64+2+16+8+4+2]=4224/12=352

d’accords = 1/24[4224+1152] = 224

Calcul d'orbites via le polynôme de Polya

Transformation	*Cycle representation*	*No. of cycles*	*Fixed configs.*	*Cycle type*	*Cycle index*
T_0	(0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(A)(B)	12	$2^{12} = 4096$	1^{12}	t_1^{12}
T_1	(0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
T_2	(0 2 4 6 8 A)(1 3 5 7 9 B)	2	$2^2 = 4$	6^2	t_6^2
T_3	(0 3 6 9)(1 4 7 A)(2 5 8 B)	3	$2^3 = 8$	4^3	t_4^3
T_4	(0 4 8)(1 5 9)(2 6 A)(3 7 B)	4	$2^4 = 16$	3^4	t_3^4
T_5	(0 5 A 3 8 1 6 B 4 9 2 7)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
T_6	(0 6)(1 7)(2 8)(3 9)(4 A)(5 B)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_7	(0 7 2 9 4 B 6 1 8 3 A 5)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
T_8	(0 8 4)(1 9 5)(2 A 6)(3 B 7)	4	$2^4 = 16$	3^4	t_3^4
T_9	(0 9 6 3)(1 A 7 4)(2 B 8 5)	3	$2^3 = 8$	4^3	t_4^3
T_{10}	(0 A 8 6 4 2)(1 B 9 7 5 3)	2	$2^2 = 4$	6^2	t_6^2
T_{11}	(0 B A 9 8 7 6 5 4 3 2 1)	1	$2^1 = 2$	12^1	t_{12}^1
I	(0)(1 B)(2 A)(3 9)(4 8)(5 7)(6)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
T_1I	(0 1)(2 B)(3 A)(4 9)(5 8)(6 7)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_2I	(0 2)(1)(3 B)(4 A)(5 9)(6 8)(7)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
T_3I	(0 3)(1 2)(4 B)(5 A)(6 9)(7 8)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_4I	(0 4)(1 3)(2)(5 B)(6 A)(7 9)(8)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
T_5I	(0 5)(1 4)(2 3)(6 B)(7 A)(8 9)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_6I	(0 6)(1 5)(2 4)(3)(7 B)(8 A)(9)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
T_7I	(0 7)(1 6)(2 5)(3 4)(8 B)(9 A)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
T_8I	(0 8)(1 7)(2 6)(3 5)(4)(9 B)(A)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
T_9I	(0 9)(1 8)(2 7)(3 6)(4 5)(A B)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6
$T_{10}I$	(0 A)(1 9)(2 8)(3 7)(4 6)(5)(B)	7	$2^7 = 128$	$1^2 2^5$	$t_1^2 t_2^5$
$T_{11}I$	(0 B)(1 A)(2 9)(3 8)(4 7)(5 6)	6	$2^6 = 64$	2^6	t_2^6

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{24}\Big[&(x+y)^{12} && \text{(from } T_0\text{)}\\
&+4(x^{12}+y^{12}) && \text{(from } T_1, T_5, T_7, T_{11}\text{)}\\
&+2(x^6+y^6)^2 && \text{(from } T_2, T_{10}\text{)}\\
&+2(x^4+y^4)^3 && \text{(from } T_3, T_9\text{)}\\
&+2(x^3+y^3)^4 && \text{(from } T_4, T_8\text{)}\\
&+7(x^2+y^2)^6 && \text{(from } T_6, T_1I, T_3I, T_5I, T_7I, T_9I, T_{11}I\text{)}\\
&+6(x+y)^2(x^2+y^2)^5\Big], && \text{(from } I, T_2I, T_4I, T_6I, T_8I, T_{10}I\text{)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x^{12} + x^{11}y + 6x^{10}y^2 + 12x^9y^3 + 29x^8y^4 + 38x^7y^5 + 50x^6y^6\\
&+ 38x^5y^7 + 29x^4y^8 + 12x^3y^9 + 6x^2y^{10} + xy^{11} + y^{12}.
\end{aligned}
$$

$G \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_{12}	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1
D_{12}	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1
$\mathrm{Aff}_1(Z_{12})$	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1

Enumération des modes à transpositions limitées de Messiaen

R.C. Read: « Combinatorial problems in the theory of music », *Discrete Math.*, 1997

M. Broué : « Les tonalités musicales vues par un mathématicien », 2002

$$A_n = \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) 2^k$$

$$s_d(n) = \sum_{\{e\,;\,(e|(n/d))\}} \mu\left(\frac{n/d}{e}\right) 2^e$$

$$\begin{cases} \mu(k) = 0 & \text{si } k \text{ est divisible par un carré,} \\ \mu(k) = (-1)^m & \text{si } k \text{ est produit de } m \text{ nombres premiers distincts.} \end{cases}$$

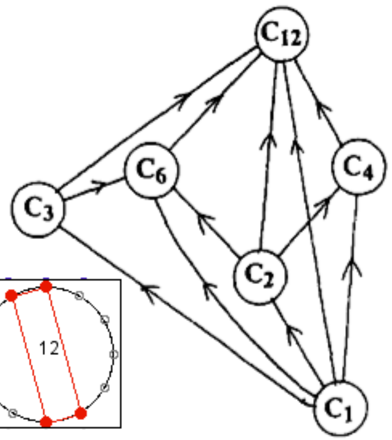
$A_6 = \mu(6)2 + \mu(3)2^2 + \mu(2)2^3 + \mu(1)2^6 =$
$= (-1)^2 2 + (-1)2^2 + (-1)\, 2^3 + 2^2 =$
$= 2 - 4 - 8 + 64 =$
$= 54$

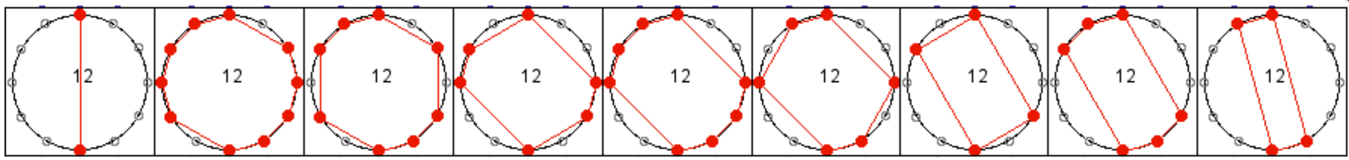
$\boxed{54/6 = 9}$

$\boxed{12/6 = 2}$

Table 1

Number of notes / Symmetry	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1	5	18	40	66	75	66	40	18	5	1	
2			1		2		3		2		1		
3				1			1			1			
4					1				1				
6							1						
12	1												1
All scales	1	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1

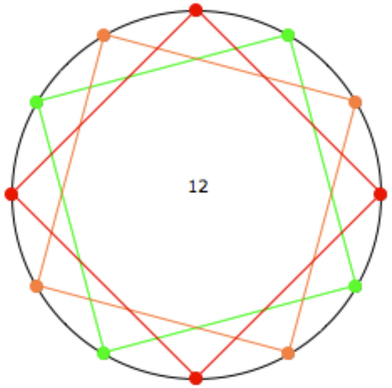


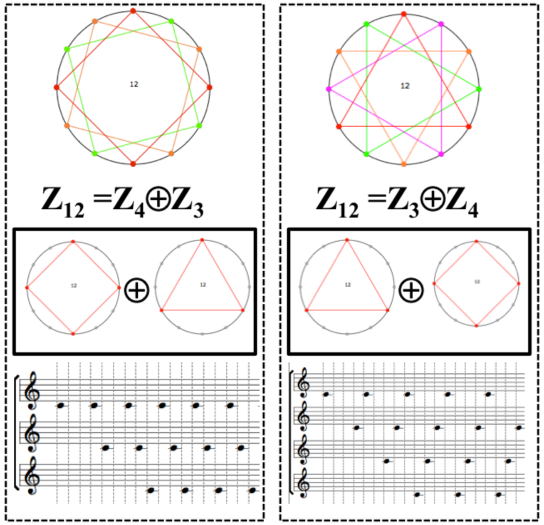


Factorisation de groupes et périodicités des facteurs

$A<Z_n$

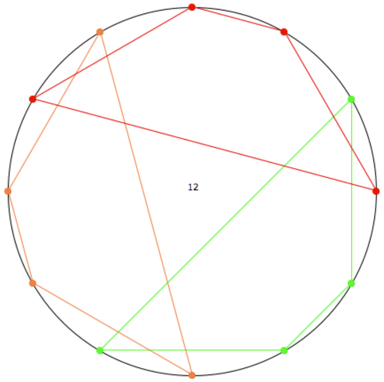
$B<Z_n$

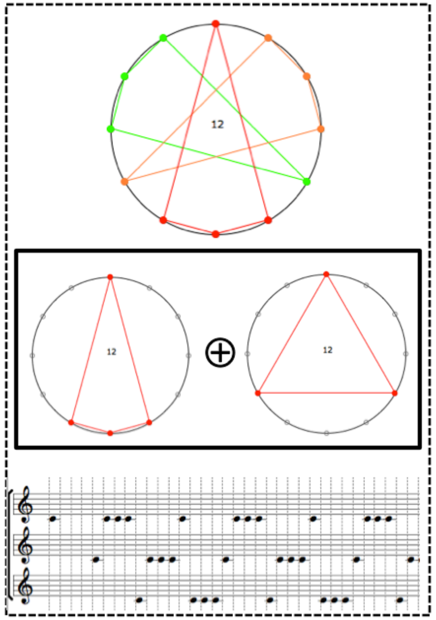




$A \subset Z_n$

$B<Z_n$

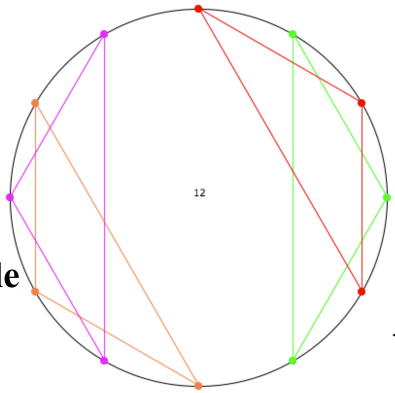


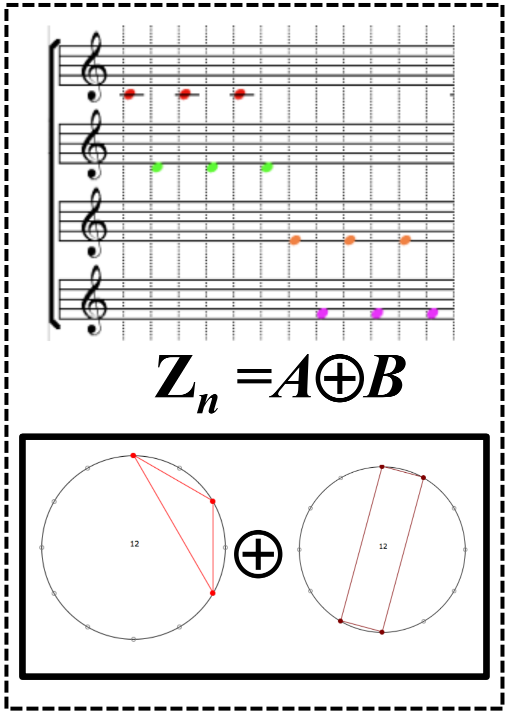


$A \subset Z_n$

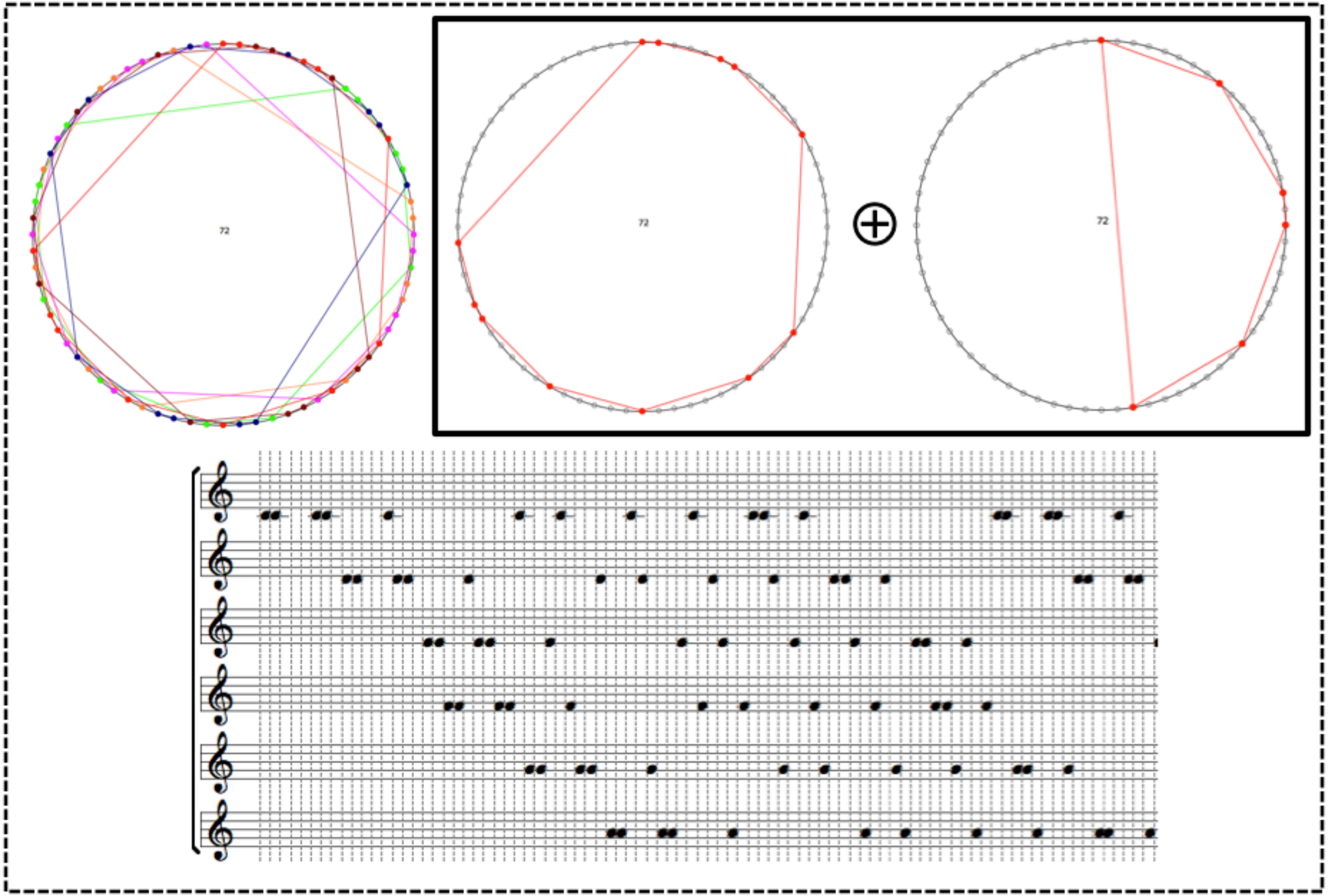
$B \subset Z_n$

sous-ensemble périodique





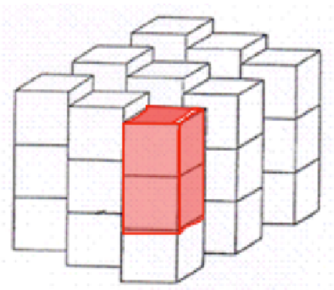
Factorisations sans périodicité interne (canons de Vuza)



Les canons mosaïques comme problème « mathémusical »

Le problème de Minkowski/Hajos

Dans un pavage simple [*simple lattice tiling*] d'un espace à *n* dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension *n*-1.

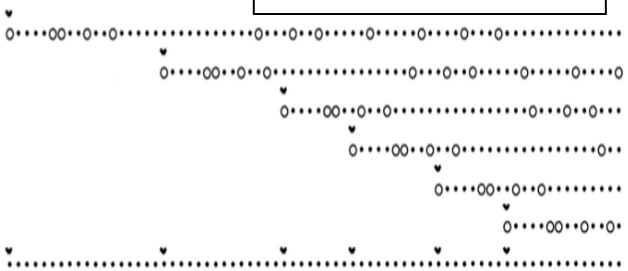


1907-1942

Les canons mosaïques de Vieru/Vuza

Un canon de Vuza est une factorisation d'un groupe cyclique en somme directe de deux sous-ensembles non-périodiques

$$\boxed{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = R \oplus S}$$



1991

Lien entre Minkowski et Vuza (Andreatta, 1996)

Groupes de Hajós (*good groups*)

Z/*n*Z avec $n \in \{p^\alpha, p^\alpha q, pqr, p^2q^2, p^2qr, pqrs\}$ **où** p, q, r, s, **sont des nombres premiers distincts**

Groupes non-Hajós (*bad groups*)

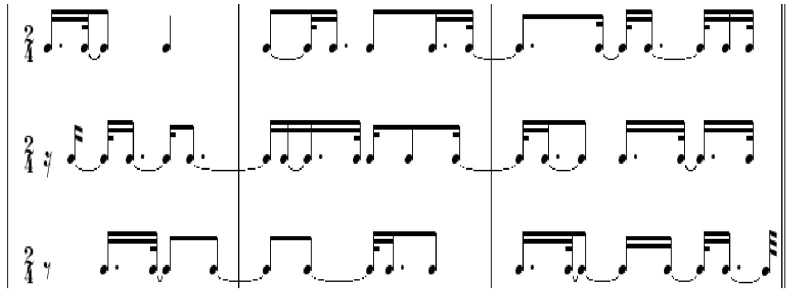
72
108 120 144 168 180
200 216 240 252 264 270 280 288
300 312 324 336 360 378 392 396
400 408 432 440 450 456 468 480
500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
800 810 816 828 864 880 882 888…

1996

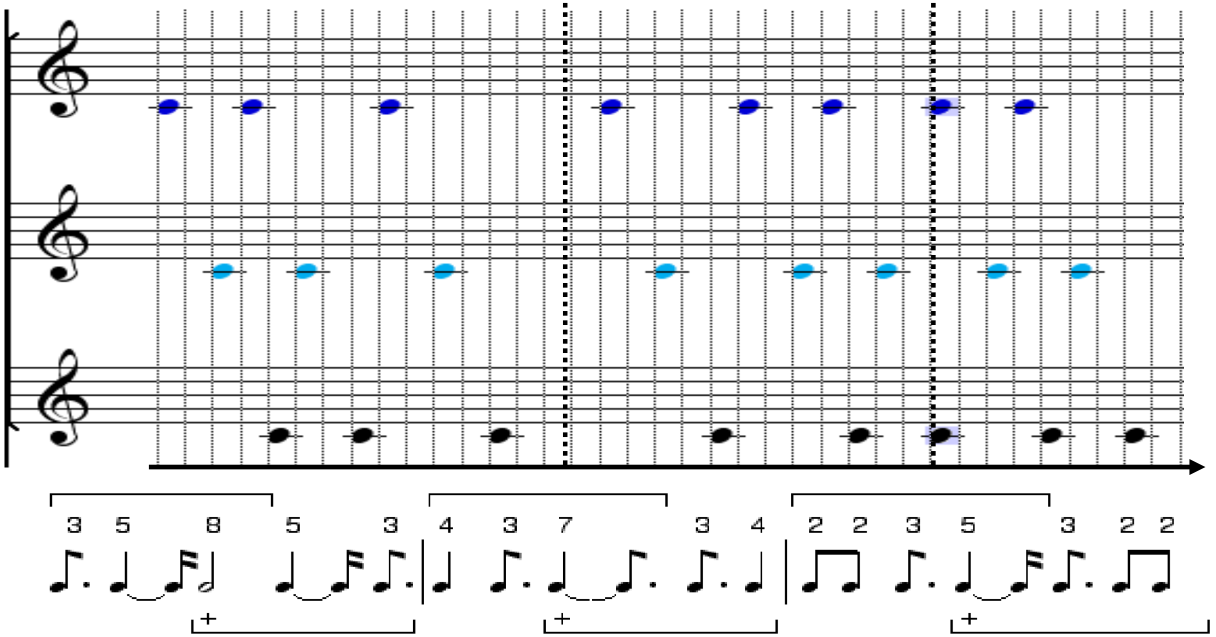
M. Andreatta, « Constructing and Formalizing Tiling Rhythmic Canons: a historical Survey of a "Mathemusical" Problem », invited paper, Special Issue « Tiling Problems in Music », *Perspectives of New Music*, J. Rahn (ed.), University of Washington, Seattle (2011).

Canons rythmiques et pavage de l'espace

Harawi (1945)



Visions de l'Amen (1943)

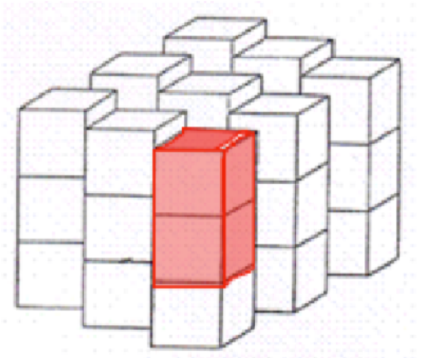


Modèle rythmique

« …il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, jamais au même moment ni au même endroit […]. C'est du désordre organisé »

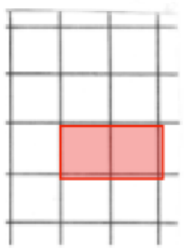
O. Messiaen : *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie*, tome 2, Alphonse Leduc, Paris, 1992

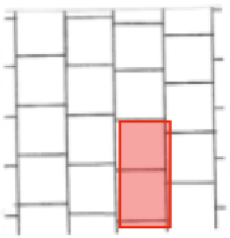
De la Conjecture de Minkowski aux groupes de Hajos



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension n-1.





(Cf. S. Stein, S. Szabó : *Algebra and Tiling*, 1994)

Théorème de Hajós (1942)

Soit G un groupe abélien fini et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n éléments de G. Si l'on suppose que le groupe admet comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_1 \ldots A_n$

$$A_1 = \{1, a_1, \ldots, a_1^{m_1-1}\}, A_2 = \{1, a_2, \ldots, a_2^{m_2-1}\}, \ldots, A_n = \{1, a_n, \ldots, a_n^{m_n-1}\}$$

avec $m_i > 0$ pour tout i=1, 2, …, n, alors un des A_i est un groupe

Groupes de Hajos (good groups)

Rédei 1947 (p, p)

Hajós 1950 Z

Z/nZ avec $n = p^\alpha$

De Brujin 1953 (p^α, q)

(p, q, r)

Sands 1957 (p^2, q^2)

(p^2, q, r)

(p, q, r, s)

Sands 1959 $(2^2, 2^2)$

$(3^2, 3)$

$(2^n, 2)$

Sands 1962 $(p, 3, 3)$

$(p, 2^2, 2)$

$(p, 2, 2, 2, 2)$

$(p^2, 2, 2, 2)$

$(p^3, 2, 2)$

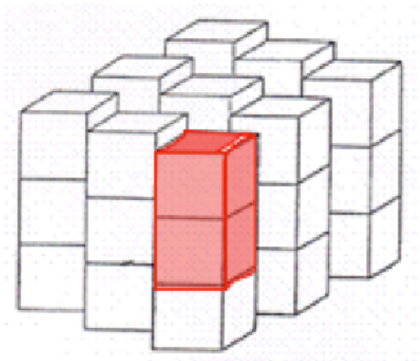
$(p, q, 2, 2)$

Sands 1964 Q

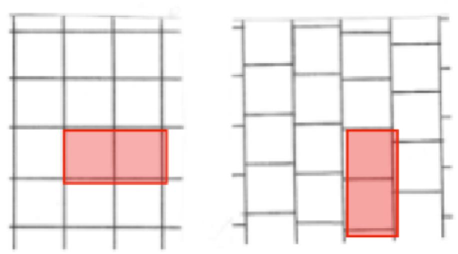
Z+Z/pZ

Q+Z/pZ

Quelques versions faibles de la conjecture de Minkowski



Conjecture de Minkowski (1896/1907)
Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension n-1.



- *Les quatre conditions de la Conjecture de Minkowski*
  [1] Les cubes sont tous obtenus par translation
  [2] Les vecteurs de translations forment un réseau [lattice]
  [3] Les parties internes des cubes sont disjointes
  [4] Tout point de l'espace qui n'est pas dans le bord d'un cube est contenu exactement dans un cube

- ***Conjecture de Keller* (1930) = *Minkowski* – [2]**
  ➔Vraie pour $n \leq 6$ (Perron, 1940)
  ➔ Fausse pour $n \geq 10$ (Lagarias et Shor, 1992)
  ➔ Fausse pour n=8 et n=9 (Mackey, 2000)
  ➔ Ouverte pour n=7

- ***Conjecture de Furtwangler* = *Minkowski* – [3 et 4] + nouvelle condition :**
  [4'] Tout point de l'espace qui n'est pas dans le bord de chaque cube est contenu dans exactement k cubes
  ➔ La conjecture est vraie ssi $n \leq 3$ (Hajos 1941)

- ***Conjecture semi-périodique de Hajos* (1950) : toute factorisation d'un groupe $G = A+B$ *est semipériodique* i.e. $B=B_1, \ldots, B_m$ *et s'il existe un sousgroupe* $G'=\{g_1,\ldots, g_m\}$ telle que $A+B_i=g_i+A+B_1$.**

Groupes non Hajos et Canons de Vuza

Groupes non-Hajós (bad groups)

72
108 120 144 168 180
200 216 240 252 264 270 280 288
300 312 324 336 360 378 392 396
400 408 432 440 450 456 468 480
500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
800 810 816 828 864 880 882 888…

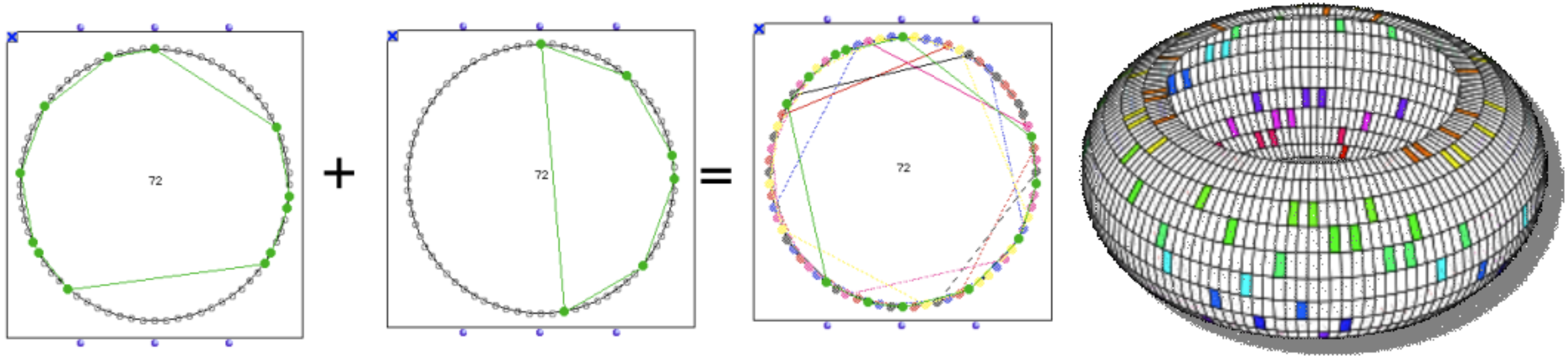
Groupes Hajós (good groups)

Z/*n*Z avec

$n \in \{p^\alpha, p^\alpha q, pqr, p^2q^2, p^2qr, pqrs\}$

où *p*, *q*, *r*, *s*, sont des nombres premiers distincts

Problème ouvert : Trouver un algorithme qui permet d'obtenir toutes le factorisations d'un groupe cyclique non-Hajos en somme directe de deux sous-ensembles non périodiques (i.e. classifier tous les Canons de Vuza).



Classification « paradigmatique » des canons mosaïques de Vuza

Résultat : uniquement deux « types » de canons différents (à une *transformation affine* près, i.e. $f: Z_{72} \rightarrow Z_{72}$ t.q. $f(x)=ax+b$ avec $a \in (Z_{72})^*$ et $b \in Z_{72}$

- **R. Tijdeman: “Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets”, *Number Theory*, Cambridge University Press, 1995. The fundamental Lemma: R pave Z_n => aR pave Z_n $<a,n>=1$**

{ Z_n }

R
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(20 3 1 5 6 9 4 11 6 3 3 1)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(6 13 4 7 6 6 1 4 19 1 4 1)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)
(3 3 17 4 3 6 6 5 4 15 5 1)

S
(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)

{ D_n }

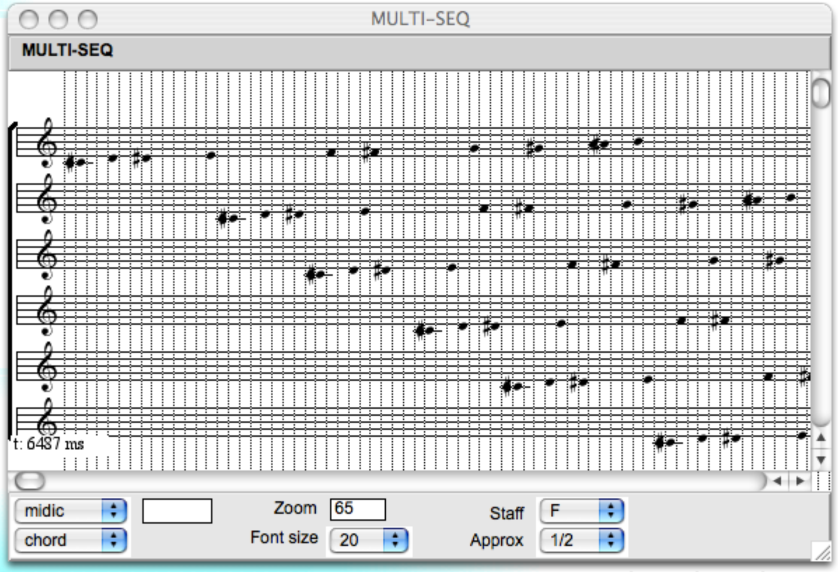
R
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)
(1 5 15 4 5 6 6 3 4 17 3 3)

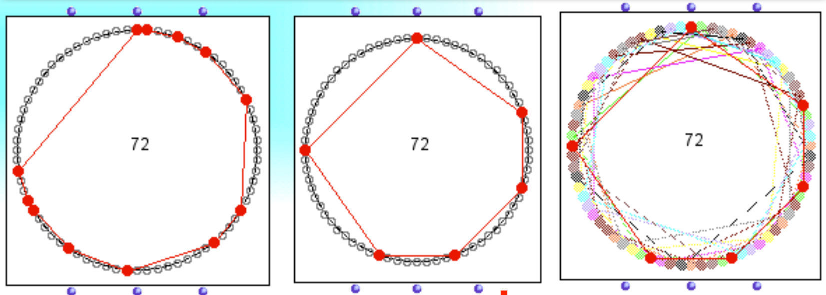
S
(8 8 2 8 8 38)
(16 2 14 2 16 22)
(14 8 10 8 14 18)

{ Af_n }

R
(1 3 3 6 11 4 9 6 5 1 3 20)
(1 4 1 19 4 1 6 6 7 4 13 6)

S
(14 8 10 8 14 18)





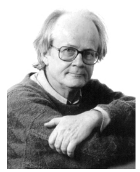
Z/72Z =R⊕S

Collection « Musique/ Sciences » (dir. J.-M. Bardez & M. Andreatta)

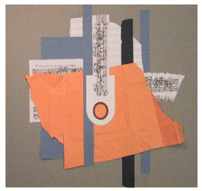

F. Lévy


G. Bloch


M. Lanza


T. Johnson

1999



Conjecture spectrale et problème de Minkowski/Hajos

La conjecture de Fuglede

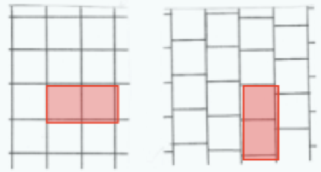
Un sous-ensemble de R^n pave par translation *ssi* il est spectral (i.e. il admet une décomposition hilbertienne d'exponentiels complexes)

J. Func. Anal. 16, 1974.

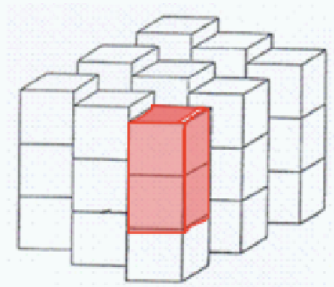
Fausse en dim. $n \geq 3$
Ouverte en dim. 1 et 2

?

Le problème de Minkowski/Hajos



Dans un pavage simple [*simple lattice tiling*] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension n-1.



DEFINITION 6 *A subset A of some vector space (say $\mathbb{R}^n$) is spectral iff it admits a Hilbert base of exponentials, i.e. if any map $f \in L^2(A)$ can be written*

$$f(x) = \sum f_k \exp(2i\pi\lambda_k.x)$$

for some fixed family of vectors $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ where the maps $e_k : x \mapsto \exp(2i\pi\lambda_k.x)$ are mutually orthogonal (i.e. $\int_A \overline{e_k} e_j = 0$ whenever $k \neq j$).

(M. Andreatta et C. Agon, eds 2009)

Les conjectures de Minkowski/Fuglede et les canons rythmiques

- Minkowski's conjecture and Hajos algebraic solution
- The classification of Hajos groups (Hajos, de Bruijn, Sands, …) and polynomial representations (Redei)
- Vuza Canons and their enumeration (Vuza, Fripertinger, …)
- The « Foundamental Lemma » in group factorization (Tijdeman)
- Classification of factorizations for non-Hajos groups (Vuza, Andreatta, Agon, Amiot, Fripertinger, …)
- Computational model (Andreatta, Agon, Amiot, Noll, Jedrzejewski…)
- The Tiling of the line problem and Fuglede's Conjecture (Tijdeman, Lagarias, …)
- Link between C&M conditions and Fuglede Conjecture (Laba, Kolountzakis; …)
- Given a finite set that tiles **Z**, what will be the period (Kolountzakis, Steinberger, …)
- Fuglede's Conjecture and Vuza's Canons (Amiot, Matolcsi, Kolountzakis, …)
- …

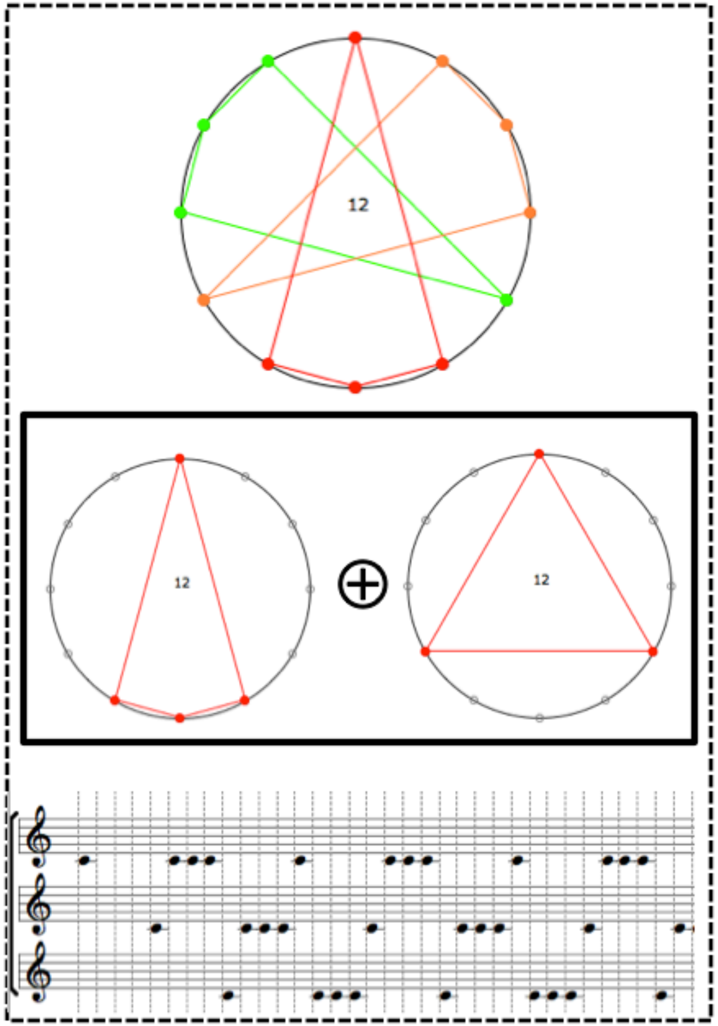
• R. Tijdeman: "Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets", *Number Theory*, Cambridge University Press, 1995. The fundamental Lemma:
A tiles $\mathbf{Z}_n$ => pA tiles $\mathbf{Z}_n$ when $<p,n>=1$

• I. Laba : "The spectral set conjecture and multiplicative properties of roots of polynomials", *J. Lond Math Soc*, 2002
T1 + T2 => spectral
T2 => spectral
spectral => T1

• E. Coven & A. Meyerowitz: "Tiling the integers with translates of one finite set", *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999
T1 + T2 => tile
Tile => T1

• E. Amiot : "A propos des canons rythmiques", *Gazette des Mathématiciens,* n°106, Octobre 2005.
if A tiles with period n and $\mathbf{Z}_n$ is Hajos => A has T2 (=> A is spectral)

Representation polynômiale



$$\mathbb{Z}_n \longleftrightarrow 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1}$$

$$A=\{0,5,6,7\} \longleftrightarrow A(X)=1 + X^5 + X^6 + X^7$$

$$B=\{0,4,8\} \longleftrightarrow B(X)=1 + X^4 + X^8$$

$$\boxed{\Delta_{12} = 1 + X + \ldots + X^{11} = A(X)\times B(X) \bmod X^{12}-1}$$

Racines de l'unité et polynomes cyclotomiques

Racines *n*-ièmes de l'unité : $z^n = 1$

n=3 $\longrightarrow$ $\left\{1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

n=4 $\longrightarrow$ $\{1, +i, -1, -i\}$

Le racines *n*-ièmes de l'unité peuvent s'écrire sous la forme :

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k, n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k < n)$$

Elles sont exactement les racines du polynôme : $P(X) = X^n - 1$

Le racines *n*-ièmes primitives de l'unité : $e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ $(n,k)=1$

Elles sont exactement les racines du polynôme cyclotomique :

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

Pavage de la ligne et polynômes cyclotomiques

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

$$\Phi_1(X) = X - 1 \longleftrightarrow ?$$

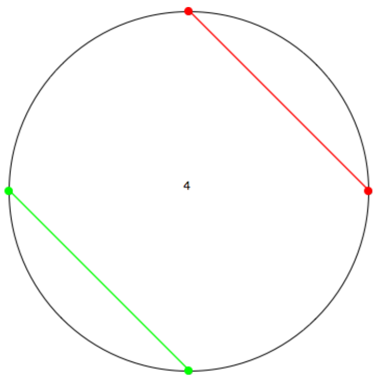
$$\Phi_2(X) = 1 + X \longleftrightarrow \{0,1\}$$

$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2 \longleftrightarrow \{0,1,2\}$$

$$\Phi_4(X) = 1 + X^2 \longleftrightarrow \{0,2\}$$

$$\Phi_5(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \longleftrightarrow \{0,1,2,3,4\}$$

$$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2 \longleftrightarrow ?$$



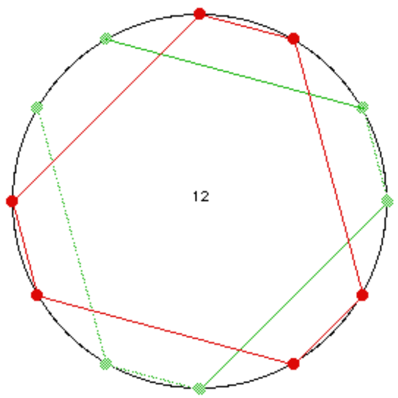
$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d | n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$$\Delta_4 = 1 + X + X^2 + X^3 = \Phi_2(X) \times \Phi_4(X)$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \ldots x^{n-1} \pmod{X^n - 1}$$

Bonnes et mauvaises factorisations

$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$



$$\Phi_2(X) = 1 + X \longleftrightarrow (1, 1)$$
$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2 \longleftrightarrow (1, 1, 1)$$
$$\Phi_4(X) = 1 + X^2 \longleftrightarrow (1, 0, 1)$$
$$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2 \longleftrightarrow (1, -1, 1)$$

$$\Delta_{12} = 1 + X + \dots + X^{11} = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_4 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$$

$$B(X) = \Phi_4 = 1 + X^2$$

$$S = \{0, 2\}$$

$$R = \{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$$

Conditions de C& M

$$\Phi_2(X) = 1 + X$$
$$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$$

(T1) $A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$

(T2) $\Phi_2 \mid A(X)$ et $\Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2\times 3} \mid A(X)$

Les conditions de Coven-Meyerowitz

- E. Coven & A. Meyerowitz : “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

There is no loss of generality in restricting attention to translates of a finite set A of *nonnegative* integers. Then $A(x) = \sum_{a \in A} x^a$ is a polynomial such that $\#A = A(1)$. Let S_A be the set of prime powers s such that the s-th cyclotomic polynomial $\Phi_s(x)$ divides $A(x)$. Consider the following conditions on $A(x)$.

(T1) $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$.

(T2) If $s_1, \ldots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \cdots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

Theorem A. *If $A(x)$ satisfies (T1) and (T2), then A tiles the integers.*

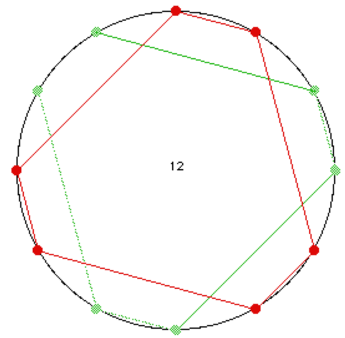
Theorem B1. *If A tiles the integers, then $A(x)$ satisfies (T1).*

Theorem B2. *If A tiles the integers and $\#A$ has at most two prime factors, then $A(x)$ satisfies (T2).*

Corollary. *If $\#A$ has at most two prime factors, then A tiles the integers if and only if $A(x)$ satisfies (T1) and (T2).*

Les conditions de C&M, pavage et spectralité

(T1) $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$.
(T2) If $s_1, \ldots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \cdots s_m}(x)$ divides $A(x)$.



C&M (1999)

- T1 + T2 => pave
- pave => T1
- pave Z_n avec $n=p^\alpha q^\beta$ => T1 + T2

$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12} = 1 + 2X + 2X^2 - X^3 - X^4 + X^5 + 2X^6 + X^7$$

$$A^*(1) = 7 \neq \Phi_2 \times (1) \times \Phi_3(1) = 6$$

Laba (2002)

- T1 + T2 => spectral
- T2 => spectral
- spectral => T1

Amiot (2009)

- pave avec périodicités internes => T2

La condition T2 est-elle nécessaire ?

Conjecture spectrale et canons de Vuza

La conjecture de Fuglede

Un sous-ensemble de R^n pave par translation *ssi* il est spectral (i.e. il admet une décomposition hilbertienne d'exponentiels complexes)

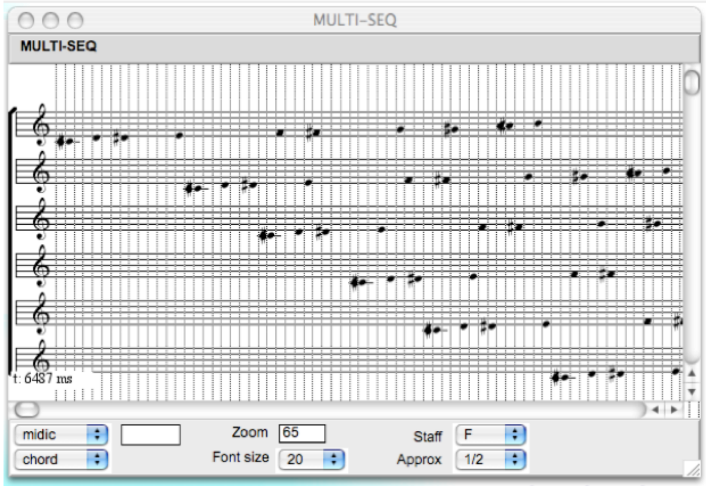
J. Func. Anal. 16, 1974.

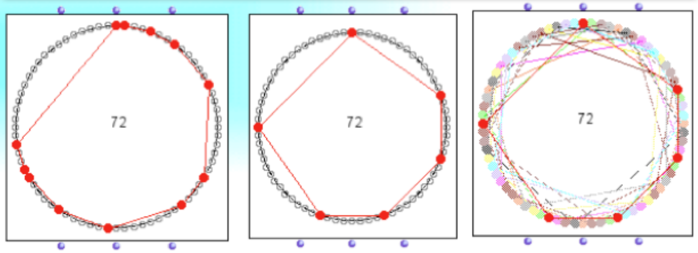
Fausse en dim. $n \geq 3$
Ouverte en dim. 1 et 2

Canons de Vuza de période n

- $n = p_1 p_2 n_1 n_2 n_3$
- $<p_1 n_1, p_2 n_2> = 1$
- $n_3 > 1$

72
108 120 144 168 180
200 216 240 252 264 270 280 288
300 312 324 336 360 378 392 396
400 408 432 440 450 456 468 480
500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
800 810 816 828 864 880 882 888…





Résultat (Amiot 2009) :
Si A **pave mais il n'est pas spéctral**
=> A **est le rythme d'un canon de Vuza**

Problème ouvert : Trouver un algorithme qui permet d'obtenir toutes le factorisations d'un groupe cyclique non-Hajos en somme directe de deux sous-ensembles non périodiques

Transformée de Fourier discrète et pavage

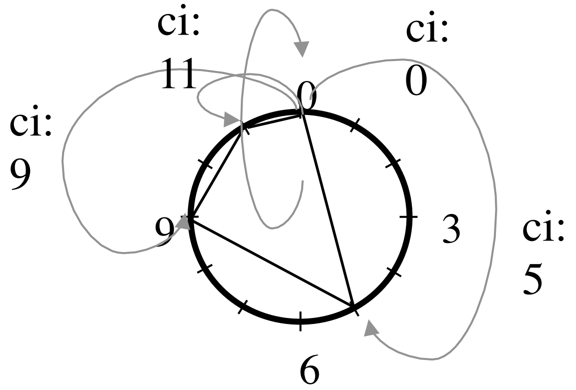
TILING

Let $Z_A = \{ t \in \mathbb{Z}_c,\ F_A(t)=0 \}$

A tiles $\mathbb{Z}_c$ when equivalently:

- There exists B, $A \oplus B = \mathbb{Z}_c$
- $1_A \star 1_B = 1$
- $F_A \times F_B\,(t) = 1 + e^{-2i\pi t/c} + \dots e^{-2i\pi t(c-1)/c}$ (0 unless t=0)
- $Z_A \cup Z_B = \{1,2 \dots c-1\}$ AND Card A × Card B = c
- $IC_A \star IC_B = IC(\mathbb{Z}_c) = c$ and Card A × Card B = c

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$



$A = \{0, 5, 9, 11\}$
$IC_A(k) = 1\ \forall\, k =$
$1 \dots 11$

$$IC_A(k) = \mathrm{Card}\{(x,y) \in A \times A \mid x + k = y\}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

E. Amiot, « New Perspectives on Rhythmic Canons and the Spectral Conjecture », ***Journal of Mathematics and Music*****, 2009.**

Relation Z en musique et théorie de l'homométrie

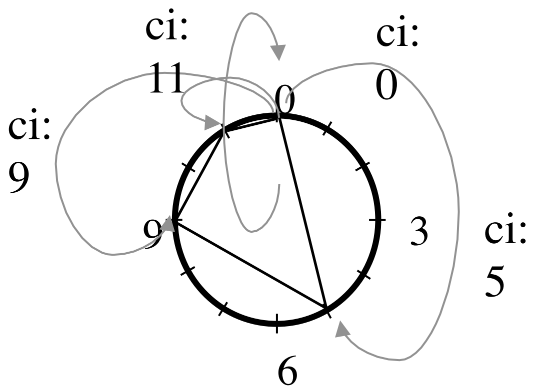
- Le contenu intervallique est équivalent à un produit de convolution de fonctions caractéristiques (Lewin, 1958)

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k\in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

$$1_A * \tilde{1}_B(k) = \sum_i 1_A(i) \times 1_B(i-k) = \sum_{\substack{i\in A\\ i-k\in B}} 1$$

$$\mathcal{F}(1_A * \tilde{1}_B) = \mathcal{F}(1_A) \times \mathcal{F}(\tilde{1}_B)$$



$A = \{0, 5, 9, 11\} \Rightarrow IC_A(k) = 1 \; \forall k$

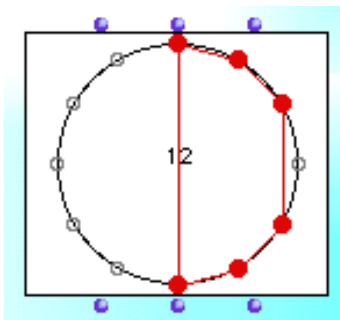
$$\mathcal{F}(IC_A) = \mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_{-A} = |\mathcal{F}_A|^2$$

➔ **Relation Z**

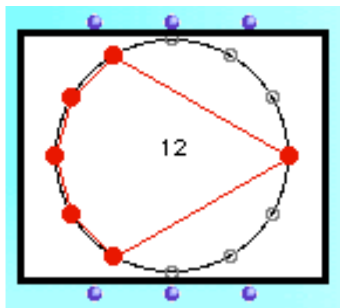
$$\forall \mathrm{k}\; \mathcal{F}(\mathrm{IC}_{\mathbb{Z}_c \setminus \mathrm{A}})(\mathrm{k}) = \mathcal{F}(\mathrm{IC}_\mathrm{A})(\mathrm{k})$$

➔ **Théorème de l'hexacorde**

A



$IC_A = IC_{A'}$



A'

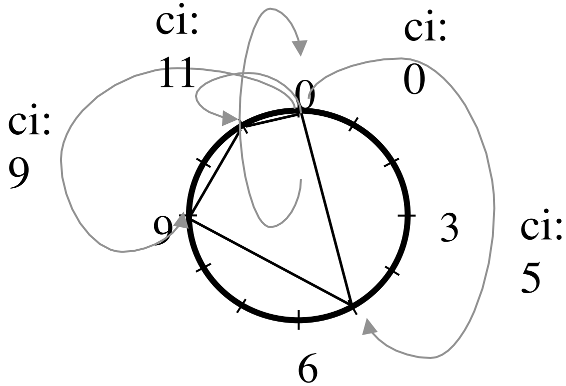
Z-relation, homométrie et reconstruction de la phase

- Deux ensembles sont en Z-relations s'ils ont le même module de la DFT

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

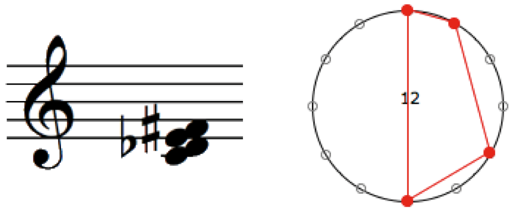
$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$\mathcal{F}(IC_A) = \mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_{-A} = |\mathcal{F}_A|^2$$



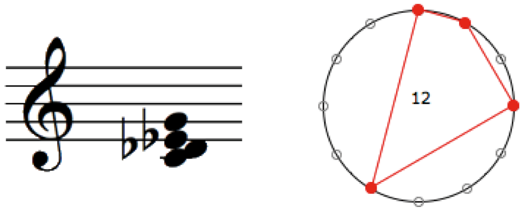
A = {0, 5, 9, 11}
$IC_A(k) = 1 \ \forall\ k =$ 1…11

{0, 1, 4, 6}$_{12}$



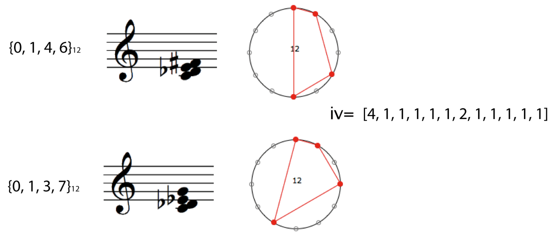
iv= [4, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1]

{0, 1, 3, 7}$_{12}$

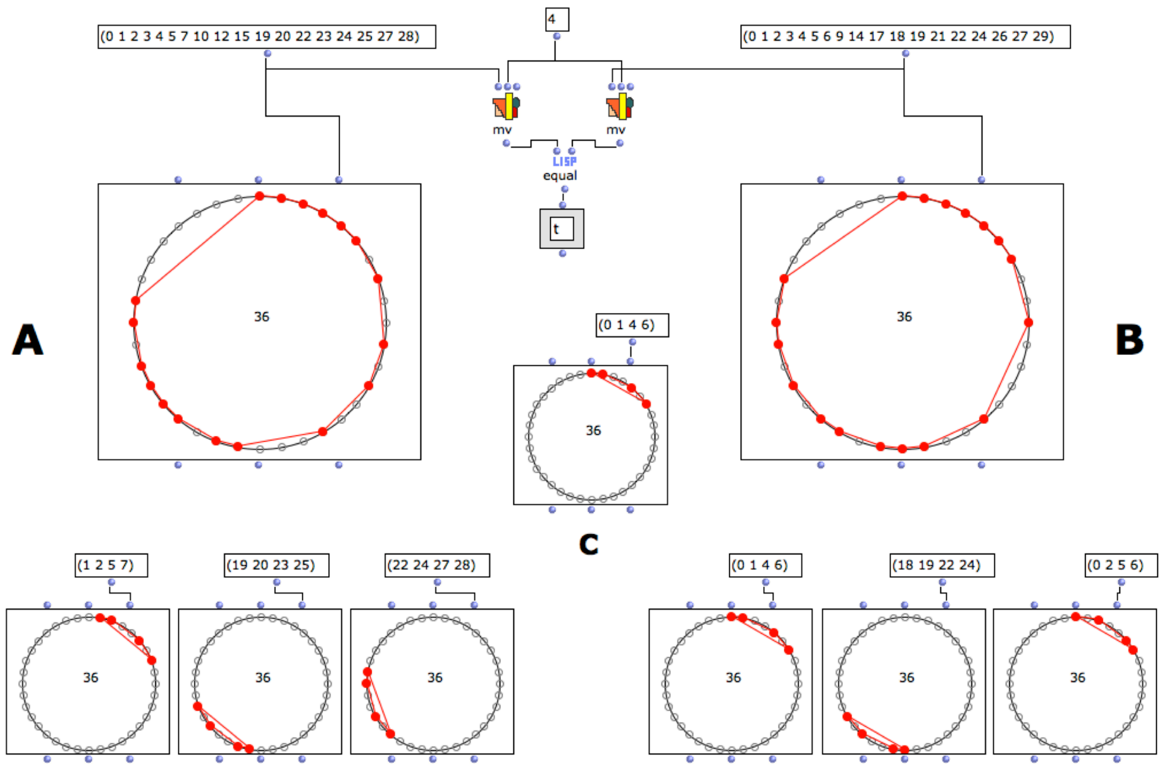


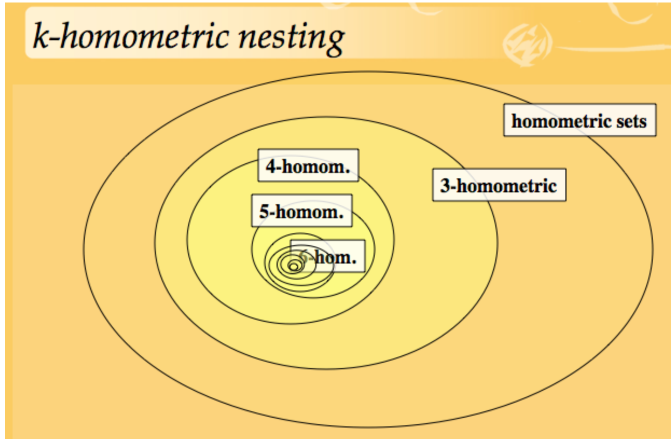
• Mandereau J., D. Ghisi, E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon, (2011a), « Z-relation and homometry in musical distributions », *Journal of Mathematics and Music*, vol. 5, n° 2, p. 83-98.
• Mandereau J, D. Ghisi, E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon (2011b), « Discrete phase retrieval in musical structures », *Journal of Mathematics and Music*, vol. 5, n° 2, p. 99-116.

Relation Z d'ordre supérieur



➔ 2-homométrie





$\mathbf{Z}_{36}$ A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 15, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 28}
B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 26, 27, 29}

$mv^4(A) = mv^4(B)$ ➔ 4-homométrie

Homométrie et canons rythmiques mosaïques

Tiling

Let $Z_A = \{ t \in \mathbb{Z}_c,\ F_A(t) = 0 \}$

A tiles $\mathbb{Z}_c$ when equivalently:

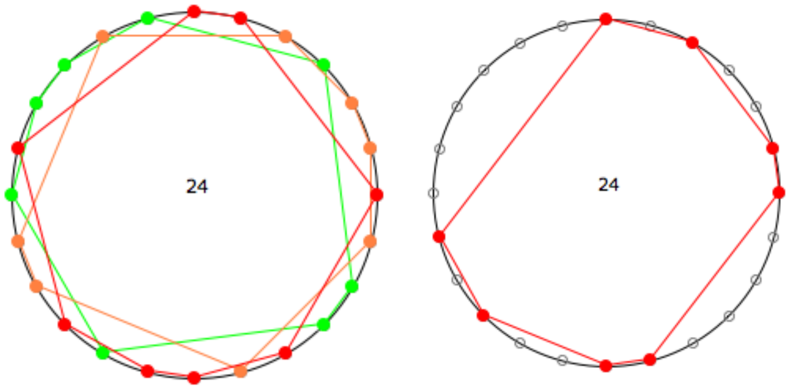
- There exists B, $A \oplus B = \mathbb{Z}_c$
- $1_A \star 1_B = 1$
- $F_A \times F_B(t) = 1 + e^{-2i\pi t/c} + \dots e^{-2i\pi t(c-1)/c}$ (0 unless t=0)
- $Z_A \cup Z_B = \{1,2 \dots c-1\}$ AND Card A × Card B = c
- $IC_A \star IC_B = IC(\mathbb{Z}_c) = c$ and Card A × Card B = c

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

***A musical offering*:**

- ***Theorem*:**
  If A tiles with B and A' has the same IC, then A' tiles with B, too.



E. Amiot, « New Perspectives on Rhythmic Canons and the Spectral Conjecture », *JMM*, 2009.

Pavages et homométrie

Tiling

Let $Z_A = \{ t \in \mathbb{Z}_c,\ F_A(t)=0 \}$

A tiles $\mathbb{Z}_c$ when equivalently:

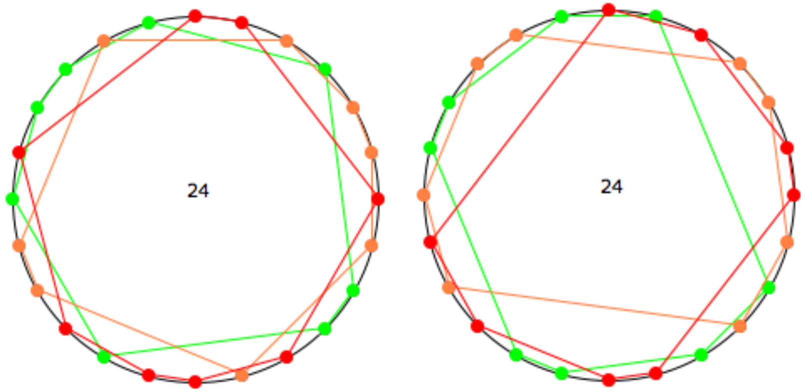
- There exists B, $A \oplus B = \mathbb{Z}_c$
- $1_A \star 1_B = 1$
- $F_A \times F_B\ (t) = 1 + e^{-2i\pi t/c} + \ldots e^{-2i\pi t(c-1)/c}$ (0 unless t=0)
- $Z_A \cup Z_B = \{1,2 \ldots c-1\}$ AND Card A × Card B = c
- $IC_A \star IC_B = IC(\mathbb{Z}_c)=c$ and Card A × Card B = c

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

A musical offering:

- ***Theorem***:
  If A tiles with B and A' has the same IC, then A' tiles with B, too.



E. Amiot, « New Perspectives on Rhythmic Canons and the Spectral Conjecture », *JMM*, 2009.