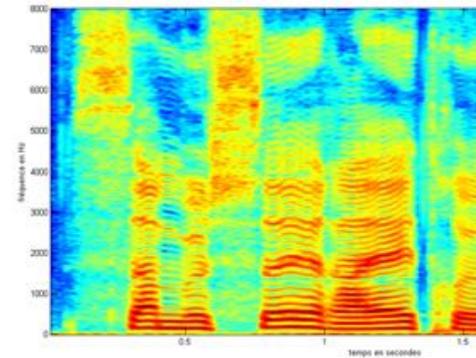


# Et si on faisait des maths à partir de la musique ?



PAF Maths/Musique  
IRMA Université de Strasbourg  
16 janvier 2020



Moreno Andreatta & Pierre Guillot  
IRMA/CNRS, Université de Strasbourg  
Projet SMIR & SMIR2C  
(e collaboration avec le GREAM et l'Ircam)



# Le projet SMIR : les maths dans la musique, la musique des maths

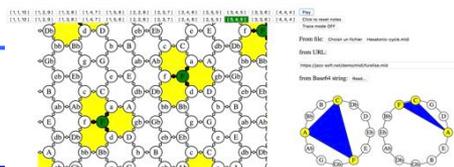
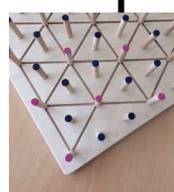
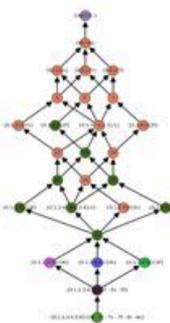
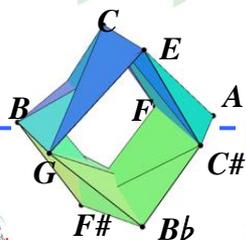
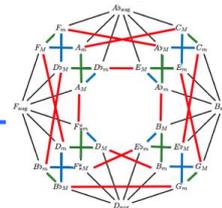
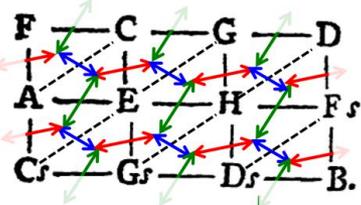
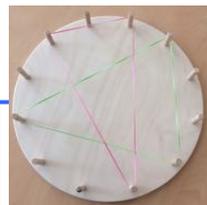
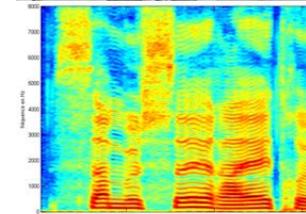
Approches  
« audio »

Modèles  
algébriques



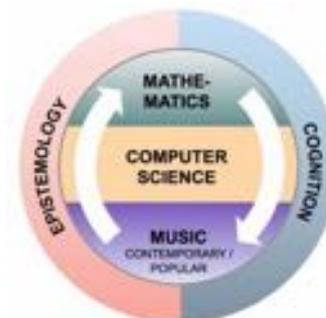
Modèles  
topologiques

Modèles  
catégoriels



Modèles  
computationnels

Modèles cognitifs



Approches « symboliques »

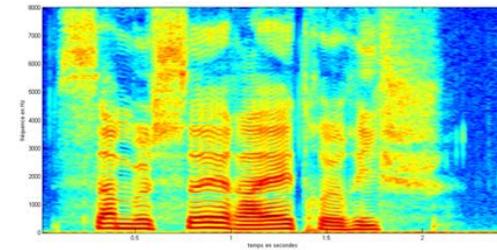
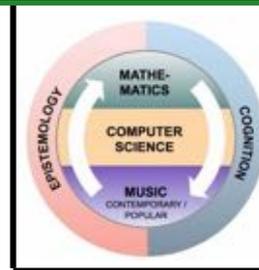
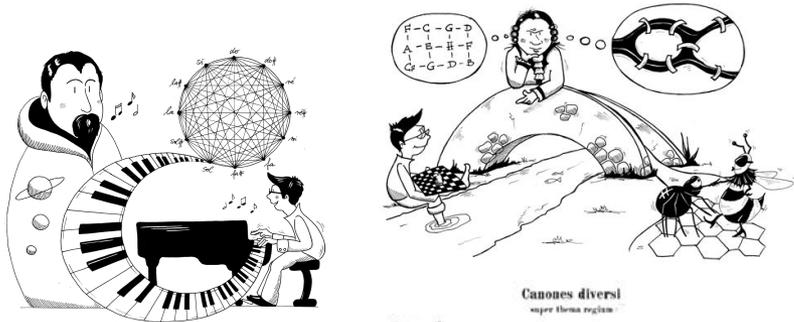
L'être humain perçoit le monde à l'aide de signaux dont certains sont de nature sonore. De l'Antiquité jusqu'à nos jours, il a combié les sons de manière harmonieuse pour en faire un art, la musique, qui entretient des liens privilégiés avec les mathématiques. L'informatique permet aujourd'hui de numériser les sons et la musique.

La compréhension des mécanismes auditifs s'inscrit dans une perspective d'éducation à la santé.

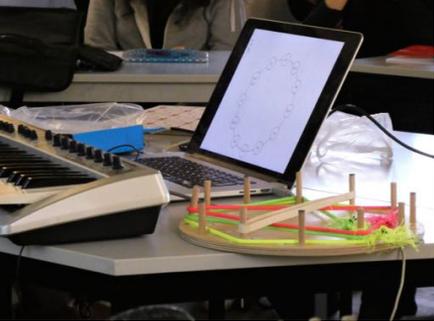
## Histoire, enjeux, débats

- L'histoire de l'analyse temps-fréquence depuis Fourier.
- La controverse entre d'Alembert, Euler et Daniel Bernoulli sur le problème des cordes vibrantes.
- L'histoire des gammes, de Pythagore à Bach.
- Des algorithmes au cœur de la composition musicale : de l'Offrande musicale de Bach à la musique contemporaine.
- Les enjeux culturels et économiques de la numérisation et de la compression des sons.
- La santé auditive.

## Approches basées sur le « son »



## Approches centrées sur la « musique »



Jardin des sciences  
Université de Strasbourg

Alsascience, 6-12 mai 2019



JEUX + FÊTE MATHS

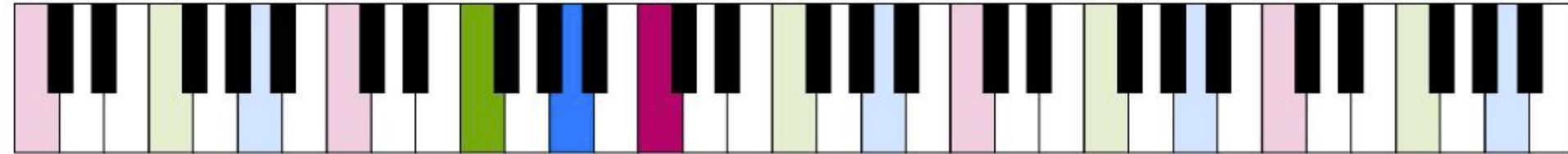
DRÔLES DE FORMES

Samedi 16 novembre Dimanche 17 novembre 2019

Eaubonne,  
23 novembre 2019

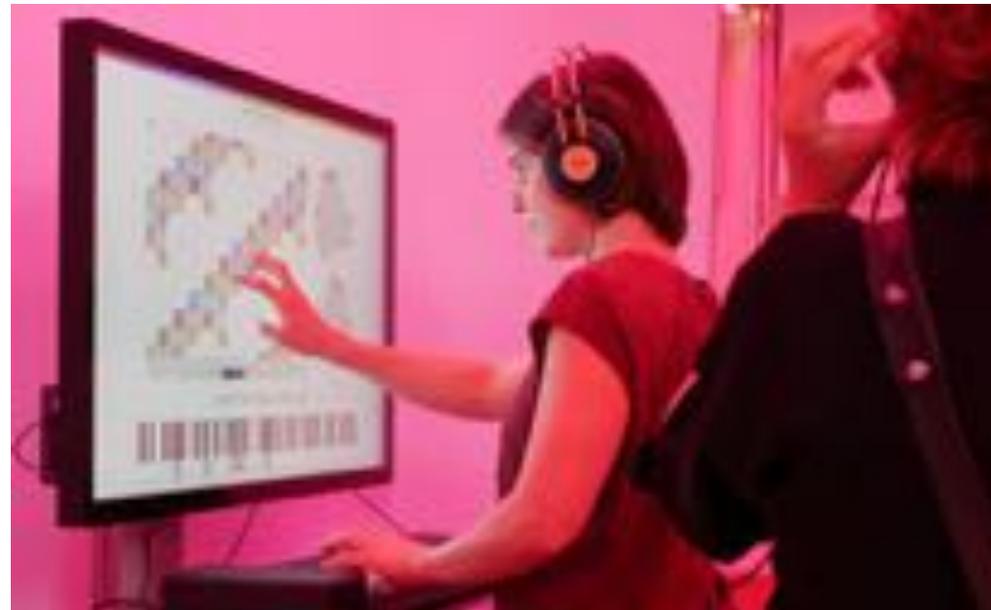
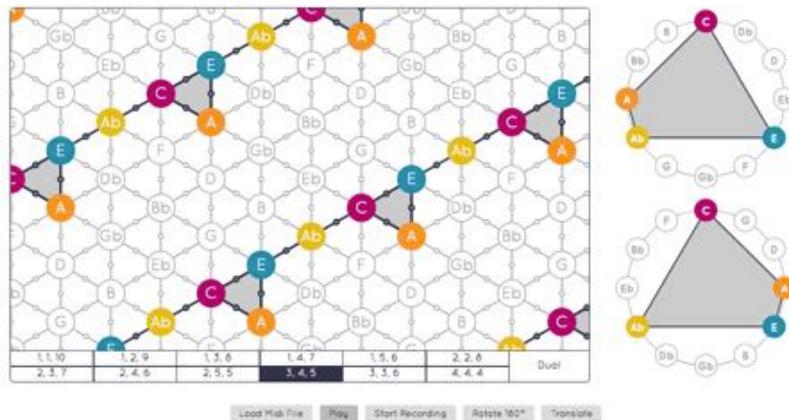


<https://imaginary.org/>



## THE TONNETZ

ONE KEY - MANY REPRESENTATIONS



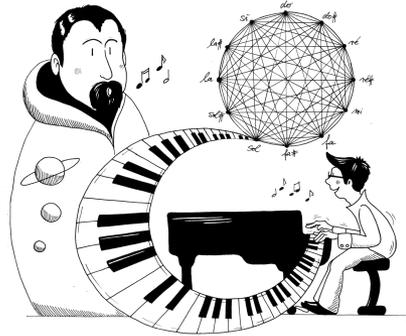
## L'environnement web Tonnetz

(conçu et développé par C. Guichaoua & M. Andreatta / Projet SMIR, USIAS/Université de Strasbourg)

➔ <https://guichaoua.gitlab.io/web-hexachord/>

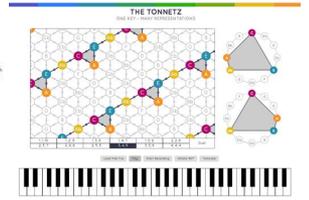


2019  
 année des mathématiques



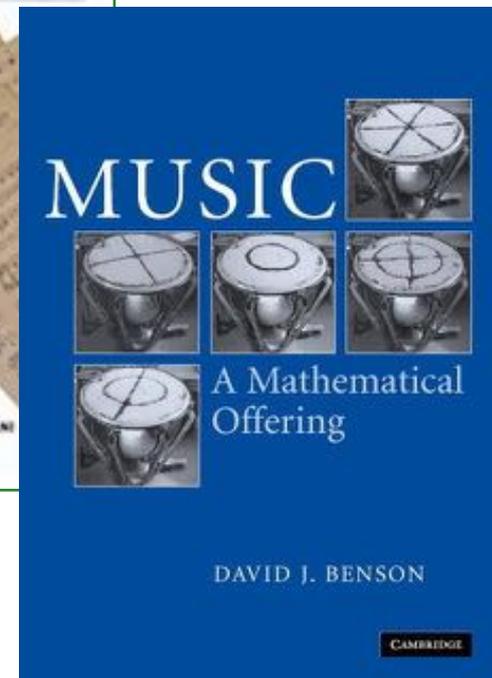
© Math'n Pop / W. Drenckhan

Math'n Pop  
 Conférence concert  
 SAMEDI 11 MAI  
 18H30

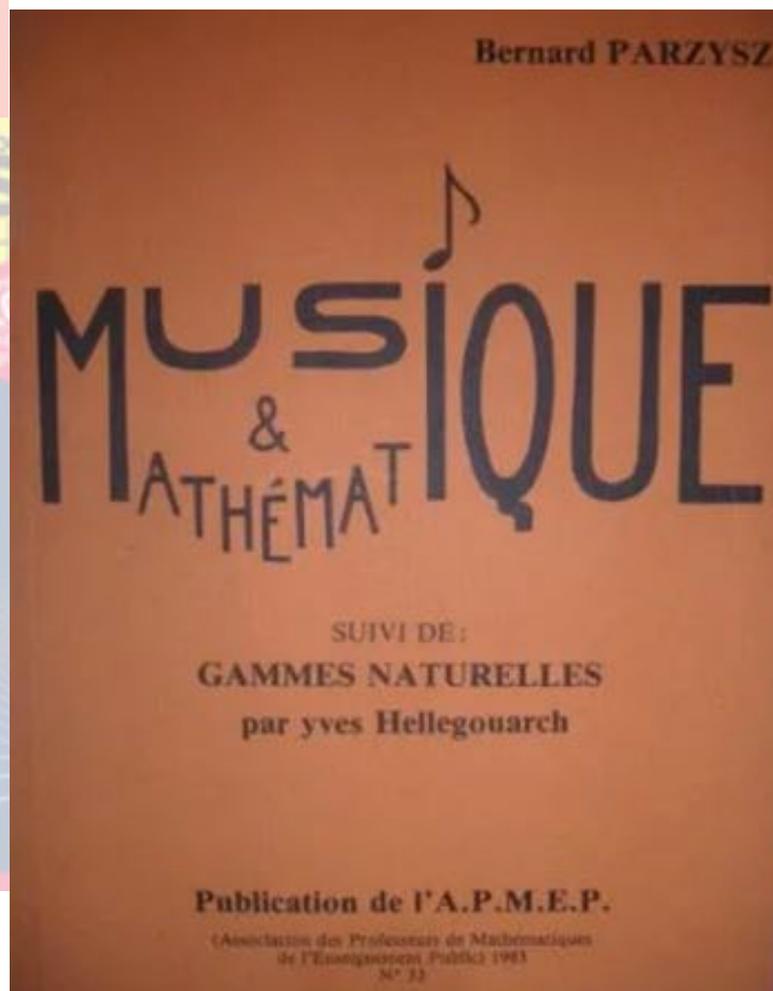


(→ youtube : math'n pop + Sorbonne)

# Mathématiques & musique : quelques références utiles



# Mathématiques & musique : quelques références utiles



# Pythagore et le monocorde

En musique, un **intervalle** entre deux sons est défini par le rapport (et non la différence) de leurs fréquences fondamentales. Deux sons dont les fréquences sont dans le **rapport 2/1** correspondent à une même note, à deux hauteurs différentes. L'intervalle qui les sépare s'appelle une **octave**.

BO LE BULLETIN  
OFFICIEL  
DE L'ÉDUCATION  
NATIONALE











# La spirale des quintes et le tempérament pythagorien

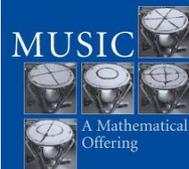
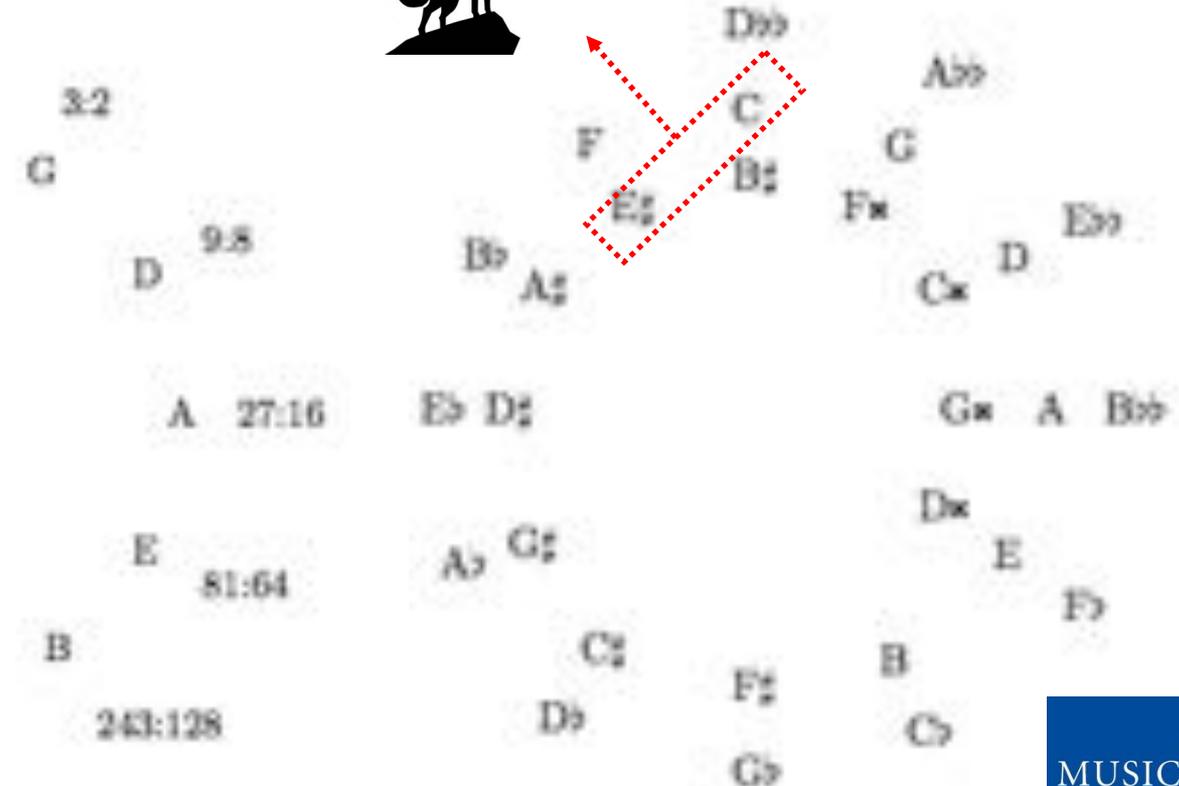
note	<i>do</i>	<i>ré</i>	<i>mi</i>	<i>fa</i>	<i>sol</i>	<i>la</i>	<i>si</i>	<i>do</i>
ratio	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1



## Quinte du loup

Les intervalles entre deux notes consécutives des gammes dites de Pythagore ne sont pas égaux, ce qui entrave la transposition.

BO  
LE BULLETIN  
OFFICIEL  
DE L'ÉDUCATION  
NATIONALE

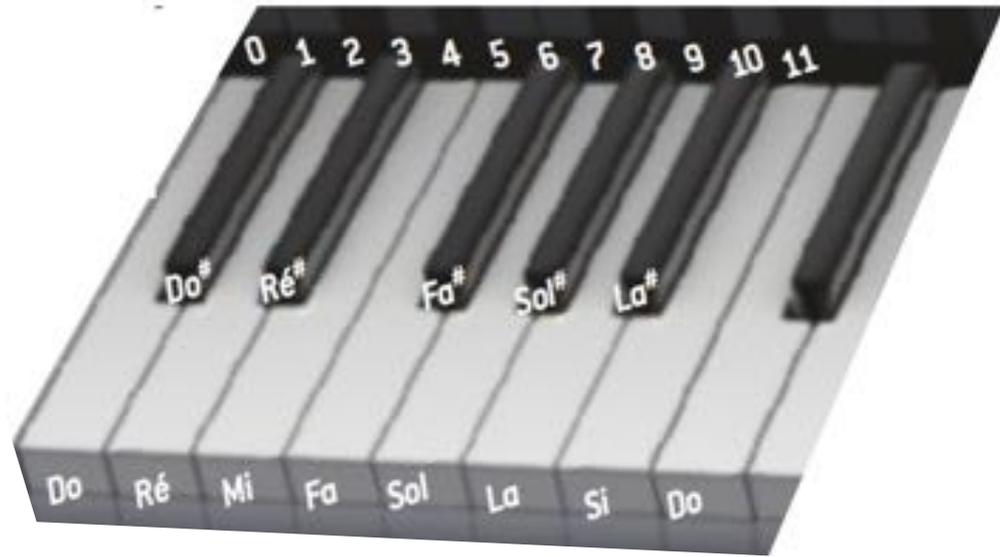


DAVID J. BENSON

Cambridge

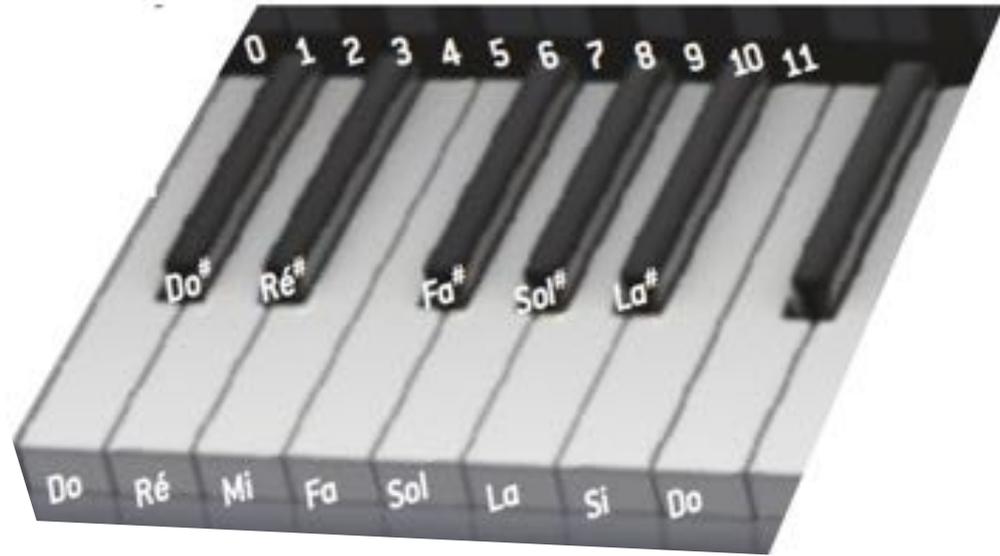
# Le tempérament égal : un compromis « combinatoire »

La connaissance des nombres irrationnels a permis, au XVII<sup>e</sup> siècle, de construire des **gammes à intervalles égaux**. L'introduction des gammes « au **tempérament égal** » permet de comprendre en quoi la découverte des nombres irrationnels a des applications en dehors du champ mathématique. **Utiliser la racine douzième de 2 pour partager l'octave en douze intervalles égaux.** La racine douzième de 2 est introduite par analogie avec la racine carrée, en lien avec l'utilisation de la calculatrice.

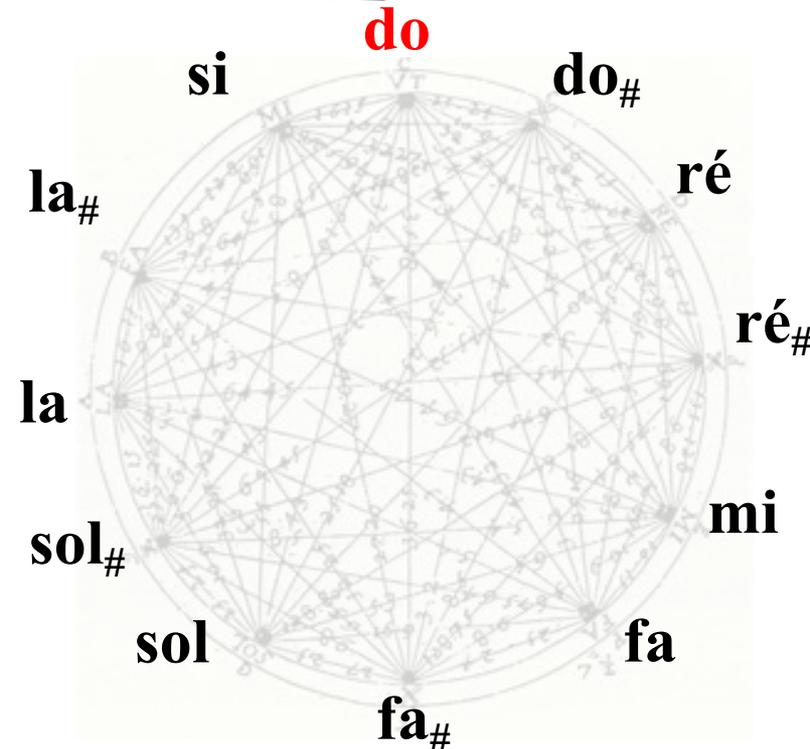


# Le tempérament égal : un compromis « combinatoire »

La connaissance des nombres irrationnels a permis, au XVII<sup>e</sup> siècle, de construire des **gammes à intervalles égaux**. L'introduction des gammes « au **tempérament égal** » permet de comprendre en quoi la découverte des nombres irrationnels a des applications en dehors du champ mathématique. **Utiliser la racine douzième de 2 pour partager l'octave en douze intervalles égaux.** La racine douzième de 2 est introduite par analogie avec la racine carrée, en lien avec l'utilisation de la calculatrice.



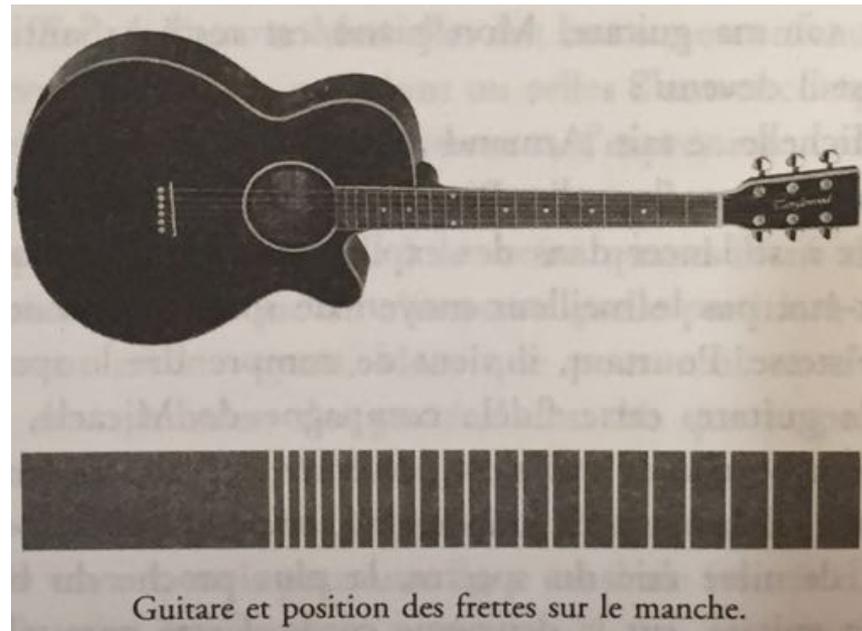
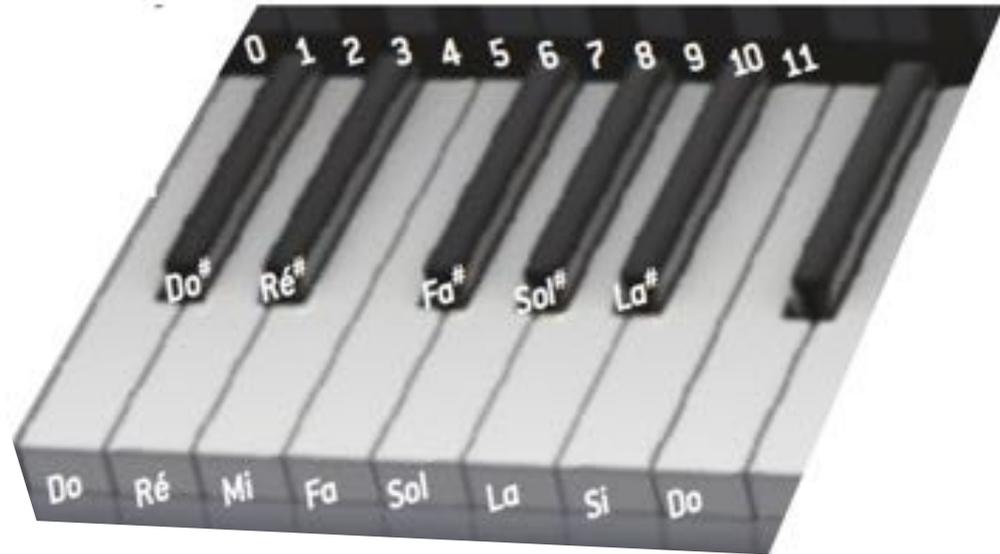
$$r^{12} = 2$$



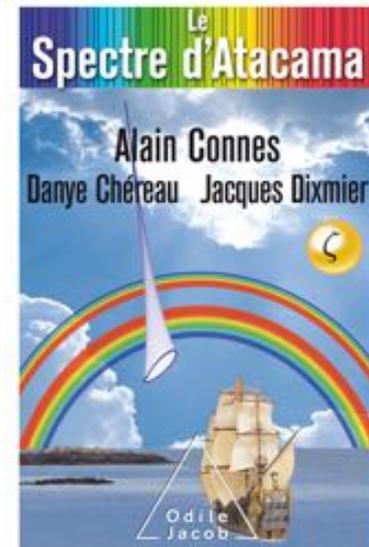
# Le tempérament égal : un compromis « combinatoire »

La connaissance des nombres irrationnels a permis, au XVII<sup>e</sup> siècle, de construire des **gammes à intervalles égaux**. L'introduction des gammes « au **tempérament égal** » permet de comprendre en quoi la découverte des nombres irrationnels a des applications en dehors du champ mathématique. **Utiliser la racine douzième de 2 pour partager l'octave en douze intervalles égaux**. La racine douzième de 2 est introduite par analogie avec la racine carrée, en lien avec l'utilisation de la calculatrice.

BO LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE



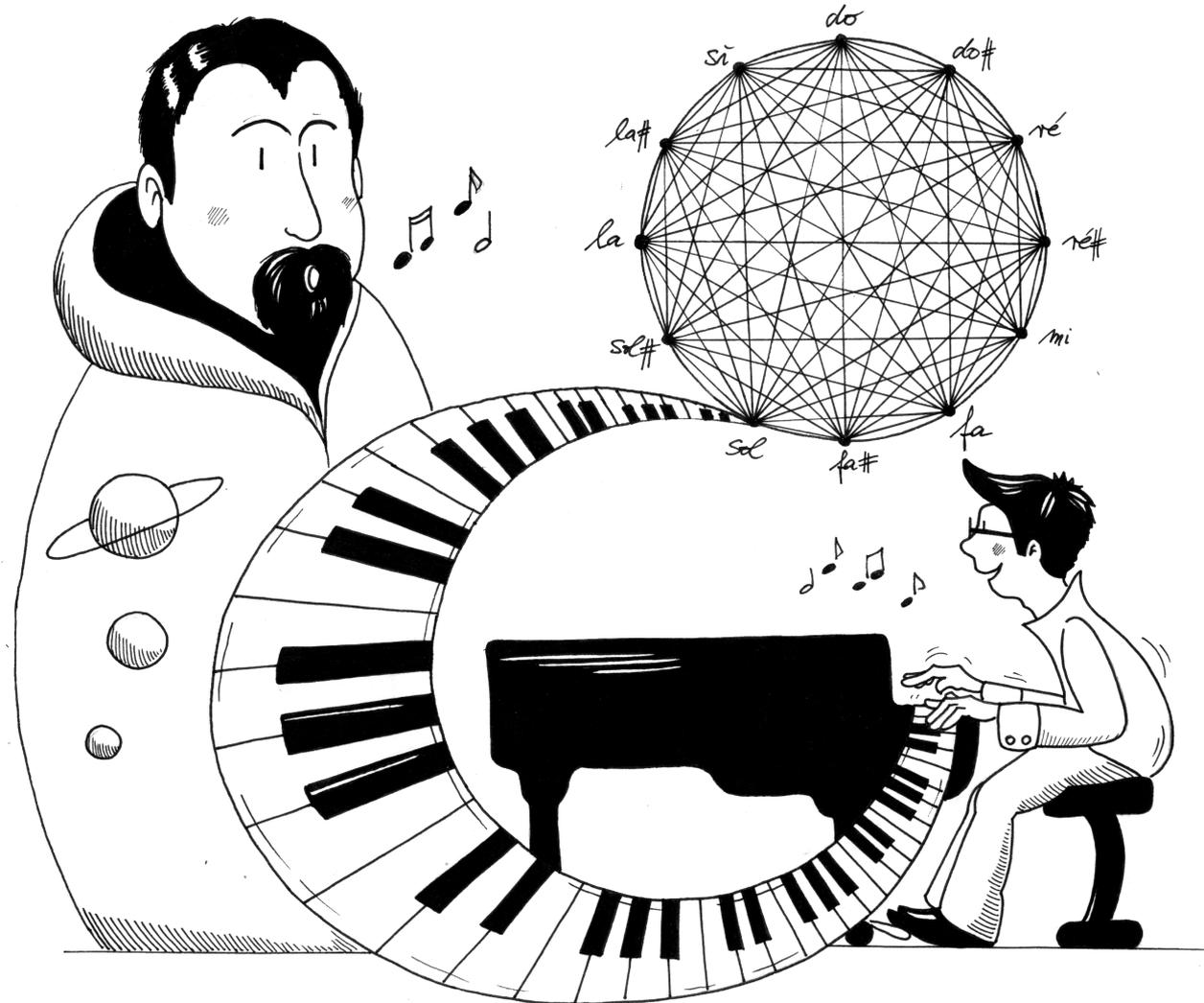
Guitare et position des frettes sur le manche.



# Marin Mersenne et la naissance de la combinatoire

La connaissance des nombres irrationnels a permis, au XVII<sup>e</sup> siècle, de construire des **gammes à intervalles égaux**. L'introduction des gammes « au **tempérament égal** » permet de comprendre en quoi la découverte des nombres irrationnels a des applications en dehors du champ mathématique. **Utiliser la racine douzième de 2 pour partager l'octave en douze intervalles égaux**. La racine douzième de 2 est introduite par analogie avec la racine carrée, en lien avec l'utilisation de la calculatrice.

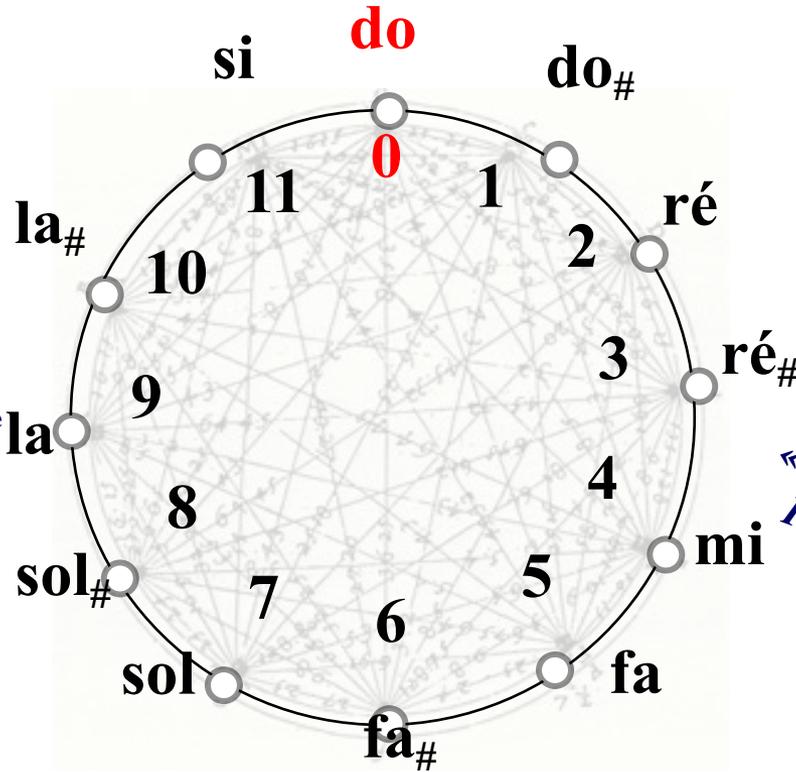
BO LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE



# La représentation circulaire de l'espace des hauteurs



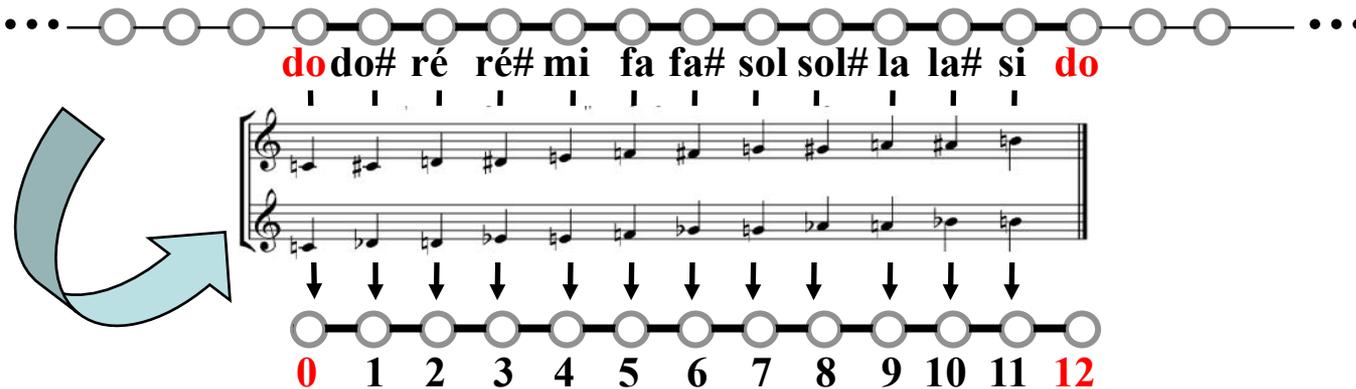
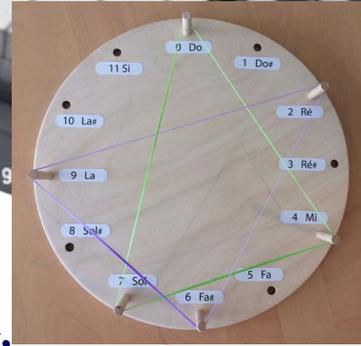
Marin Mersenne



*Harmonicorum Libri XII, 1648*



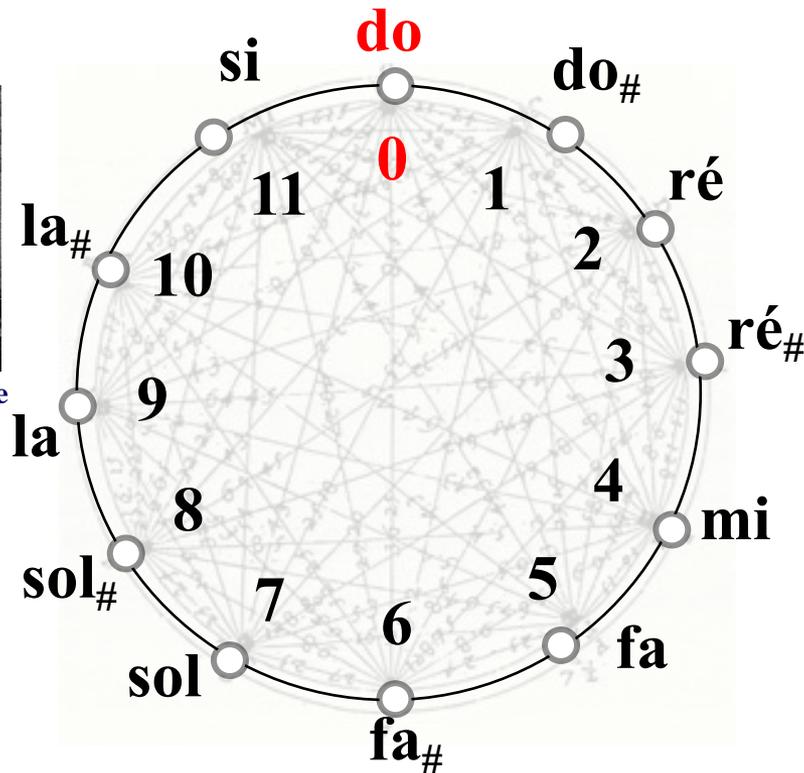
M. Andreatta, C. Agon,  
« La musique mise en algèbre »,  
Pour la Science, 2008



# La représentation circulaire de l'espace des hauteurs



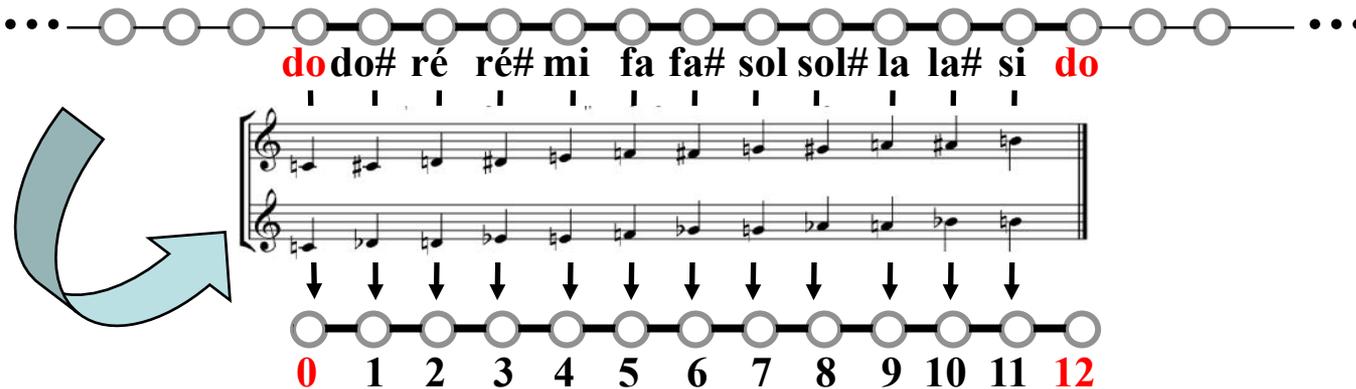
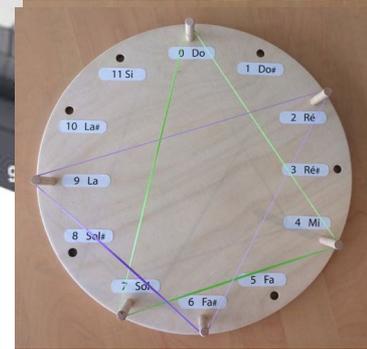
Marin Mersenne



*Harmonicorum Libri XII, 1648*



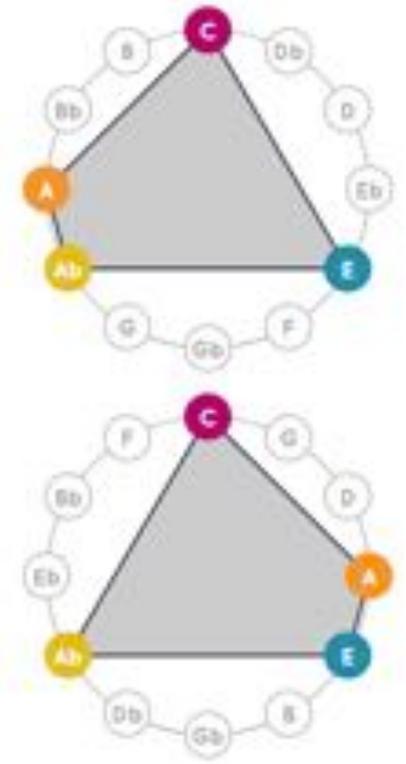
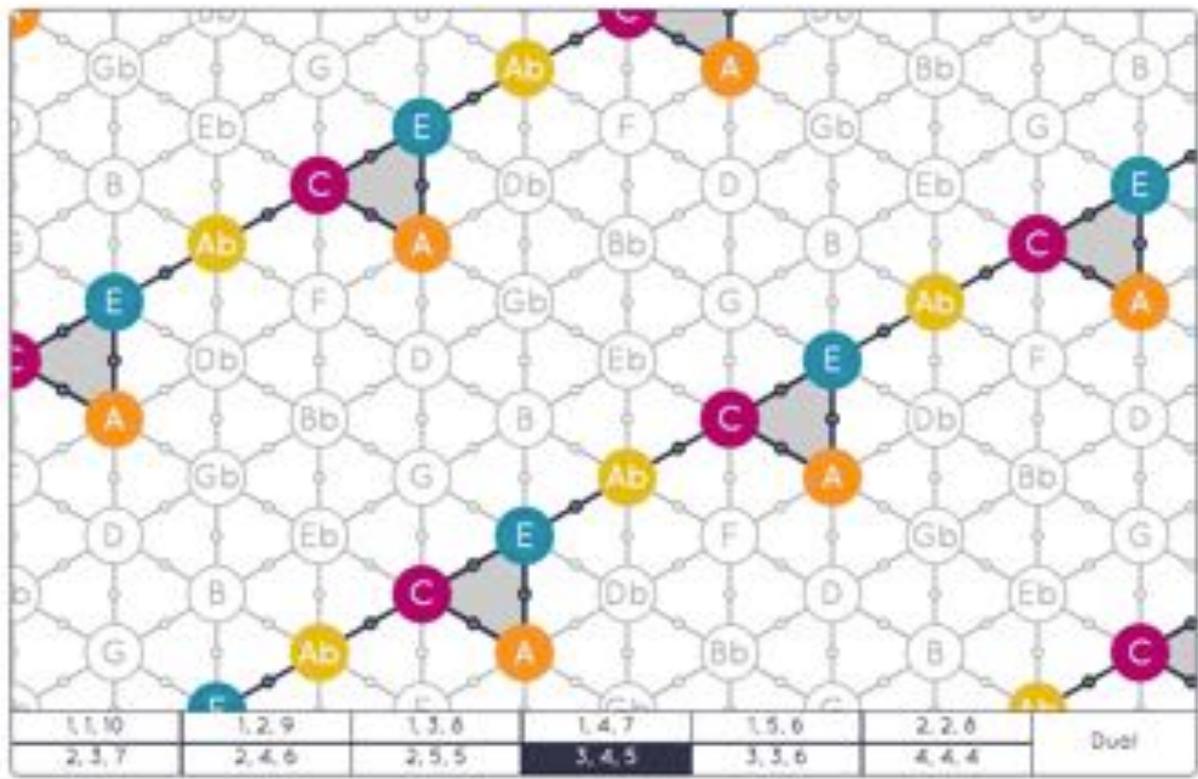
M. Andreatta, C. Agon,  
« Algèbre et géométrie :  
sont-elles inscrites dans le  
cerveau ? »,  
*Pour la Science, 2018*



# THE TONNETZ

ONE KEY - MANY REPRESENTATIONS

➔ DEMO

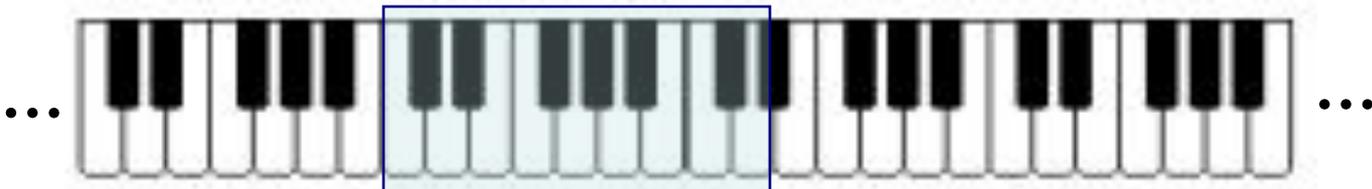


Load Midi File   Play   Start Recording   Rotate 180°   Translate

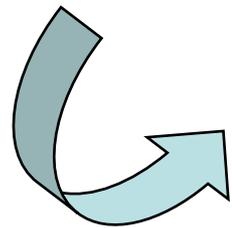
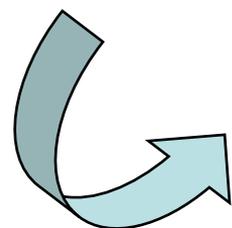
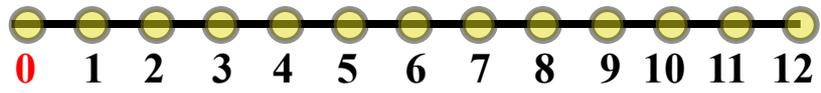


➔ <https://guichaoua.gitlab.io/web-hexachord/>

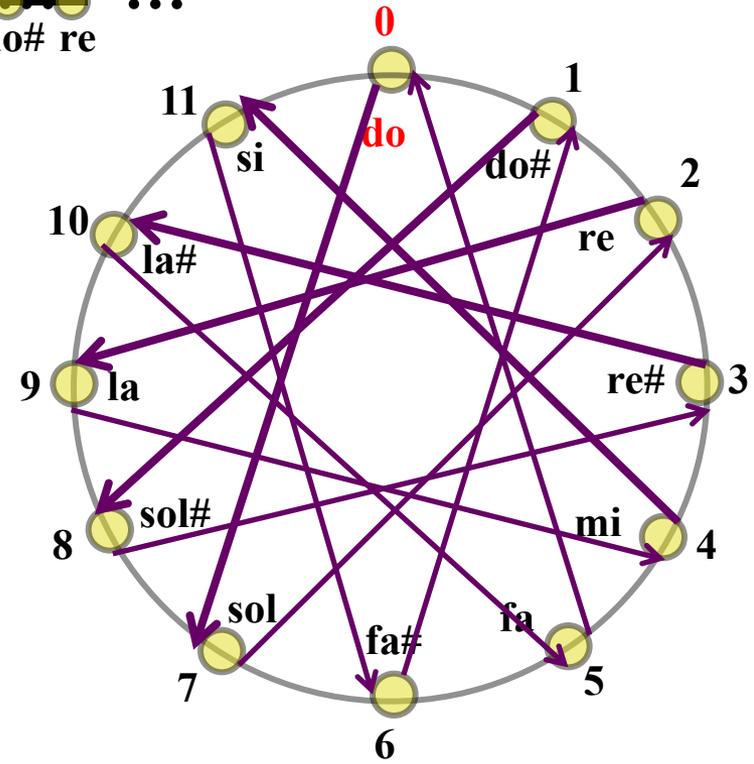
# Intervalleurs générateurs du temp ratement égal



7



Cycle des quintes



# Intervalles générateurs du tempérament égal

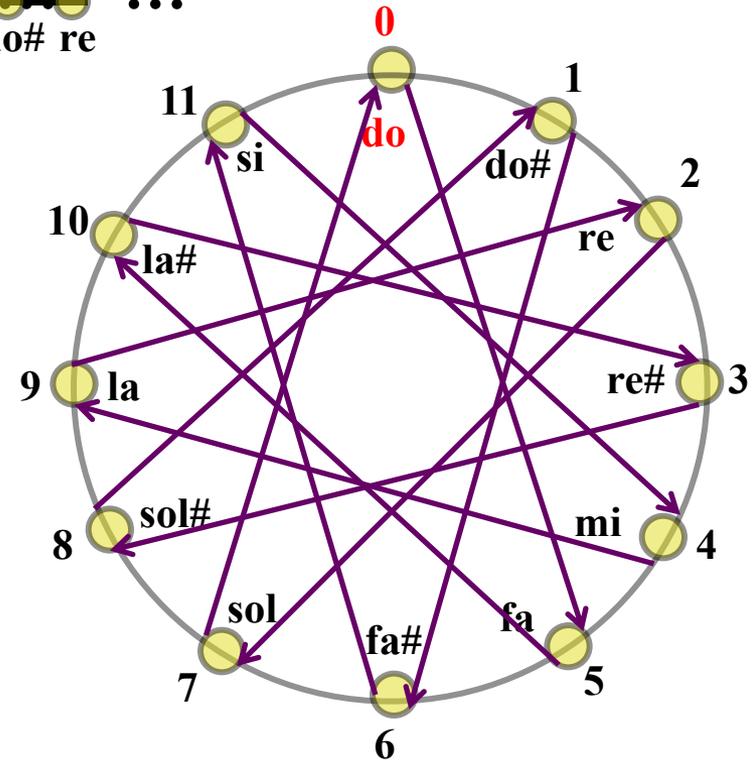


5

... do do# re re# mi fa fa# sol sol# la la# si do do# re ...



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

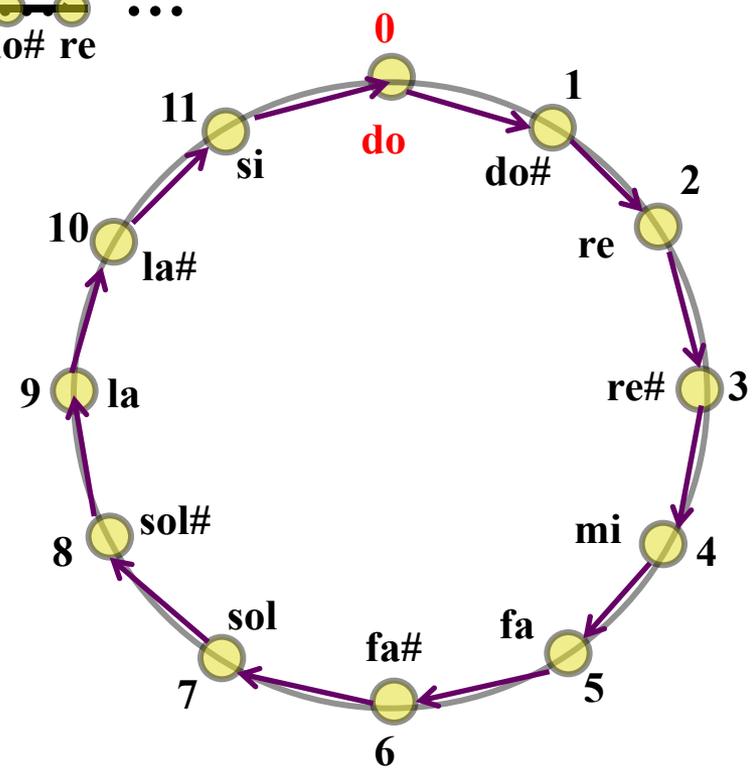
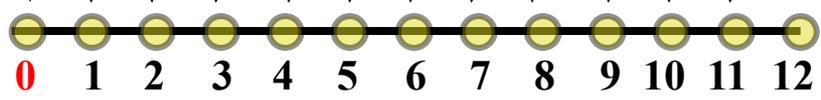
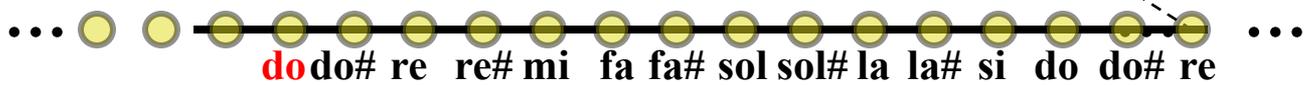


Cycle des quartes

# Intervalles générateurs du tempérament égal



1



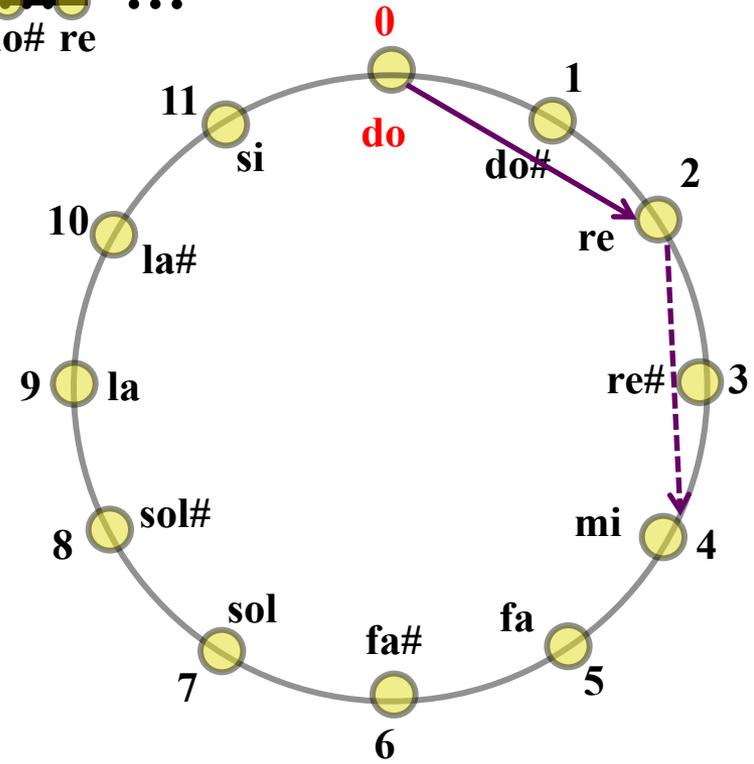
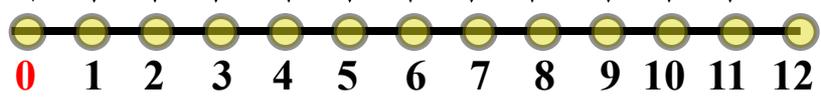
→ Quels sont les autres entiers qui engendrent le cercle ?

# Intervalles générateurs du tempérament égal

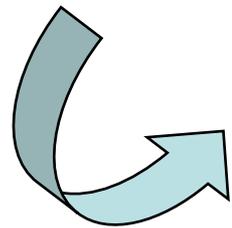


?

2



→ Quels sont les autres entiers qui engendrent le cercle ?

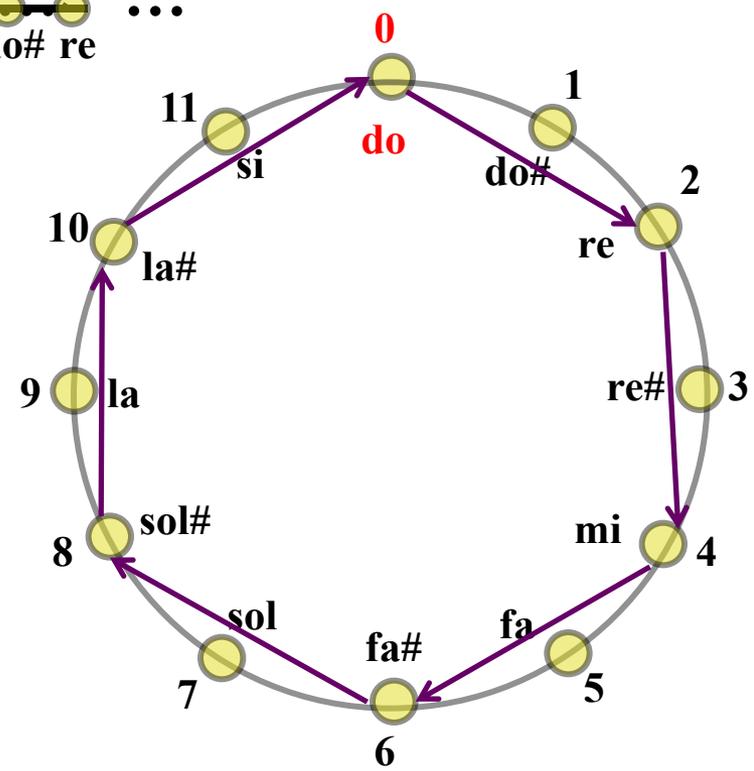
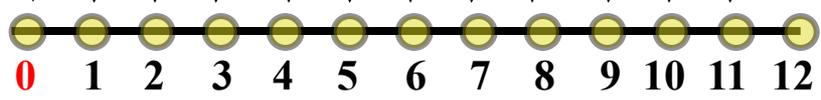
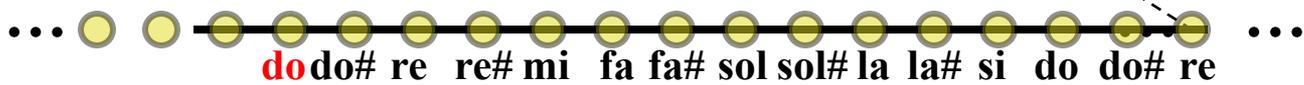


# Intervalles générateurs du tempérament égal



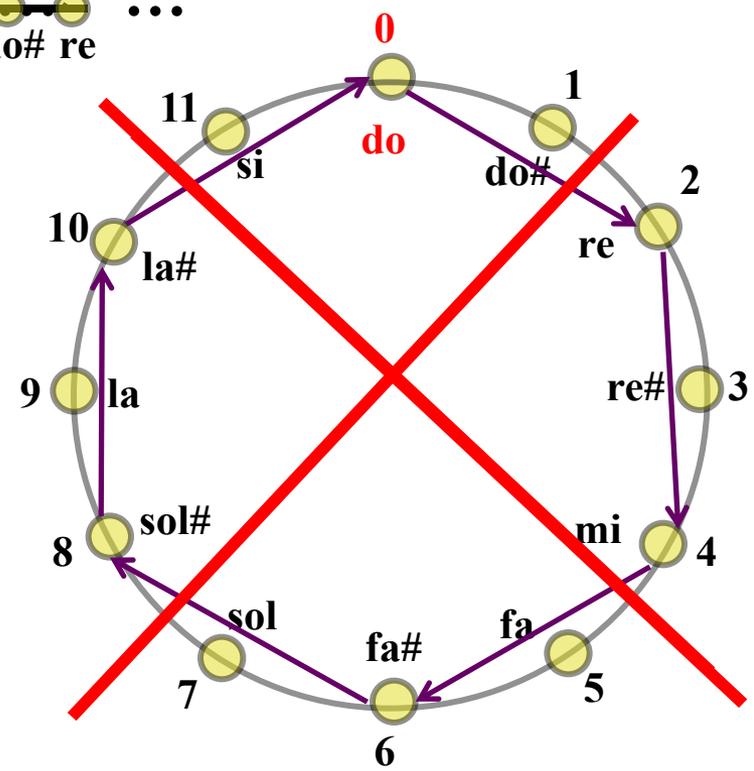
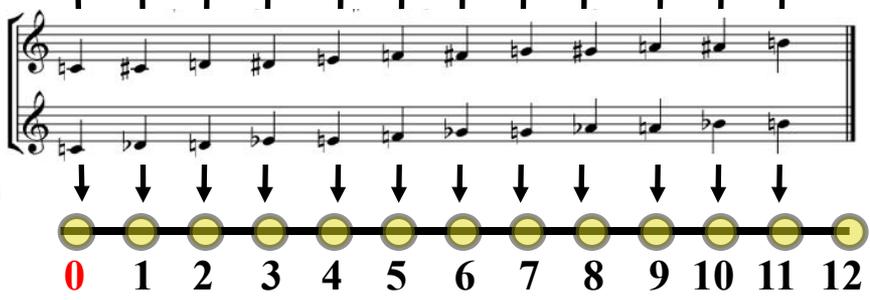
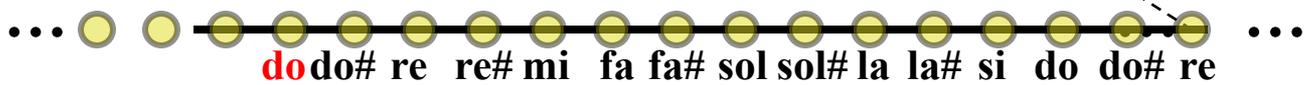
?

2



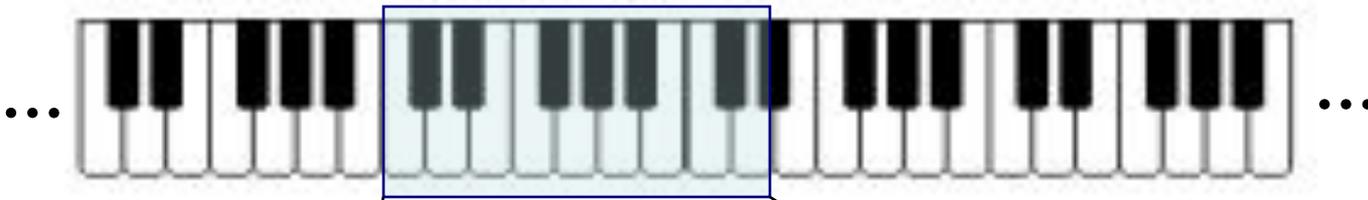
→ Quels sont les autres entiers qui engendrent le cercle ?

# Intervalles générateurs du tempérament égal

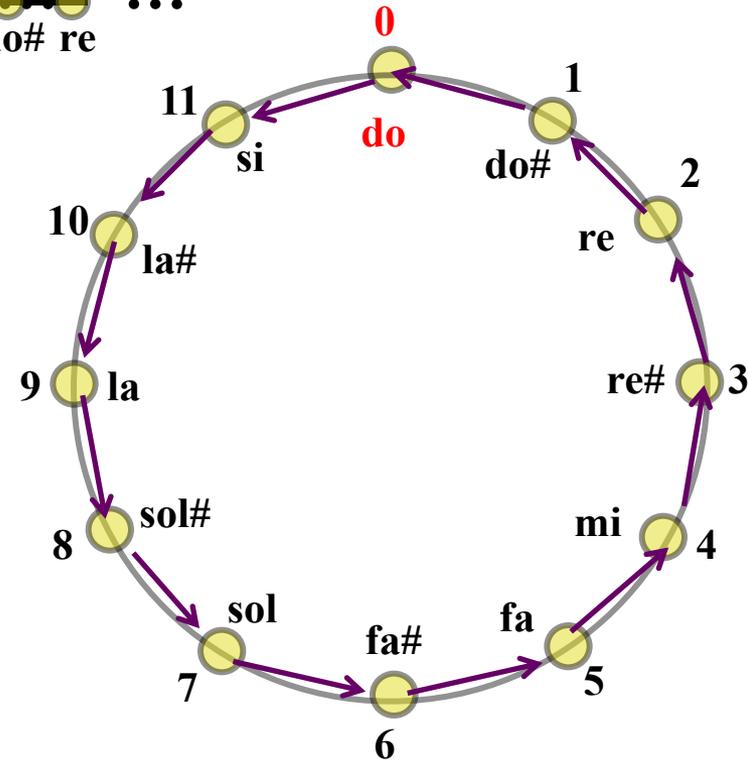
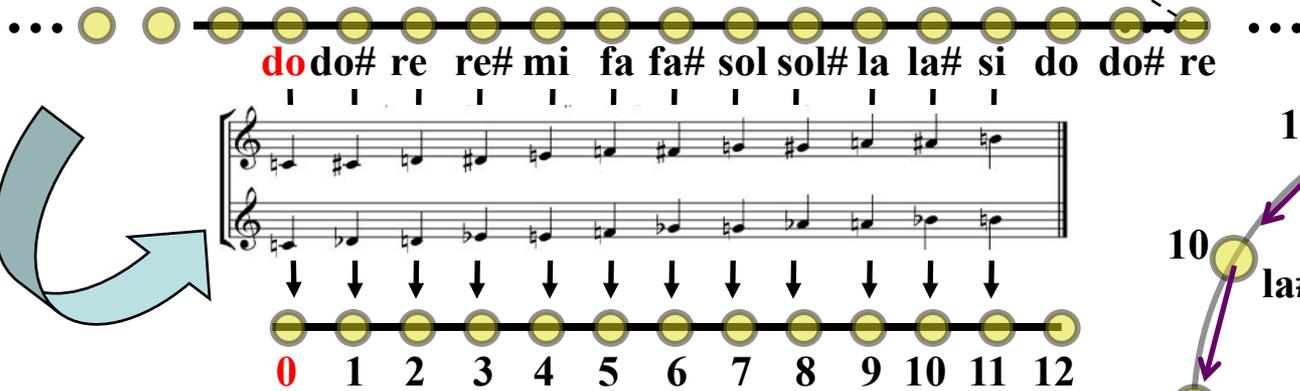


→ Quels sont les autres entiers qui engendrent le cercle ?

# Intervalles générateurs du tempérament égal

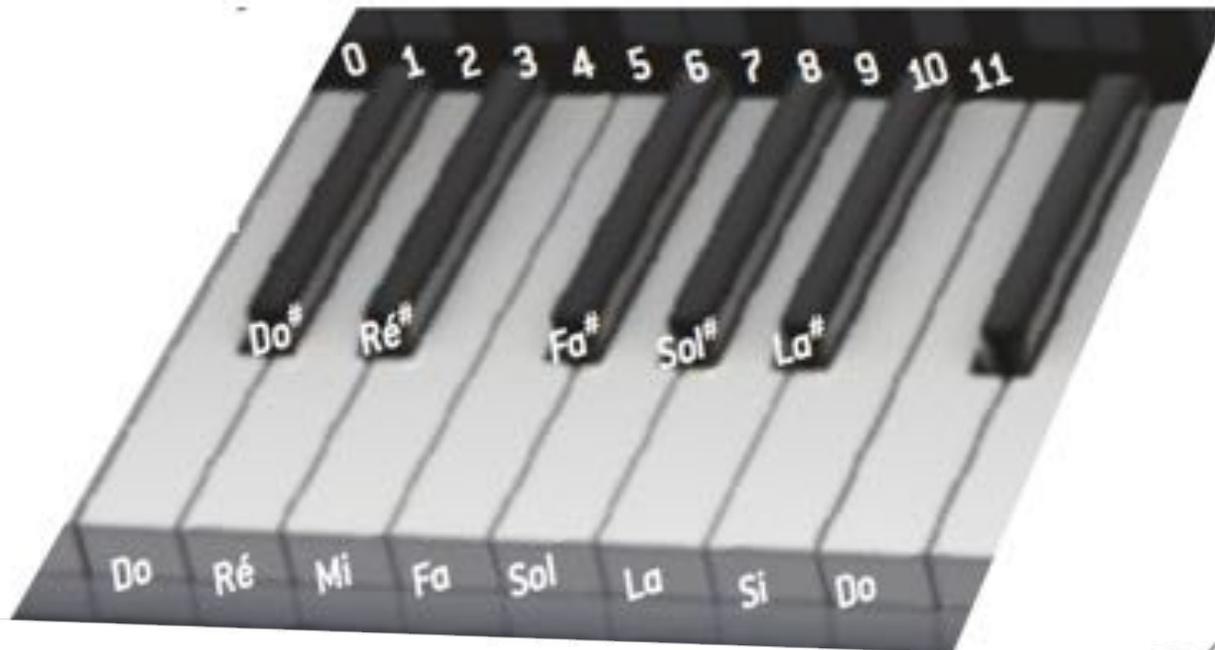


11

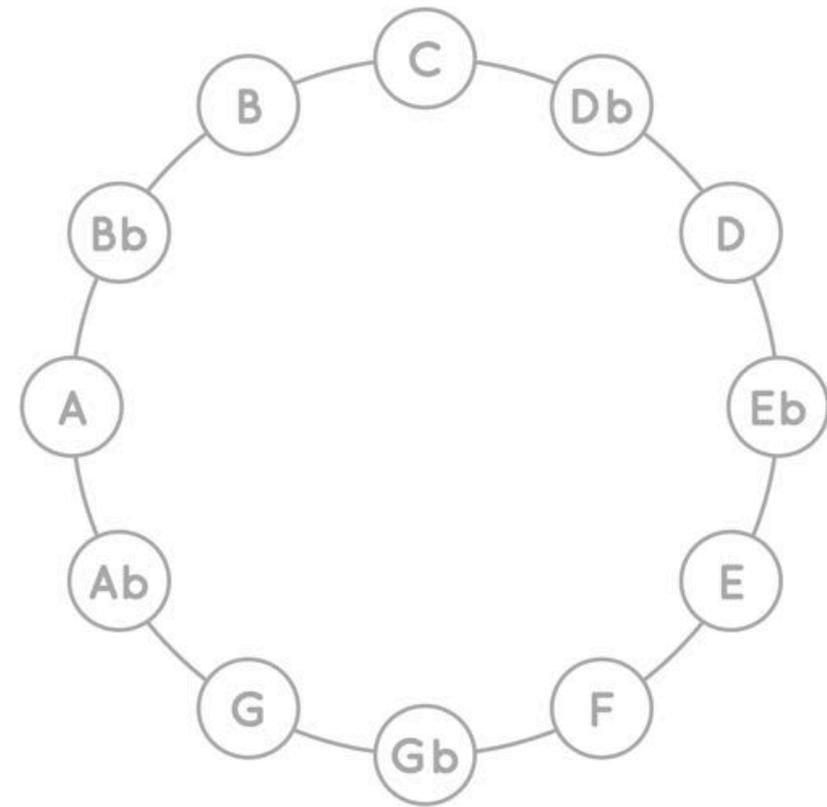


→ Quels sont les autres entiers qui engendrent le cercle ?

# Initiation aux structures algébriques



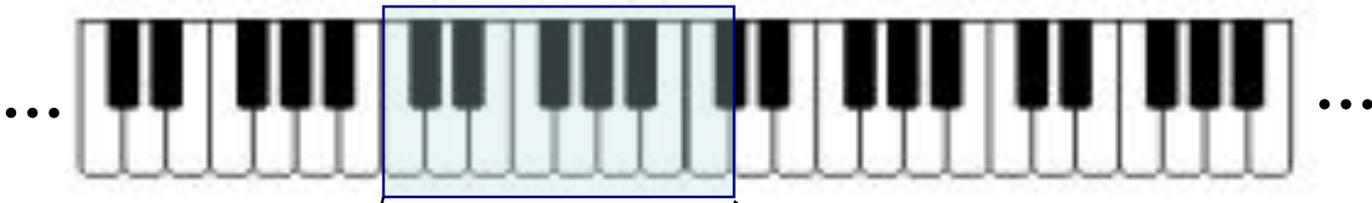
Le tempérament égal a une structure de *groupe* (cyclique)



**C = 0**  
**C# = D<sub>b</sub> = 1**  
**D = 2**  
**D# = E<sub>b</sub> = 3**  
**E = 4**  
**F = 5**  
**F# = G<sub>b</sub> = 6**  
**G = 7**  
**G# = A<sub>b</sub> = 8**  
**A = 9**  
**A# = B<sub>b</sub> = 10**  
**B = 11**



# Les transpositions musicales sont des additions...

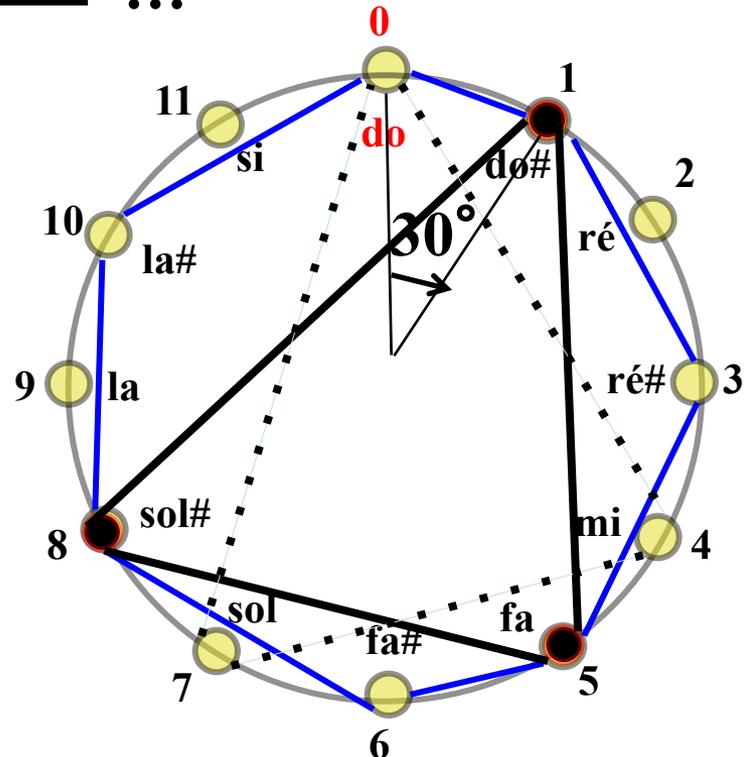


$$Do\# \text{ maj} = \{1, 3, 5, 6, 8, 10, 0\}$$

... do do# ré ré# mi fa fa# sol sol# la la# si do ...

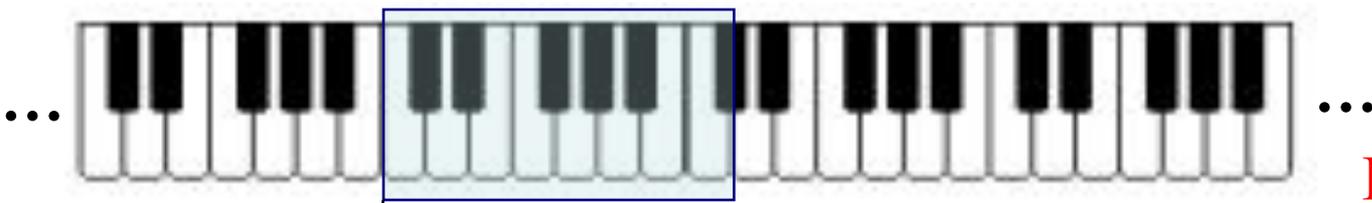


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



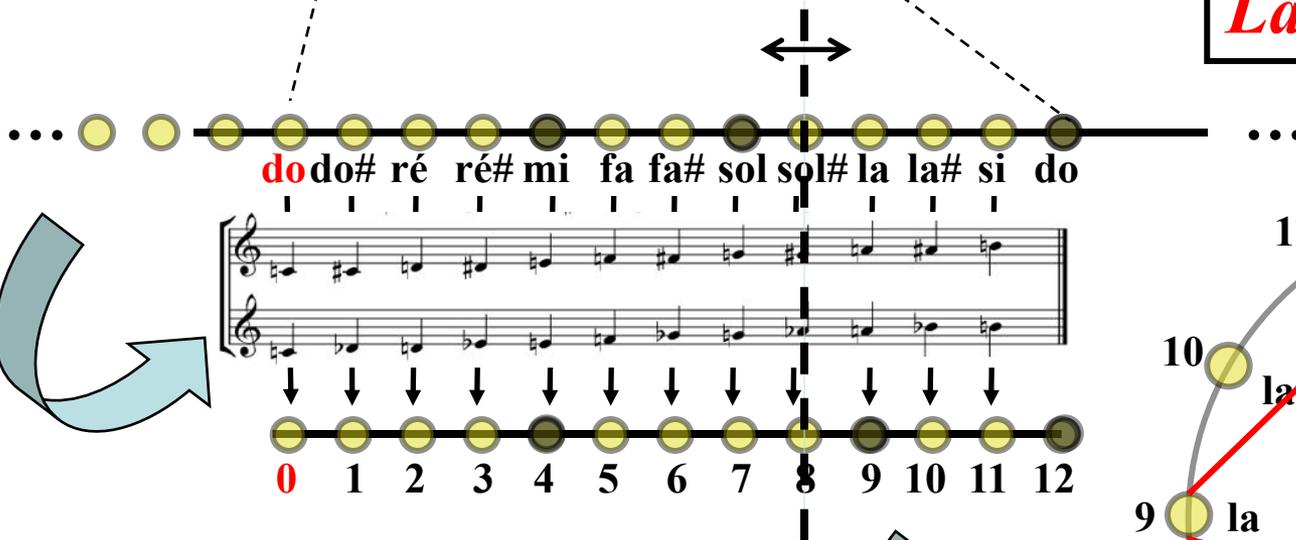
... ou des rotations !

# Les inversions sont des symétries axiales

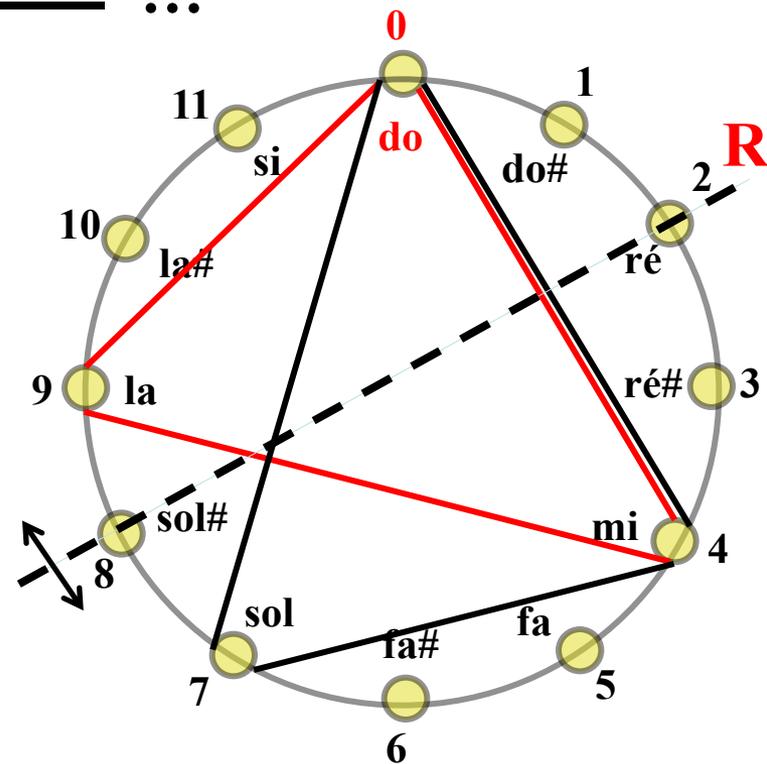
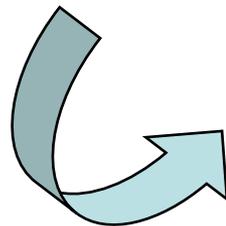
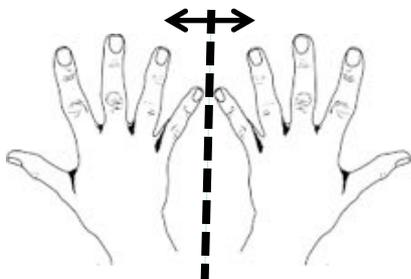


**R** comme **relatif**

*Do* maj = {0,4,7}  
*La* min = {0,4,9}



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

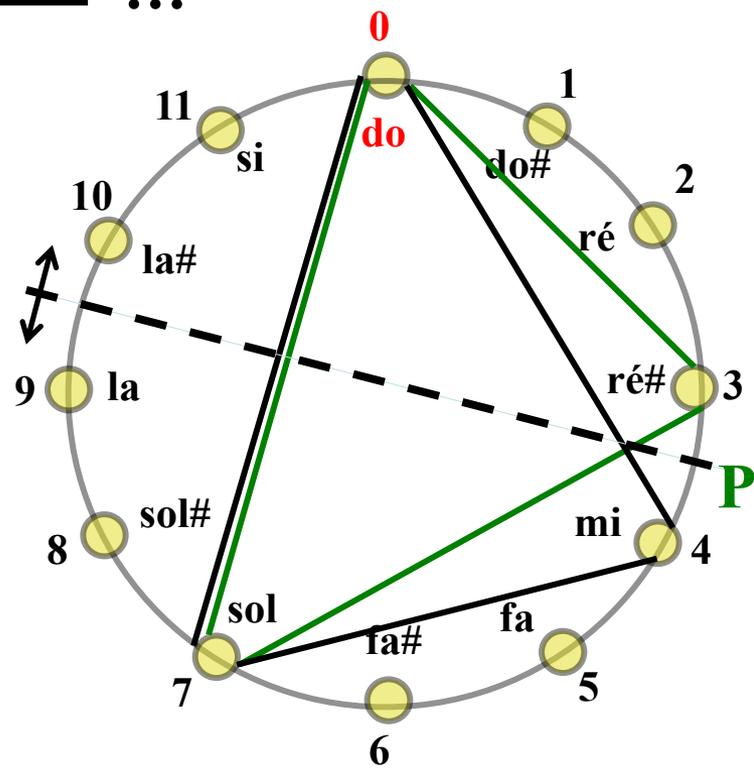
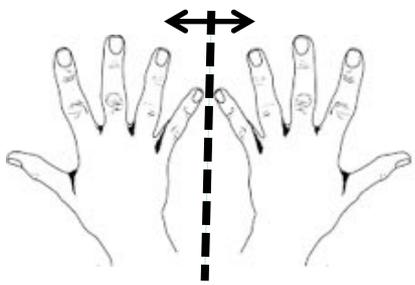
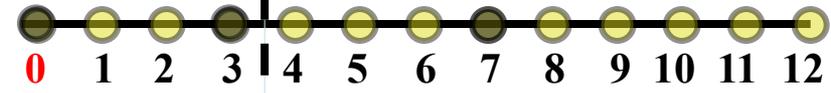
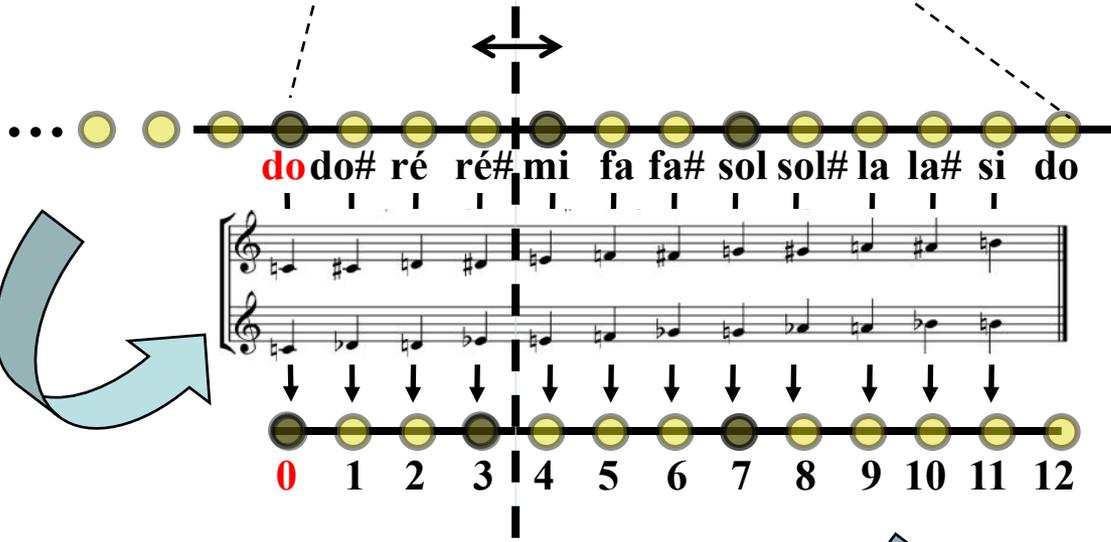


# Les inversions sont des symétries axiales



**P** comme **parallèle**

*Do* maj = {0,4,7}  
*Do* min = {0,3,7}

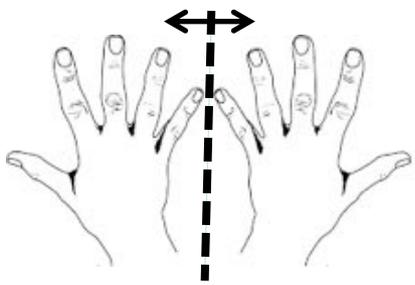
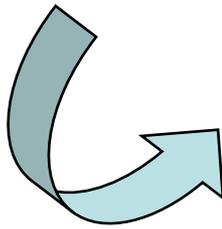
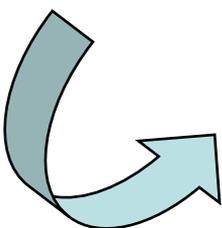
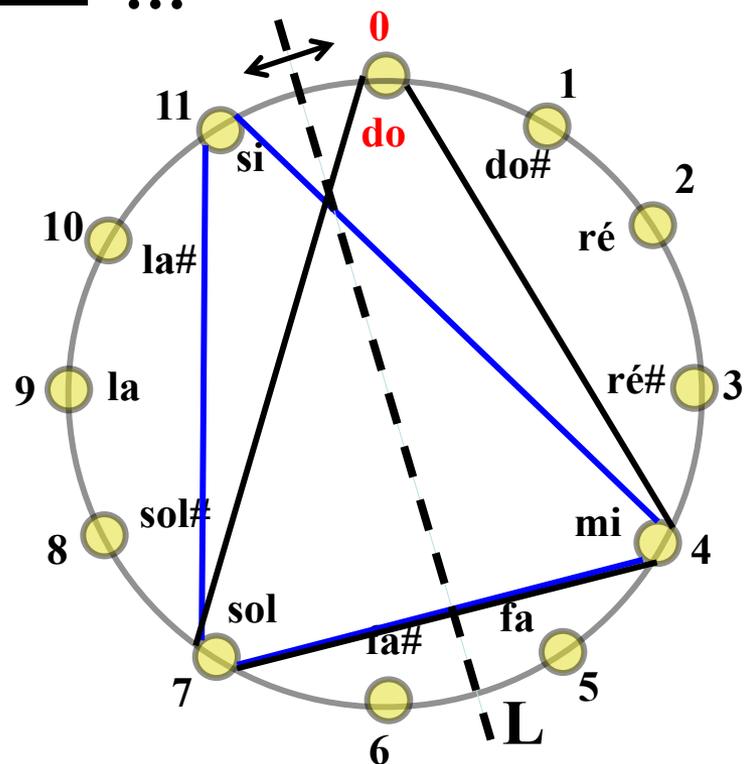
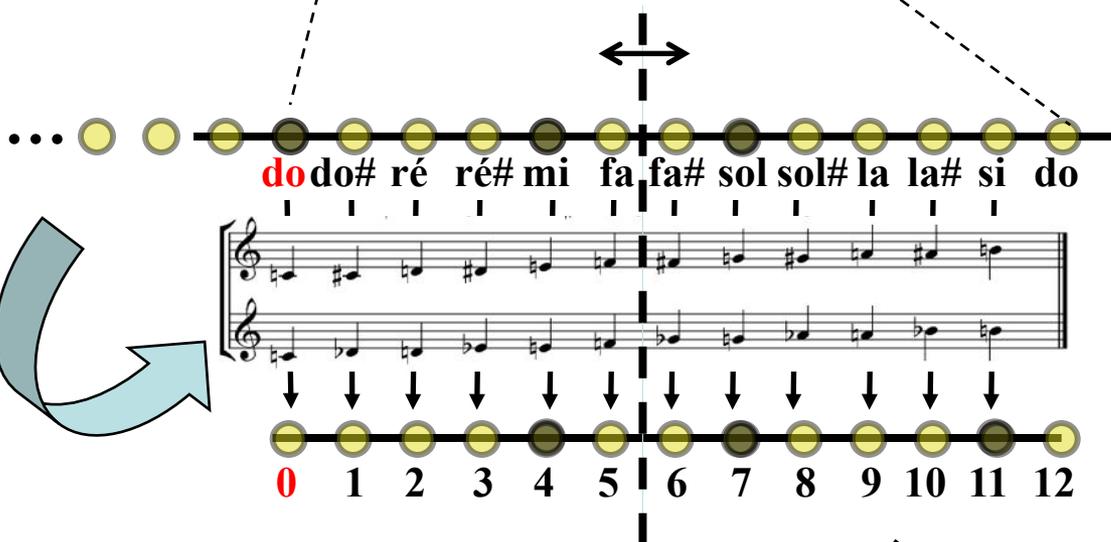


# Les inversions sont des symétries axiales

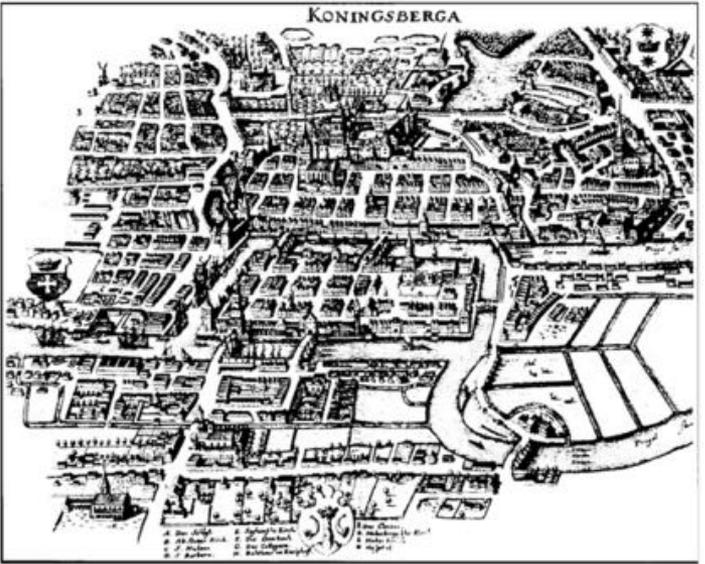


**L = Leading Tone**

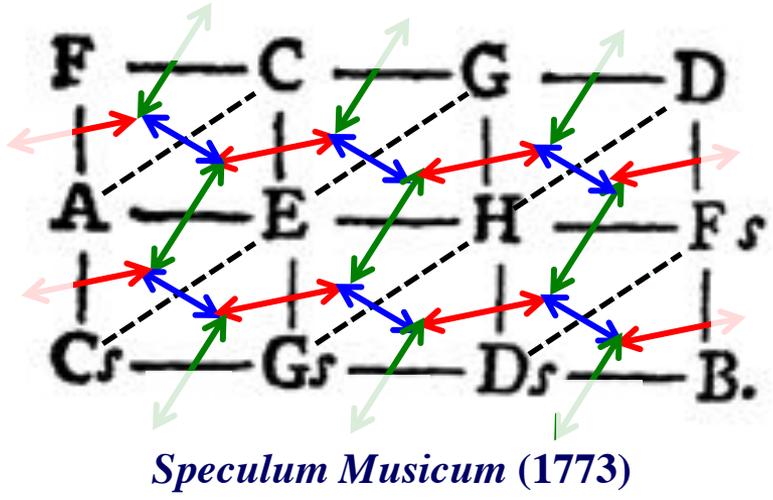
*Do* maj = {0,4,7}  
*Mi* min = {4,7,11}



# Le Tonnetz (ou nid musical d'abeilles)

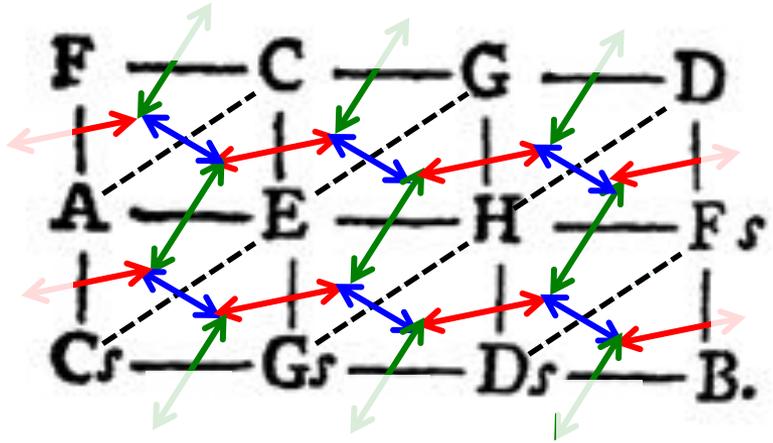
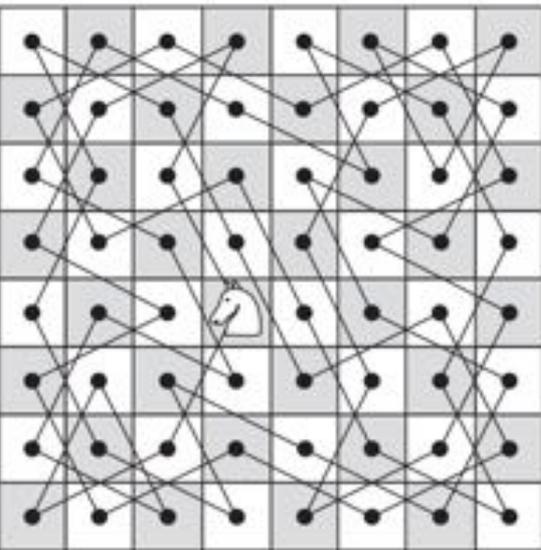


Leonhard Euler



*Speculum Musicum* (1773)

# Le Tonnetz (ou nid musical d'abeilles)

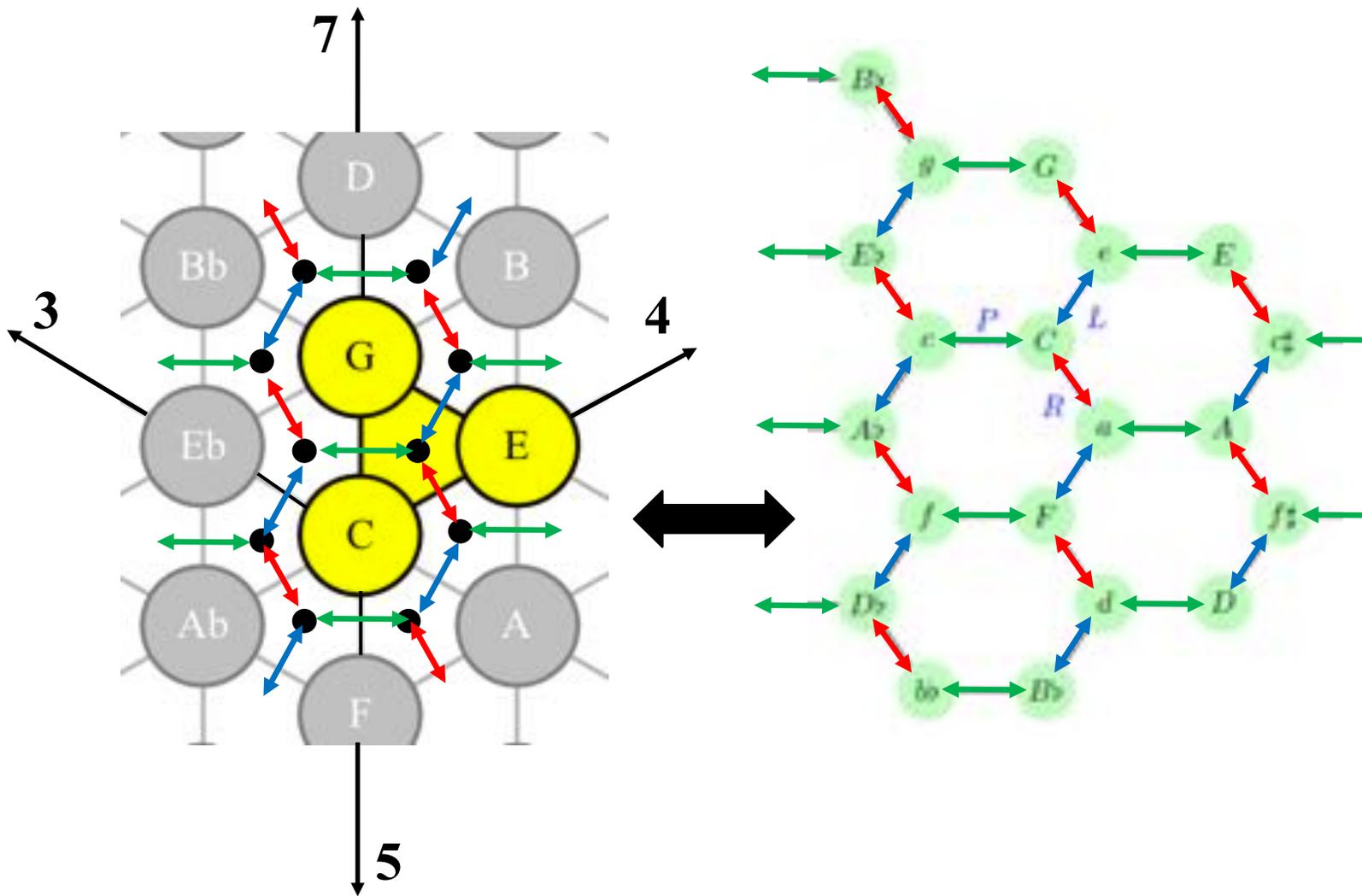


*Speculum Musicum (1773)*



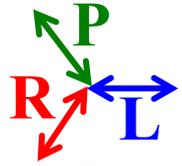
Leonhard Euler

# Construction du maillage hexagonal à partir du Tonnetz

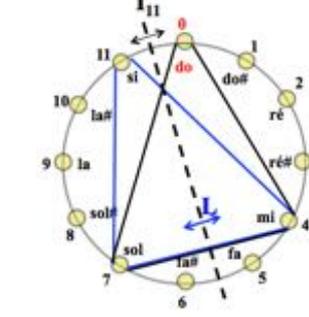
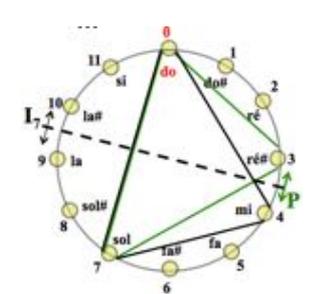
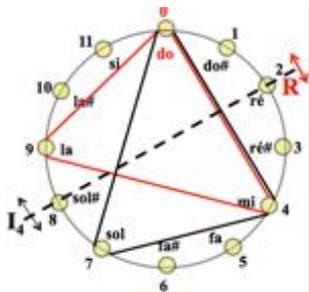
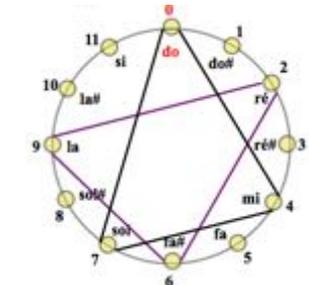
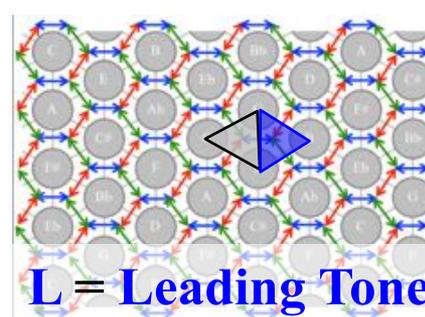
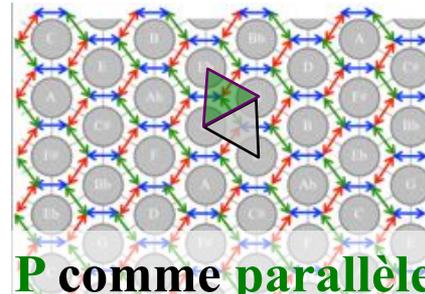
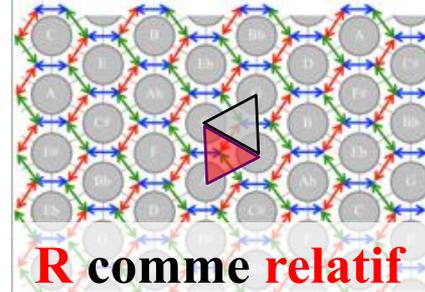
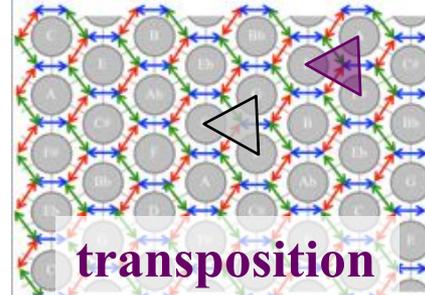
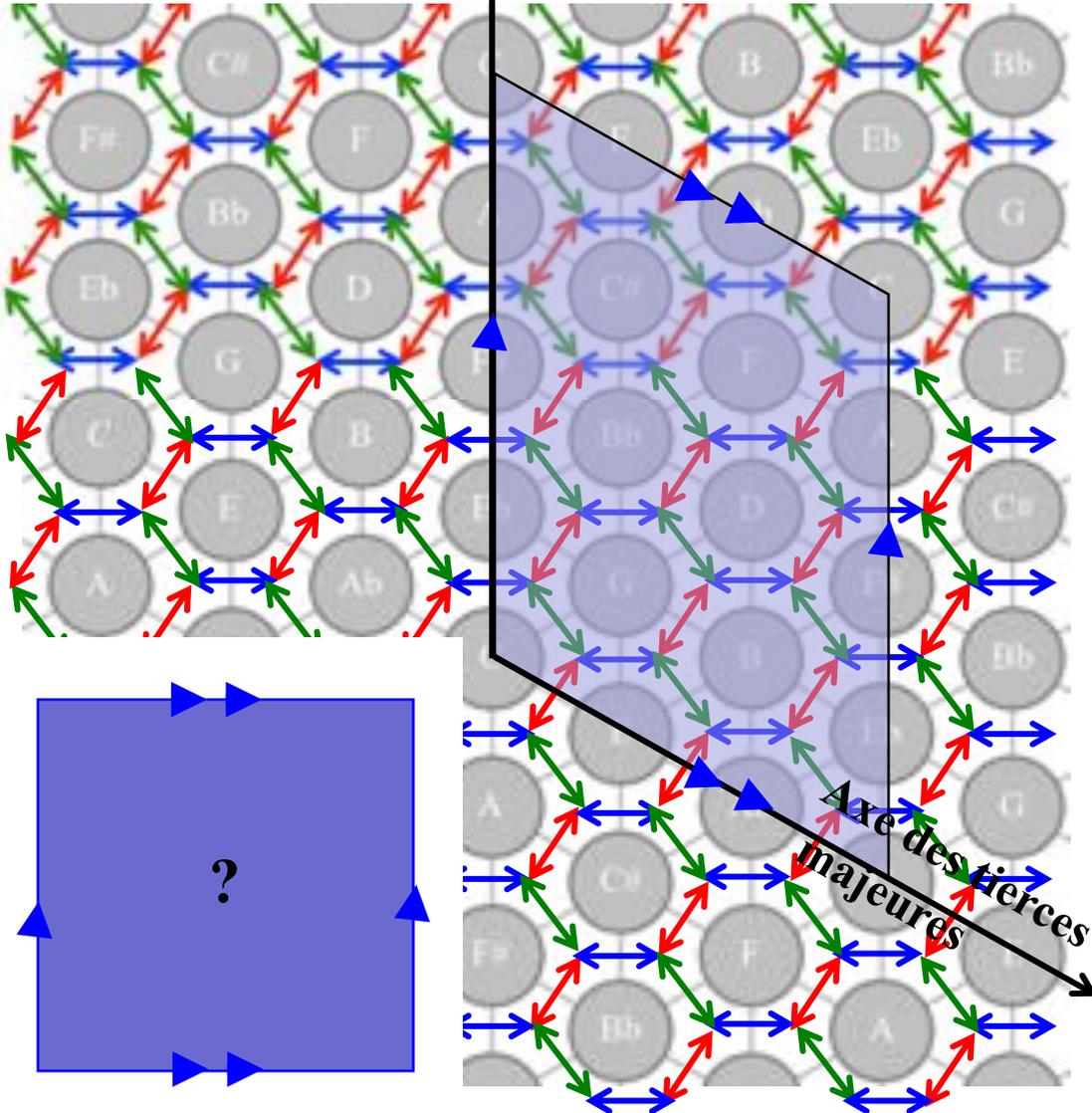


➔ DEMO

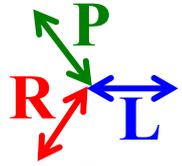
# Le Tonnetz et ses symétries



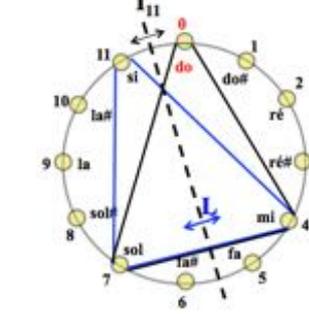
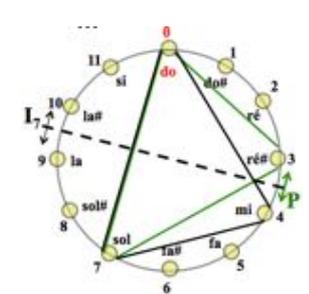
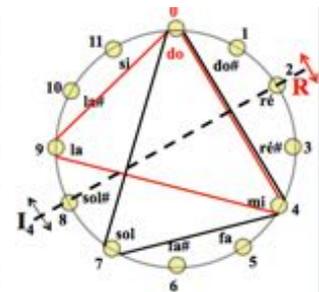
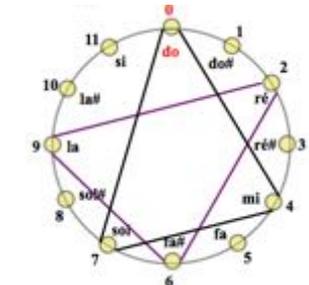
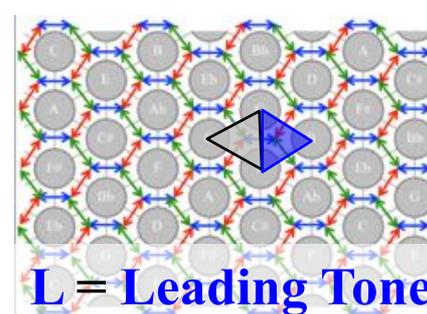
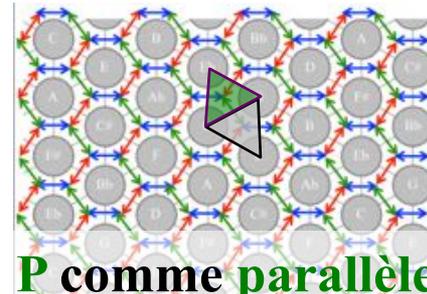
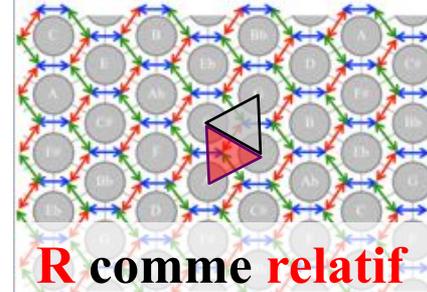
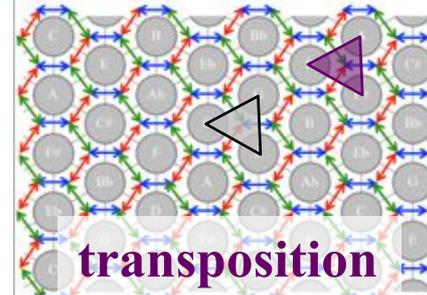
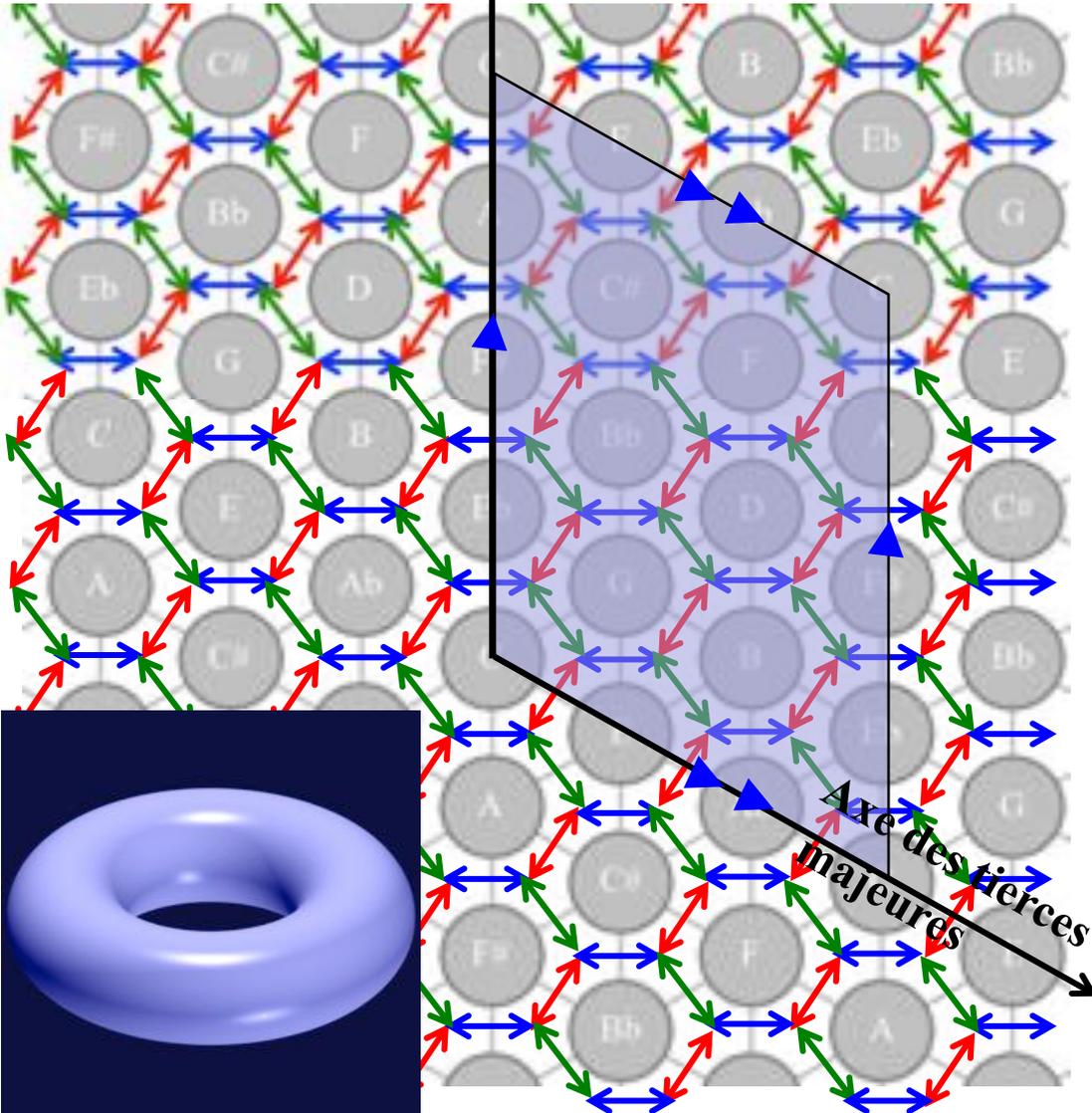
Axe de tierces mineures



# Le Tonnetz et ses symétries



Axe de tierces mineures

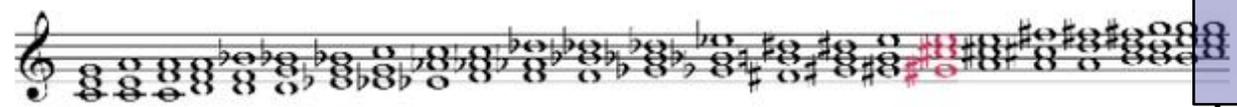




# Zig-zag et cycles hamiltoniens dans le Tonnetz

## Le Blé en Herbe

(Polo/Moreno/Dieu)



← time

Plonger comme un enfant, cheveux au vent  
 Sous l'océan du blé en herbe  
 Marée d'épis couleur d'amande  
 Qui tendent à caresser le ciel

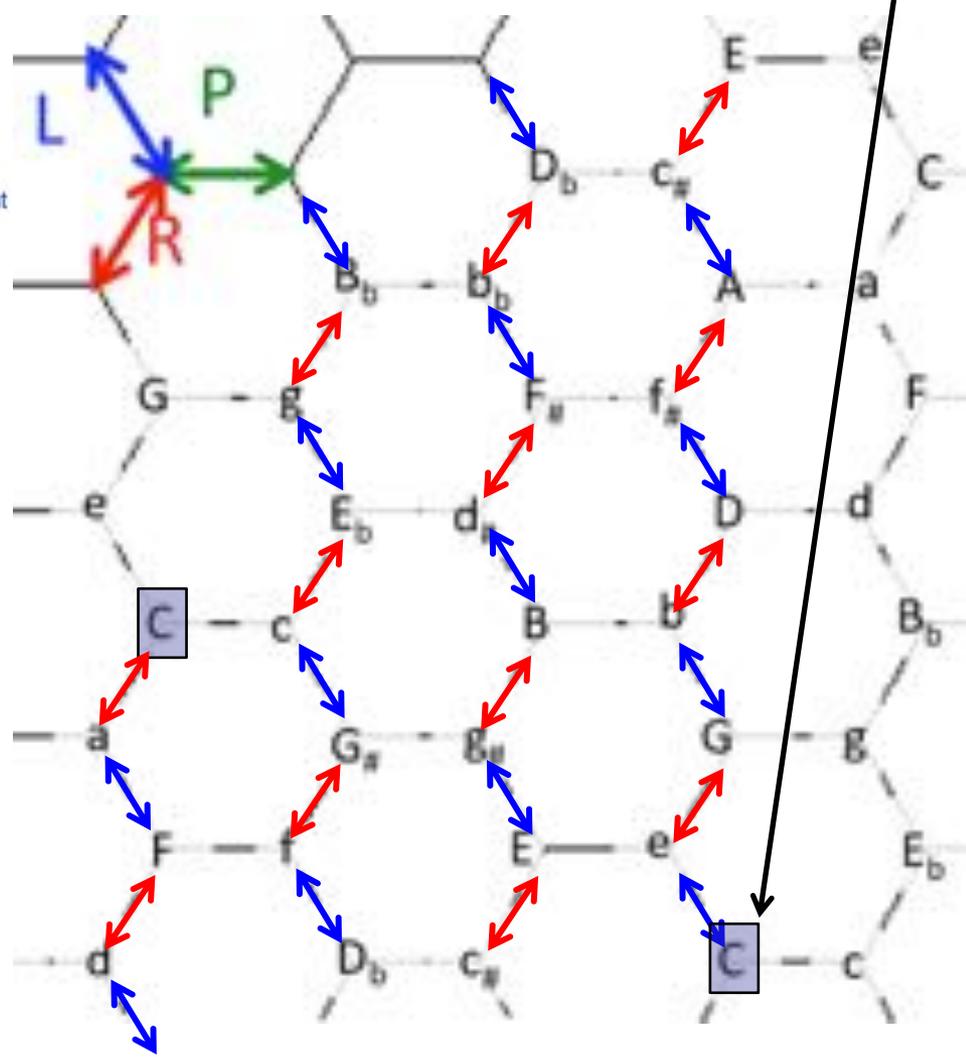
Algues tendres de mille plages  
 Frôlant le ventre des nuages  
 Cheveux de pluie, dos de poissons  
 Qui frissonnent à l'unisson

Suivre le bord des continents  
 Dans l'océan du blé en herbe  
 Pêcher le corail du pavot  
 Dans le sang des coquelicots

Croiser matin dans l'herbe folle  
 Deux tourterelles qui s'envolent  
 Suivre les jeux des hirondelles  
 Sur le paysage éternel  
 Nager comme un enfant, cheveux au vent  
 Sous l'océan  
 Du blé en herbe

Marée de fruits au goût amer  
 Acide et salée comme la mer

Vers l'îlot d'un petit village  
 Vers un château d'eau sur la plage  
 Quand tout s'éteint avant l'orage  
 Quand se lève le vent du large  
 Sur le blé vert



### CABARET HAMILTONIEN

FABRICE QUÉDY  
 Formidables dans la musique savante

MORENO ANDREATTA  
 Menteuses dans la musique

POLO PIERRE LAMY  
 Écriture appliquée aux formes musicales

Alexis - Voix, guitare, écriture  
 Augustin - Voix, claviers, écriture  
 Clara - Voix, guitare, écriture  
 Emma - Voix, harmonica, écriture  
 Simon - Voix, alto, écriture  
 Thomas - Voix, claviers, écriture

Écrire sous la contrainte...  
 TACHER DU PAPIER SOUS  
 L'OBLIGATION DE FAIRE  
 QUELQUE CHOSE...

SALIR DU BOIS CONDITIONNÉ  
 AVEC LE DEVOIR MORAL DE  
 TRANSFORMER UN OBJET  
 INDEFINI...

SAMEDI 27 FÉVRIER 2016 à 11h  
 AMPHI PARIS SCIENCE ET LETTRES  
 22 rue de St-Louis  
 75005 Paris

ENTRÉE LIBRE

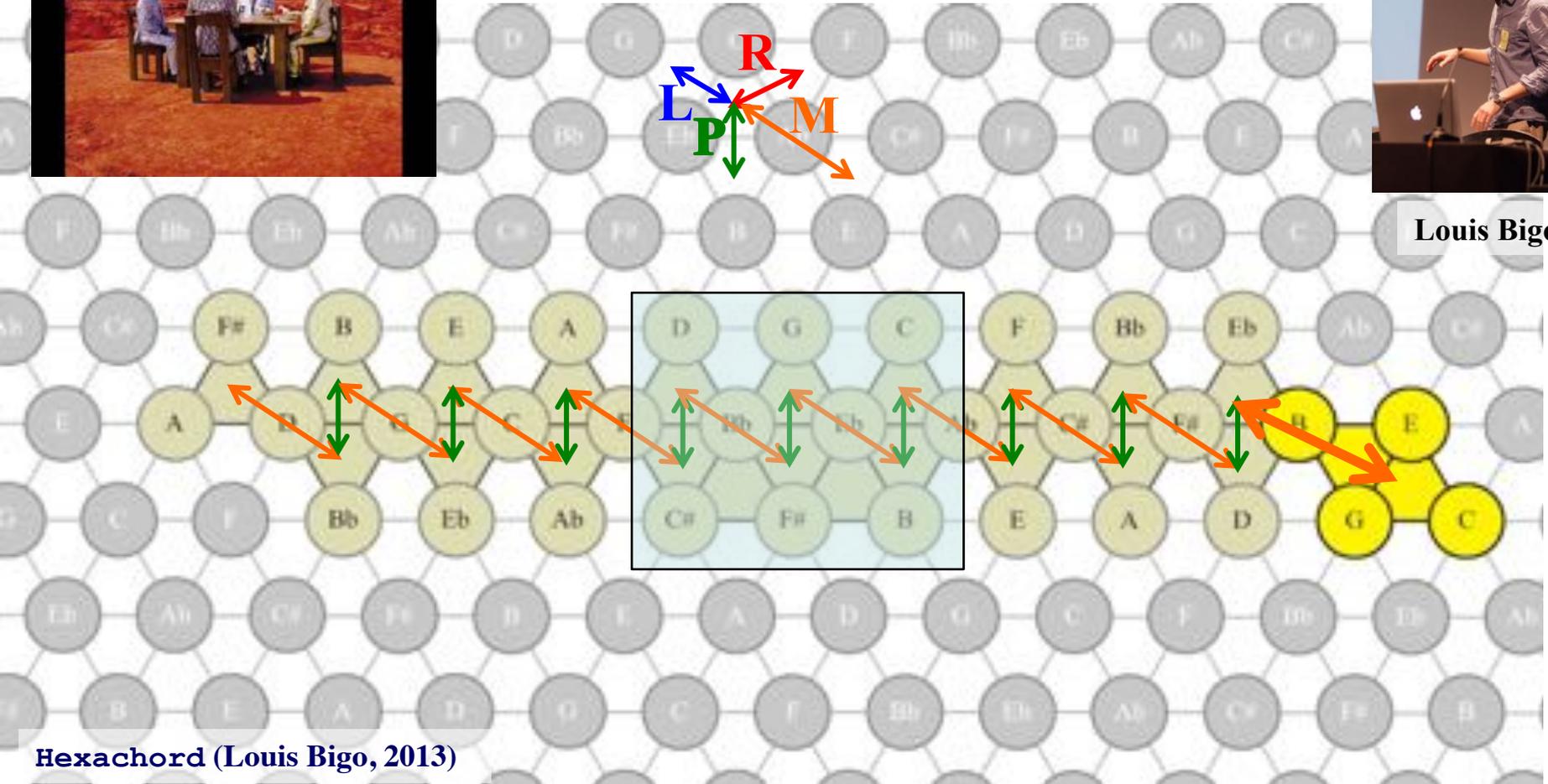
# Symétries et procédés algorithmiques chez *Muse*



“Take a bow” (*Black Holes and Revelations*, 2006)



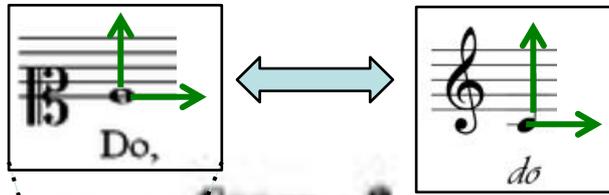
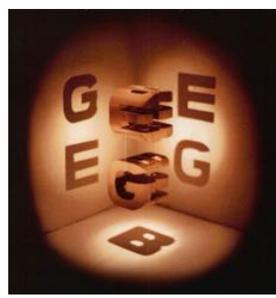
Louis Bigo



Hexachord (Louis Bigo, 2013)

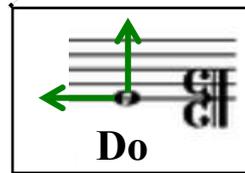
axe temporel →

# Canons énigmatiques chez Bach et géométrie

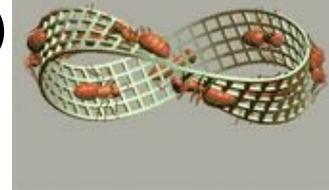


Canones diversi  
super thema regium

1. Canon a 2



# Ma fin est mon début (mais renversé !)

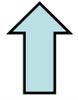
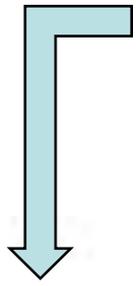


## Canones diversi super thema regium:

1. Canon a 2

## Canones diversi super thema regium:

1. Canon a 2

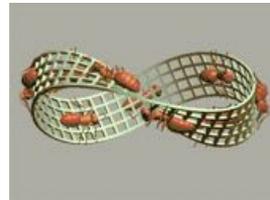




<http://www.josleys.com/Canon/Canon.html>

---

[min. 1'14"]



# Le « cercle rythmique » et ses rotations

## CLAPPING MUSIC

FOR TWO PERFORMERS

① J. 044-100

CLAP 1  
CLAP 2

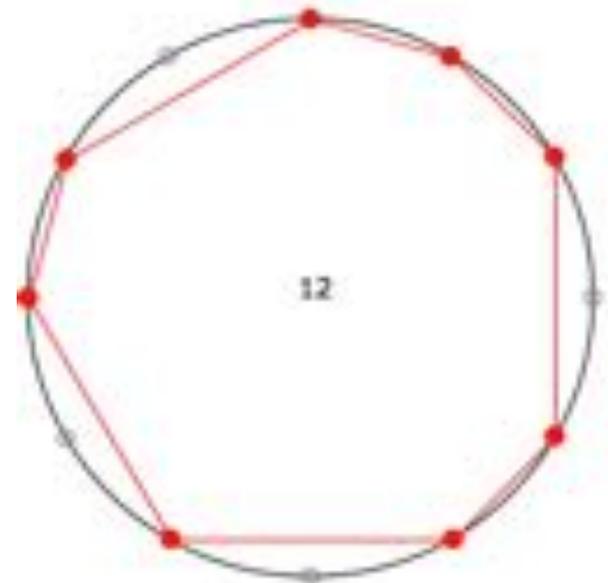
Repeat back ⑫, then end

The performers begin and end with both performers in unison at bar ①. The number of repeats of each bar should be fixed at twelve repeats per bar. Since the first performer part does not change, it is up to the second performer to ease from one bar to the next. The second performer should try to keep his or her claps close to the first part of each measure (not on the first beat of the group of three claps), so that his claps always fall on a new beat of his or her unchanging pattern.

The choice of a particular clapping sound, ie, with cupped or flat hands is left up to the performers, whichever sound is chosen, both performers should try to get the same one so that their two parts will blend to produce one overall exciting pattern.

**Clapping Music de Steve Reich (1972)**

Steve Reich 1972  
12 repeats 1972



# Le « cercle rythmique » et ses rotations

## CLAPPING MUSIC

FOR TWO PERFORMERS

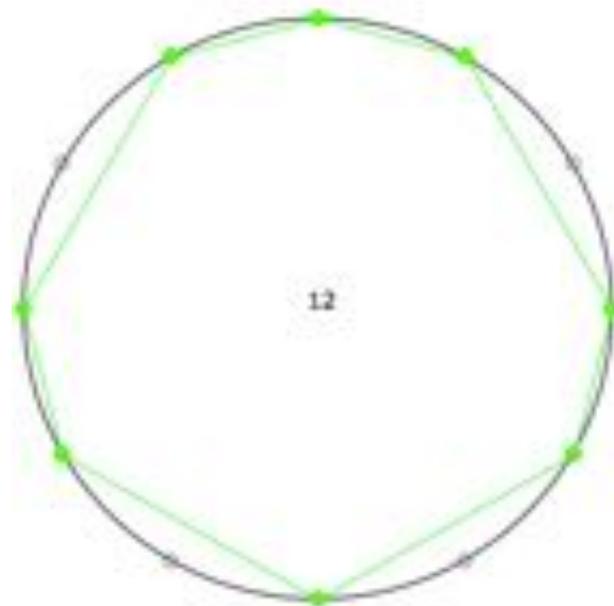
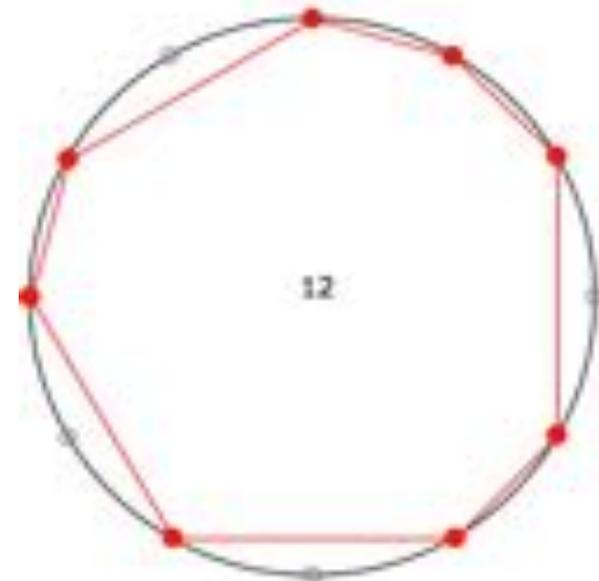
CLAP 1  
CLAP 2

J. 044-100

Repeat last 12, then end

The performers begin and end with both performers in unison at bar ①. The number of repeats of each bar should be fixed at twelve repeats per bar. Since the first performer part does not change, it is up to the second performer to ease from one bar to the next. The second performer should try to keep his or her direction where it is written, i.e. on the first beat of each measure (not on the first beat of the group of three claps), so that his direction always falls on a new beat of his or her unchanging pattern.

The choice of a particular clapping sound, i.e. with cupped or flat hands is left up to the performers, whichever sound is chosen, both performers should try to get the same one so that their two parts will blend to produce one overall rhythmic pattern.



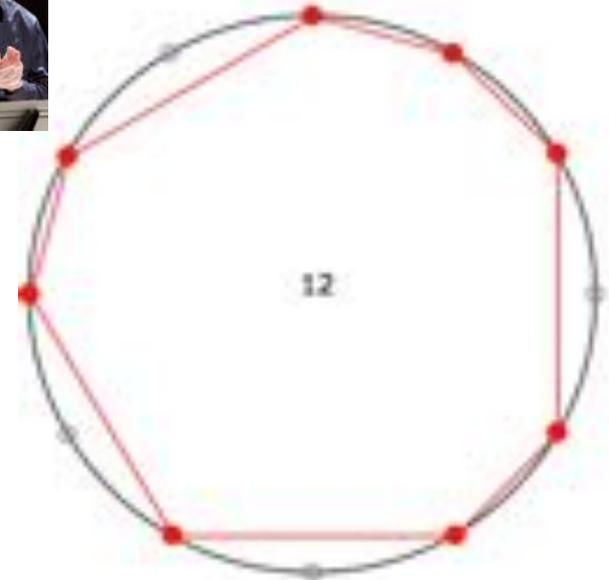
# Le « cercle rythmique » et ses rotations

## CLAPPING MUSIC

FOR TWO PERFORMERS



Handwritten musical score for two clappers. The score is written on two staves, labeled CLAP 1 and CLAP 2. The tempo is marked 'J. 164-168'. The score is divided into measures, with some measures highlighted by colored boxes: a red box around the first measure, a green box around the second measure, and an orange box around the third measure. The score continues with several more measures, each starting with a circled measure number (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12). At the bottom right of the score, it says 'Repeat back to 1, then end'.



The performers begin and end with both performers in unison at bar 1. The number of repeats of each bar should be fixed at twelve repeats per bar. Since the first performer part does not change, it is up to the second performer to cause five bar to the next. The second performer should try to keep his or her clapping where it is written, i.e. on the first beat of each measure (not on the first beat of the group of three claps), so that his clapping always falls on a new beat of his or her unchanging pattern.

The choice of a particular clapping sound, i.e. with cupped or flat hands is left up to the performers, whichever sound is chosen, both performers should try to get the same one so that their two parts will blend to produce one overall exciting pattern.

Clapping Music (1972)

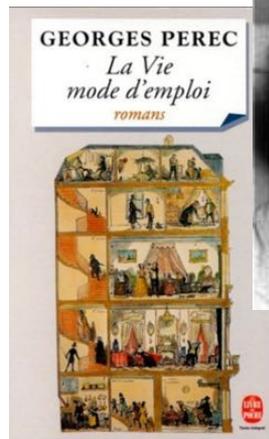
Steve Reich 1972  
revised 1979

Gerubach's Scrolling Score Project  
<http://www.gerubach.com>

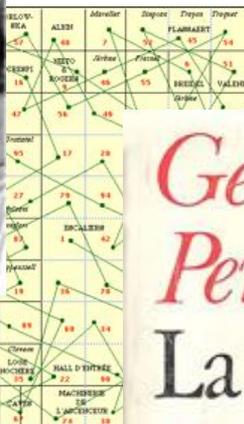
# Les contraintes dans l'art : l'OuLiPo (Ouvroir de Littérature Potentielle)



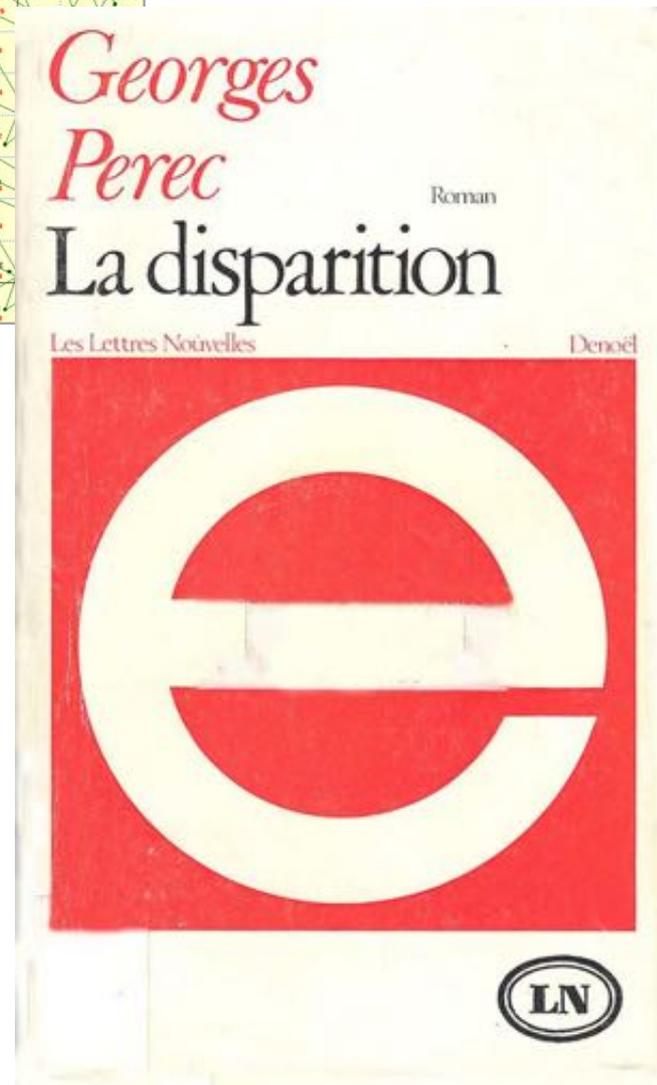
*Cent mille milliards de poèmes, 1961*



**Georges Perec**



*La vie mode d'emploi,*



**Raymond Queneau**

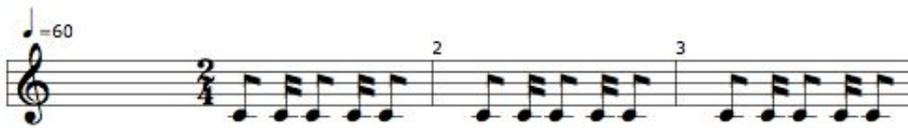
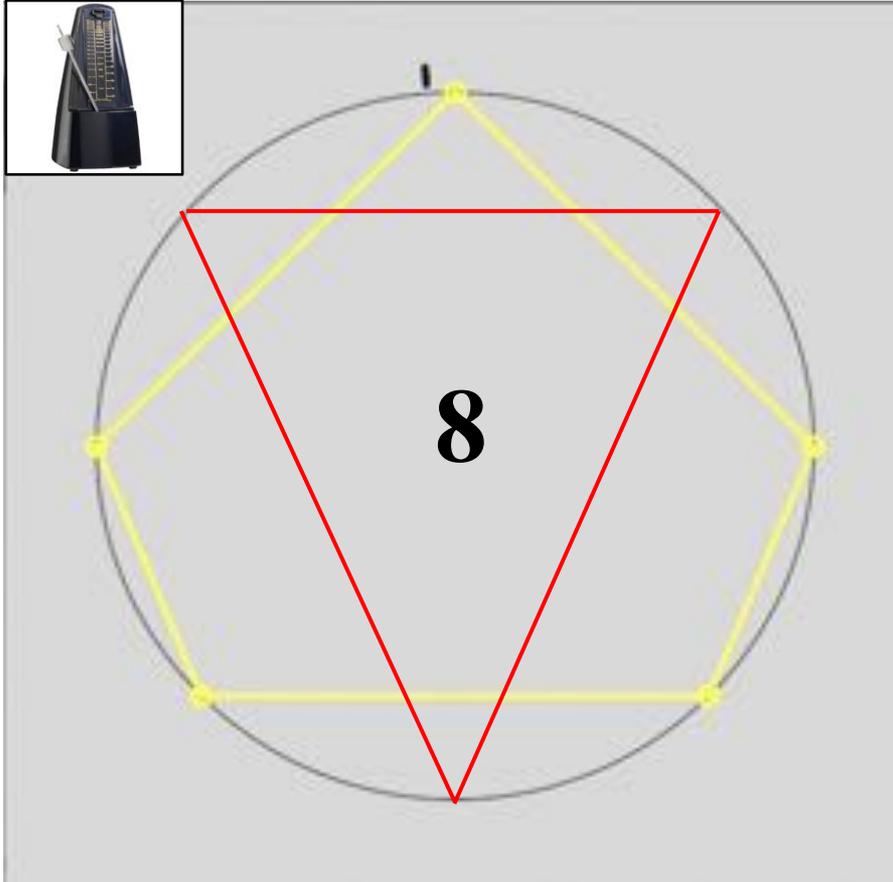


**Italo Calvino**

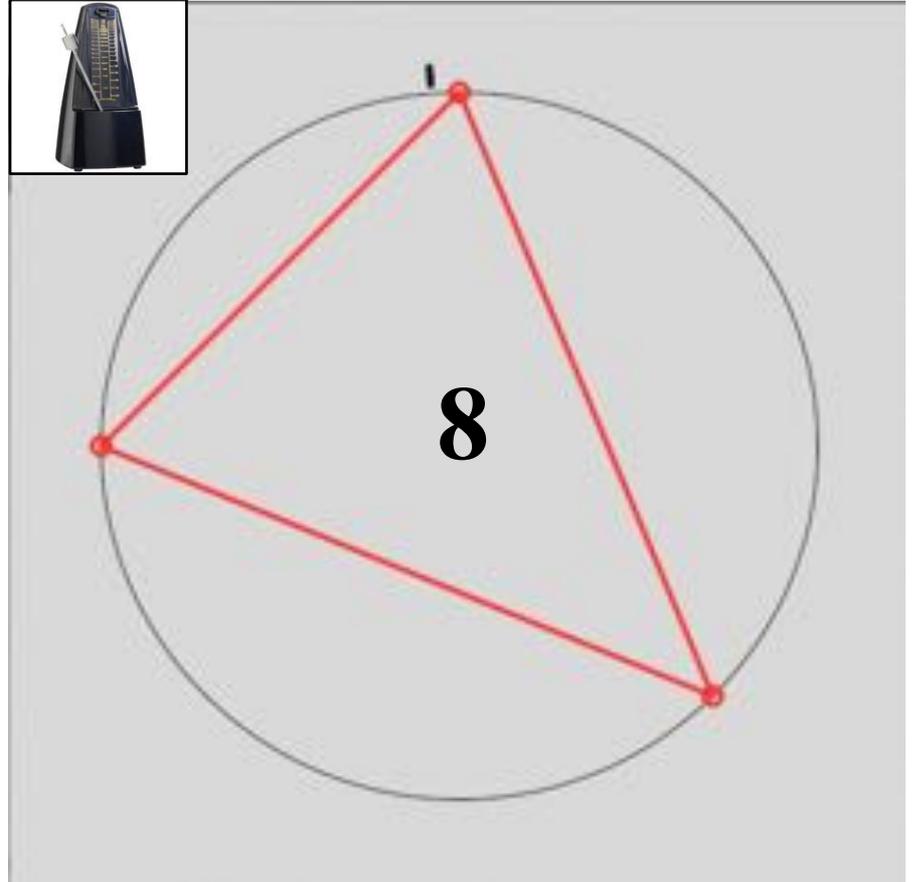
*Le Château des destins croisés, 1969*

# Rythmes afro-cubains et symétries

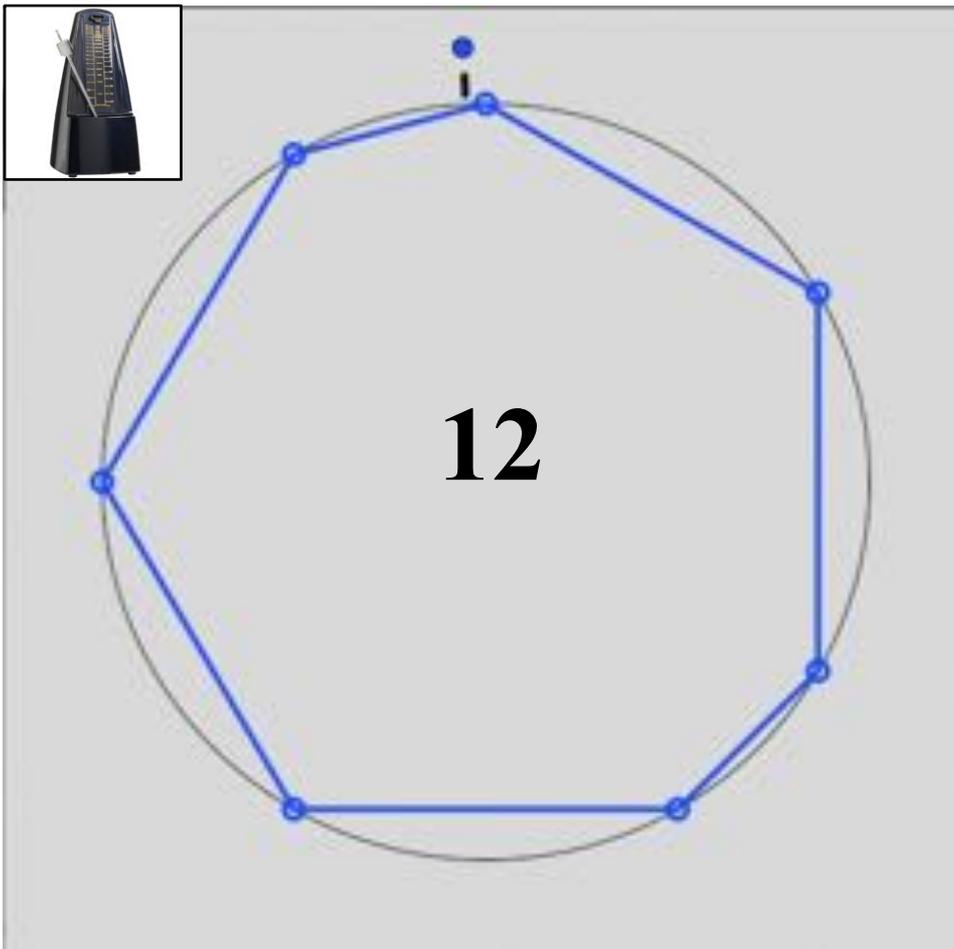
## *El cinquillo*



## *El trecillo*

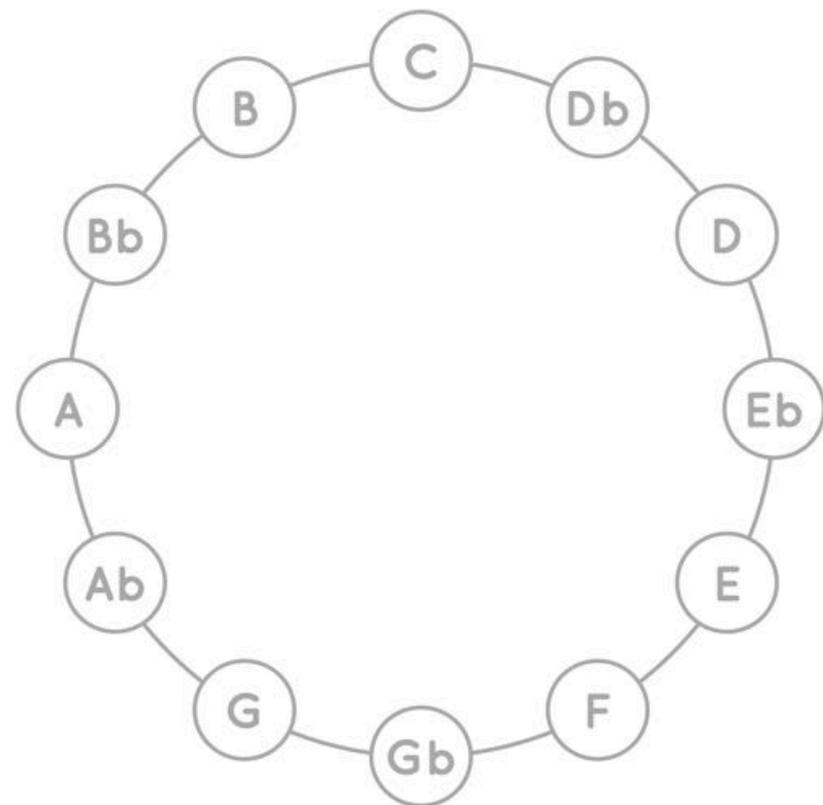
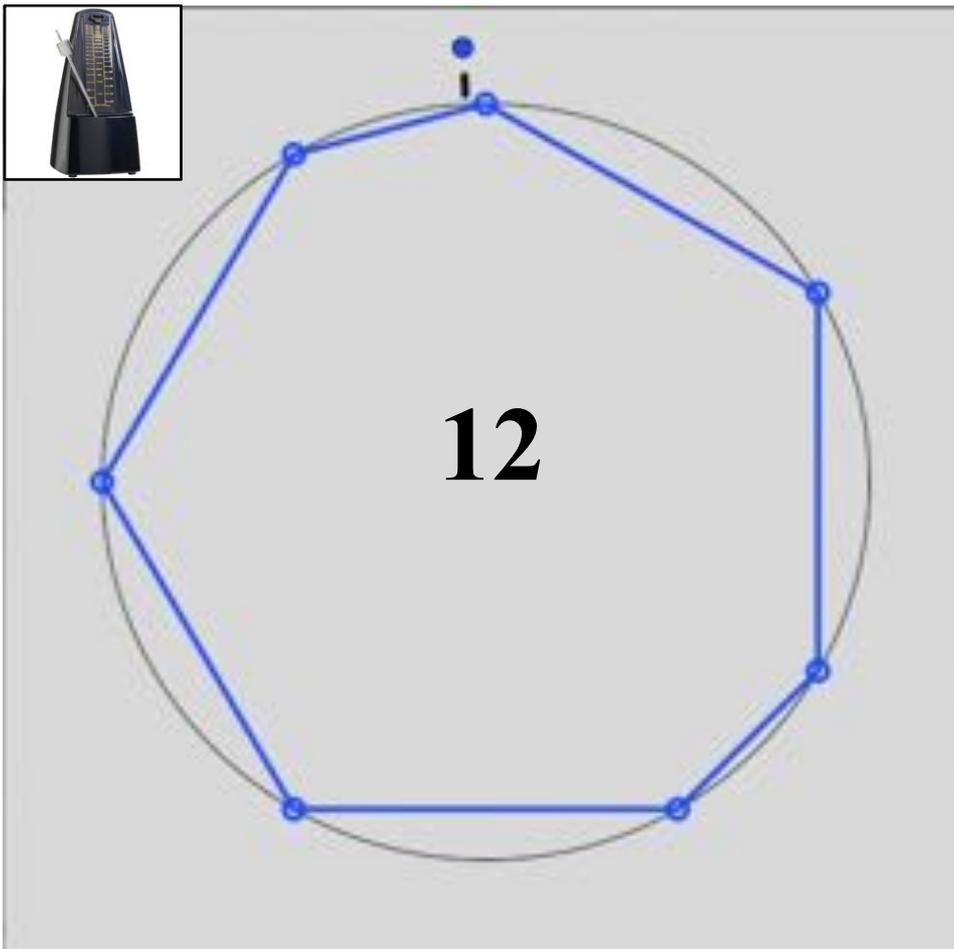


# Représentation circulaire des rythmes



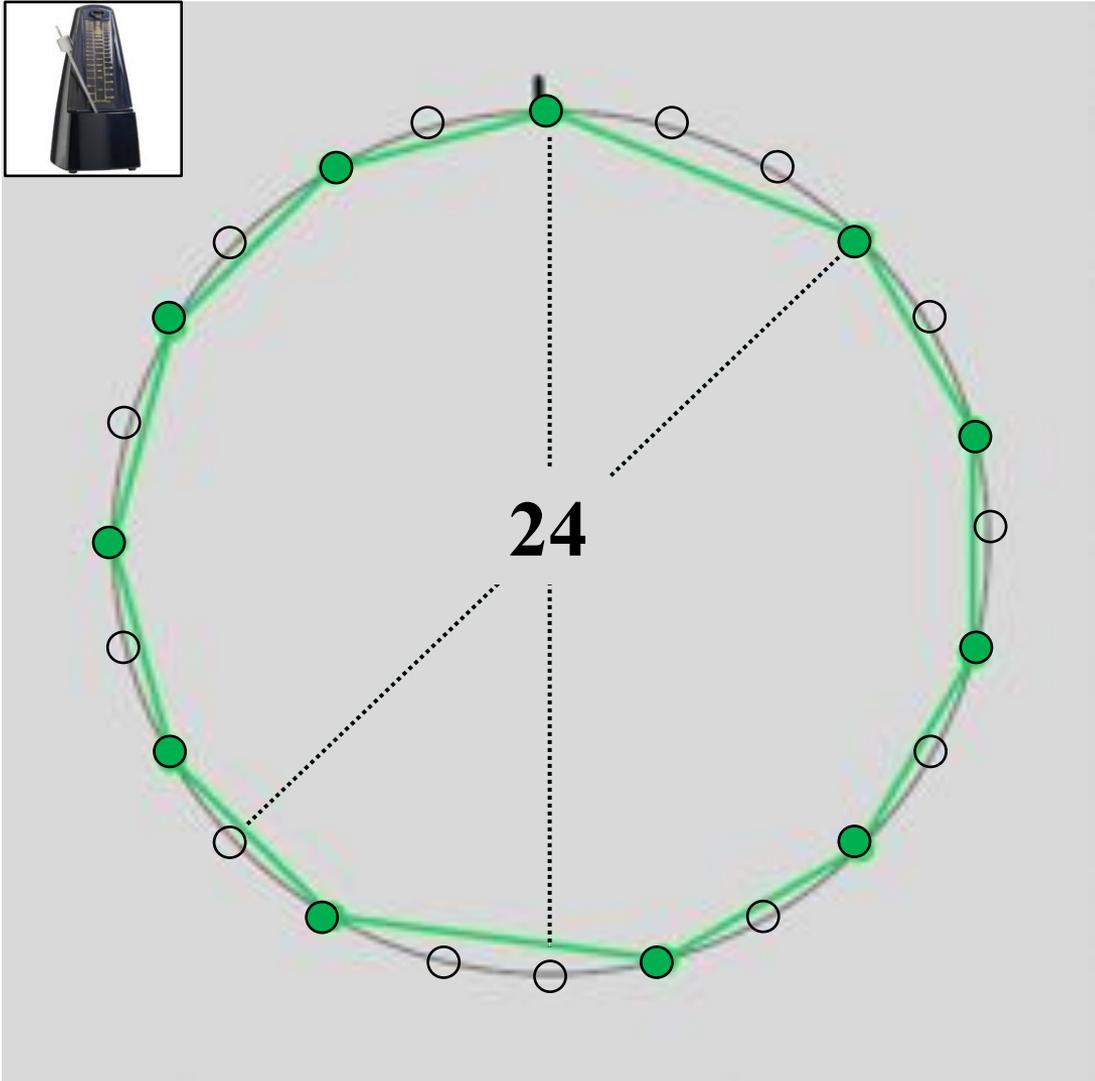
**Abadja ou Bembé**

# Représentation circulaire des rythmes



**Abadja ou Bembé**

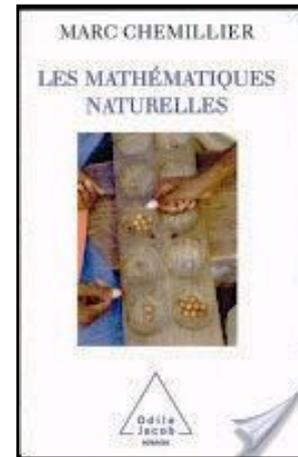
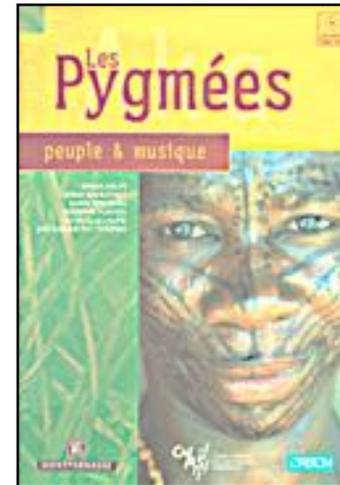
# Imparité rythmique et traditions orales



Simha Arom



Marc Chemillier

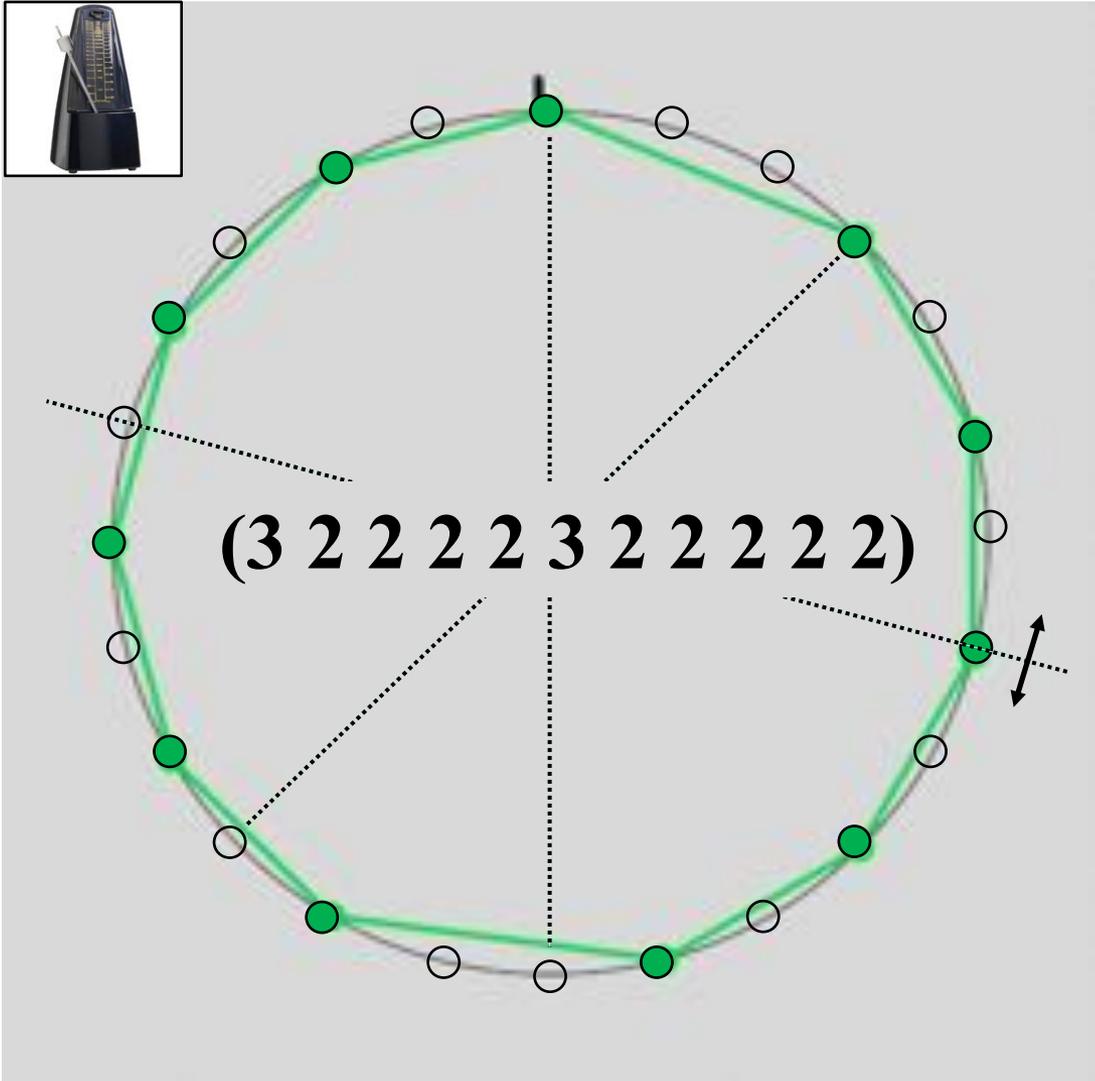


**musimédiane**

publiée avec le concours de la SFAM

revue audiovisuelle et multimédia d'analyse musicale

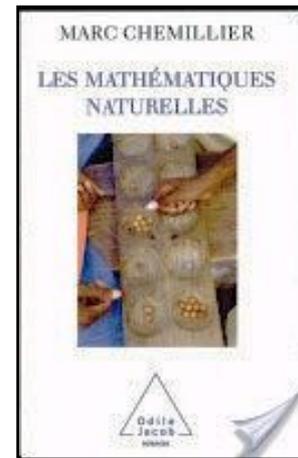
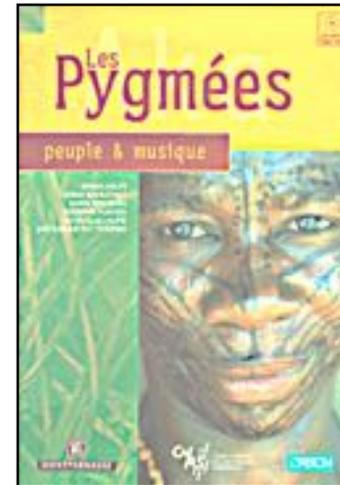
# Imparité rythmique et traditions orales



Simha Arom



Marc Chemillier

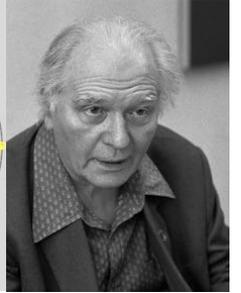
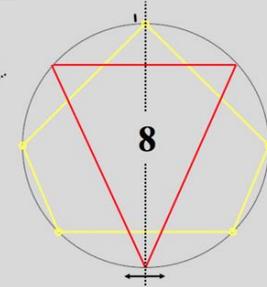
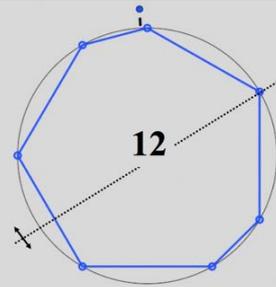
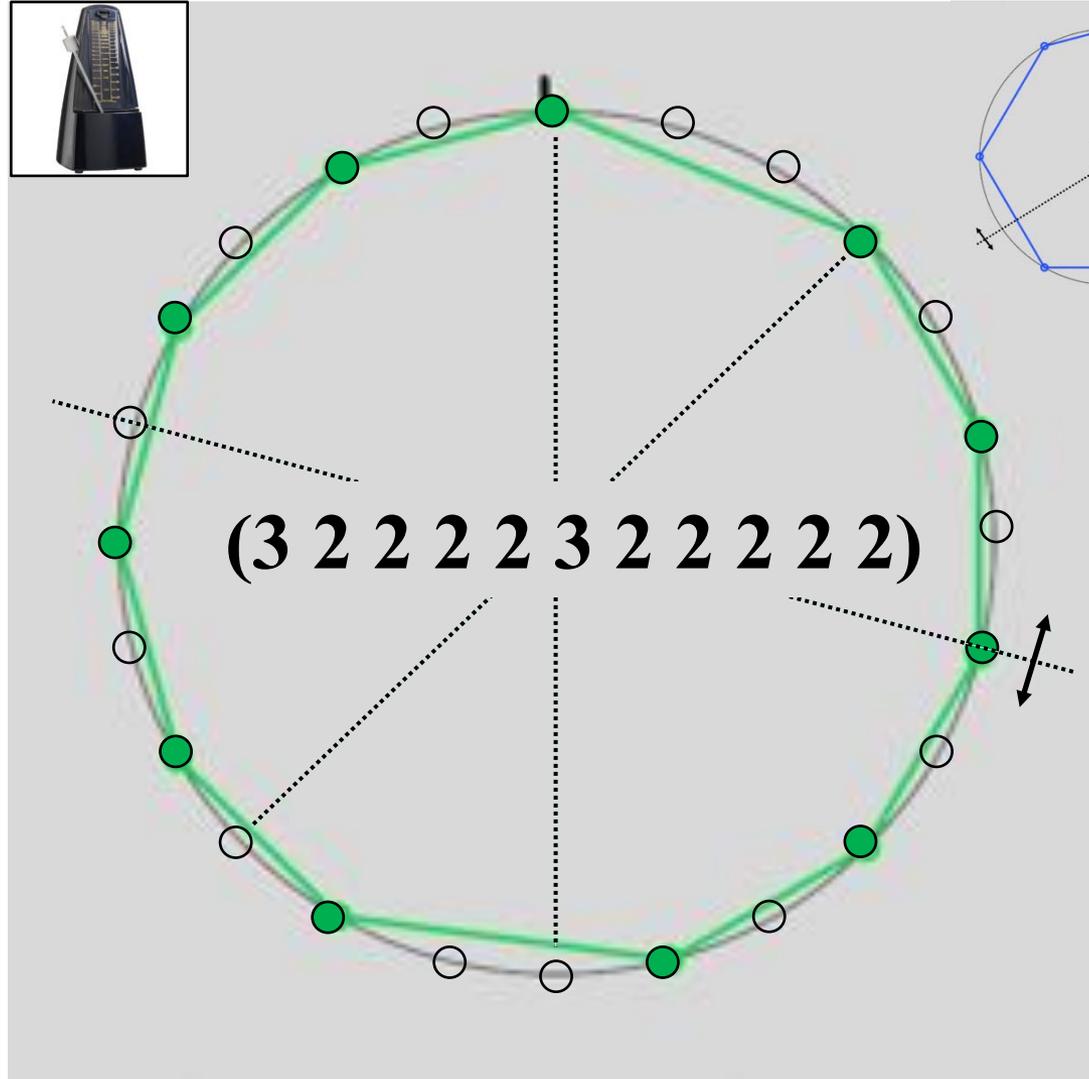


**musimédiane**

publiée avec le concours de la SFAM

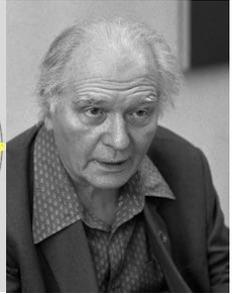
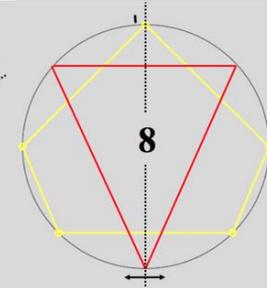
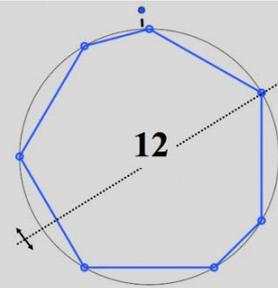
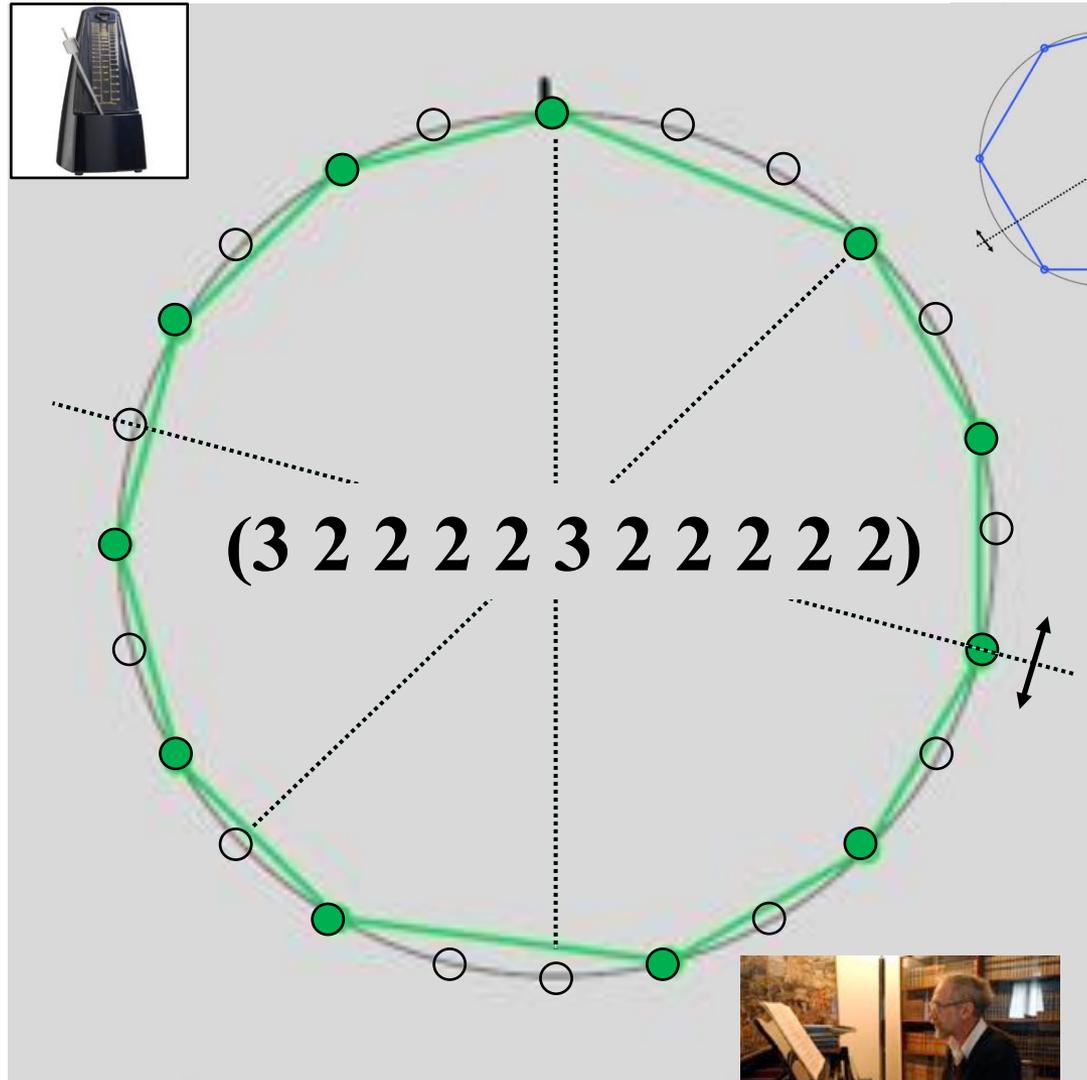
revue audiovisuelle et multimédia d'analyse musicale

# Olivier Messiaen et les rythmes palindromes

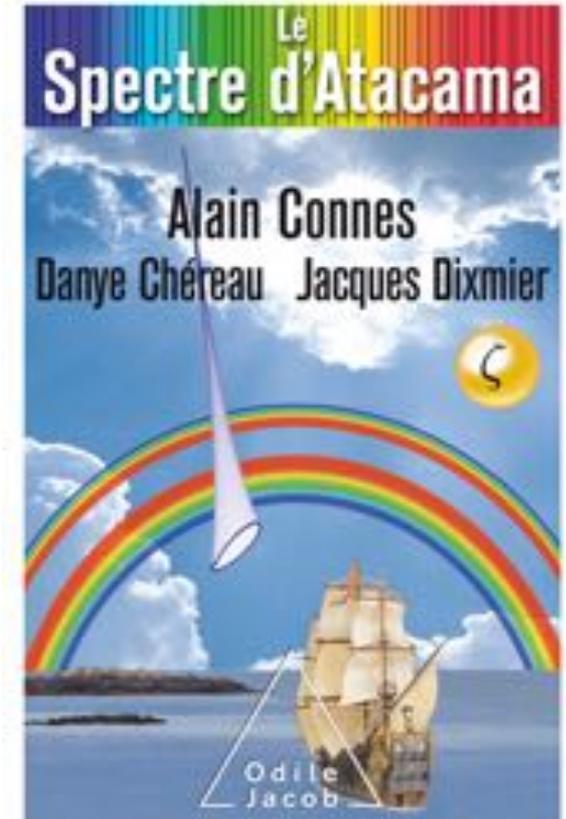


Olivier Messiaen

# Olivier Messiaen et les rythmes palindromes



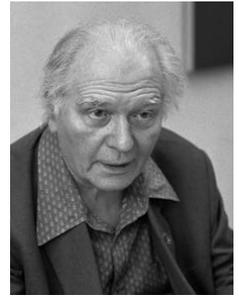
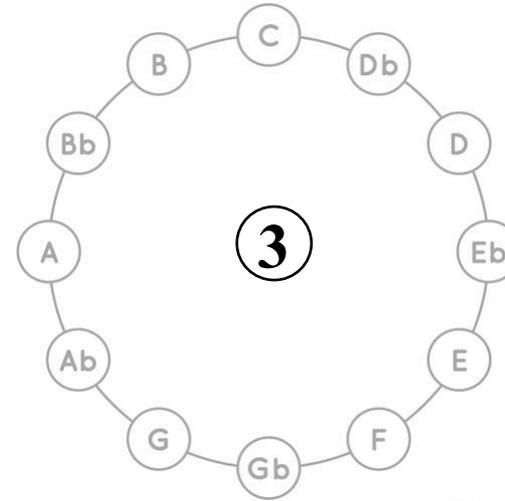
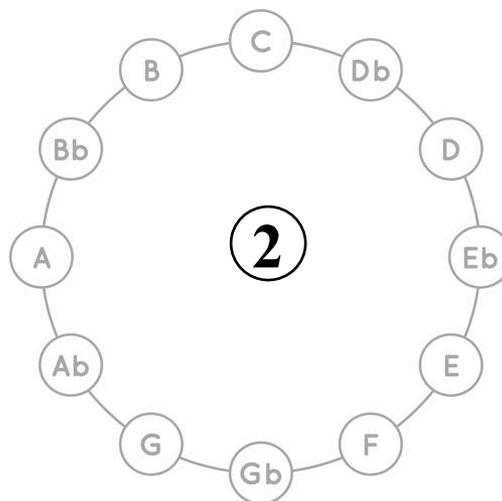
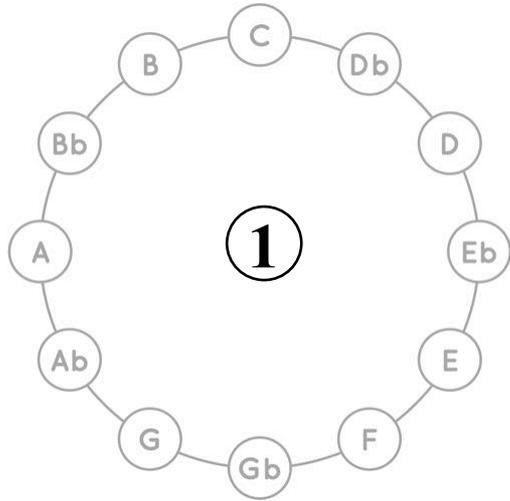
Olivier Messiaen



Alain Connes

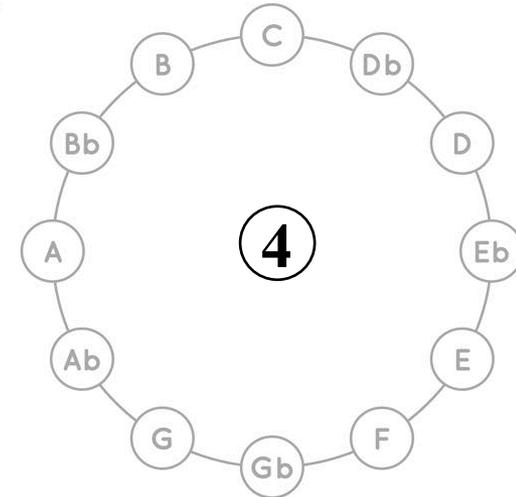
# Pour aller plus loin : calcul des modes de Messiaen

## Le mode octotonique (ou mode diminué)



Olivier Messiaen

Three staves of musical notation showing the octatonic mode. The first staff is labeled with a circled 1, the second with a circled 2, and the third with a circled 3. Each staff shows a sequence of notes: C, Db, D, Eb, E, F, Gb, G, Ab, A, Bb, B.

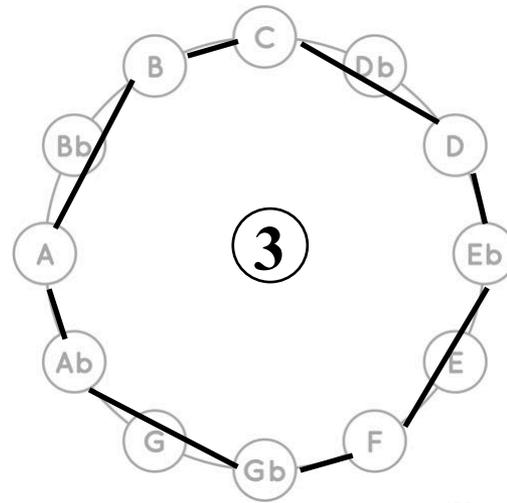
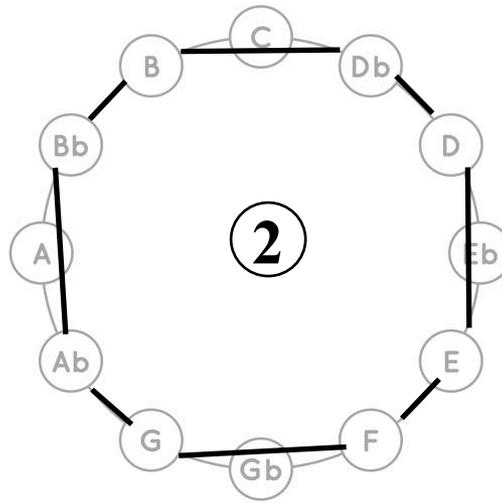
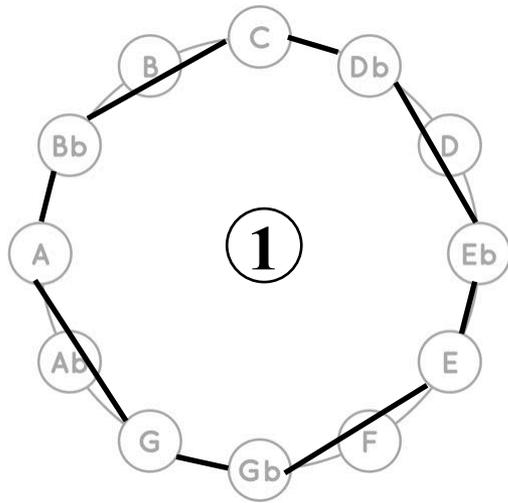


④ ...

- Formalisation mathématique du problème
- Astuces pour un calcul explicite des solutions

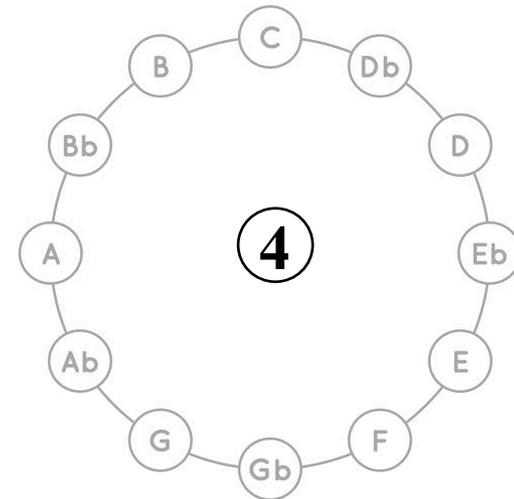
# Pour aller plus loin : calcul des modes de Messiaen

## Le mode octotonique (ou mode diminué)



Olivier Messiaen

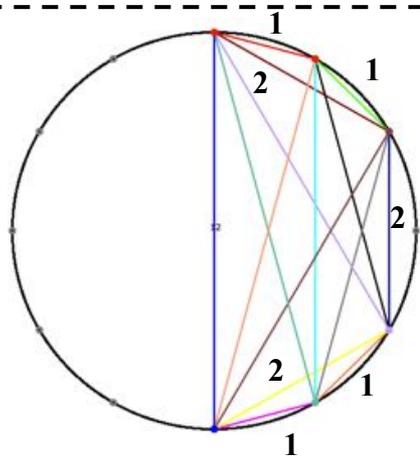
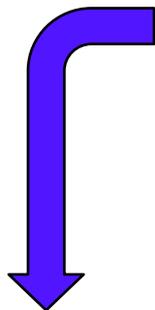
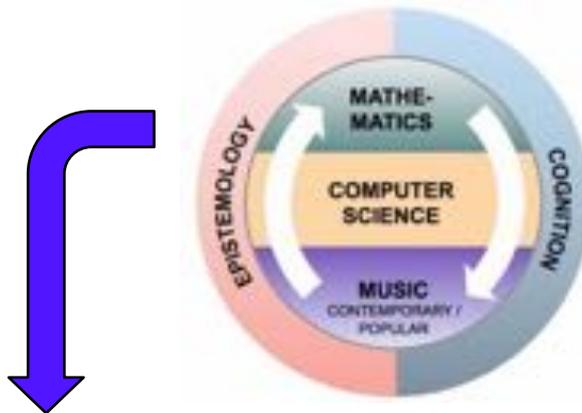
Three staves of musical notation in treble clef, each starting with a circled number 1, 2, or 3. The notes are: 1) C, Bb, A, Gb, F, Eb, D, C; 2) C, B, D, Eb, A, Gb, F, C; 3) C, Bb, A, G, F, Eb, D, C.



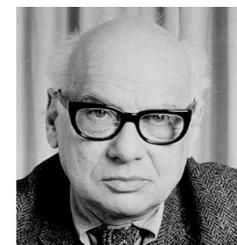
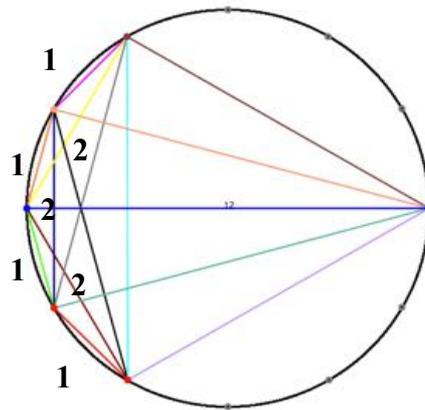
④ ?

- Formalisation mathématique du problème
- Astuces pour un calcul explicite des solutions

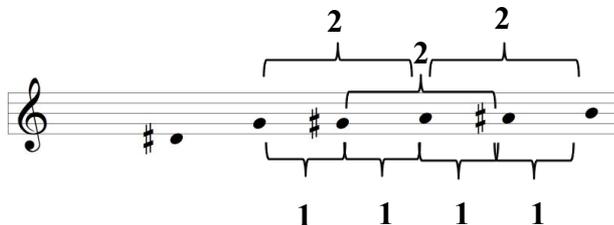
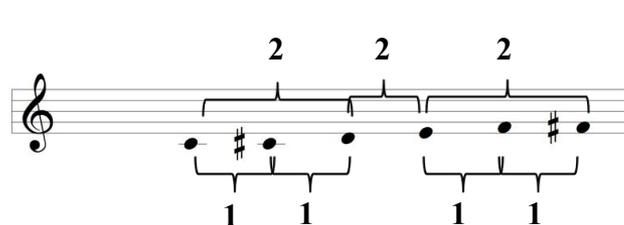
# Pour aller plus loin : un théorème d'algèbre musicale



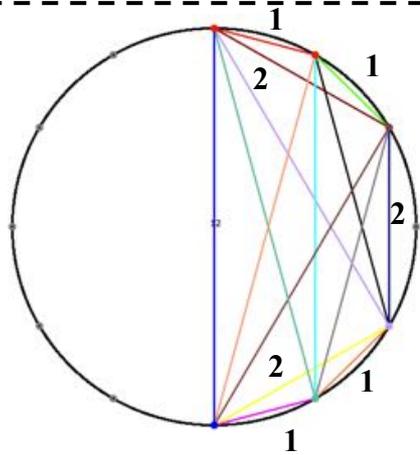
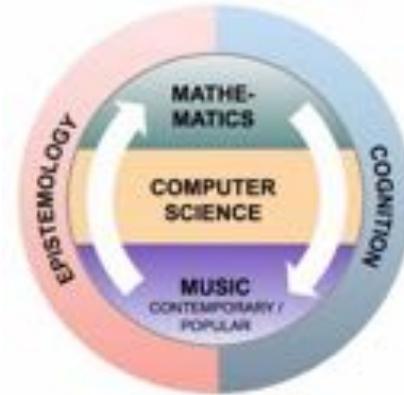
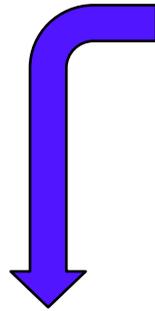
$\approx$   
Théorème de l'hexacorde



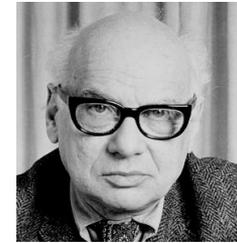
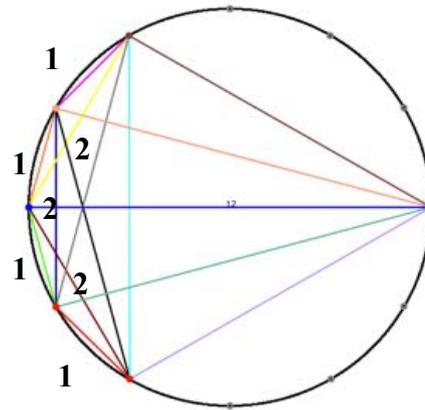
M. Babbitt



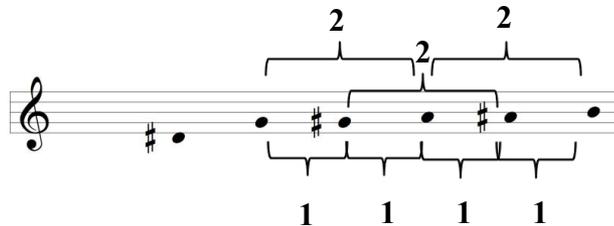
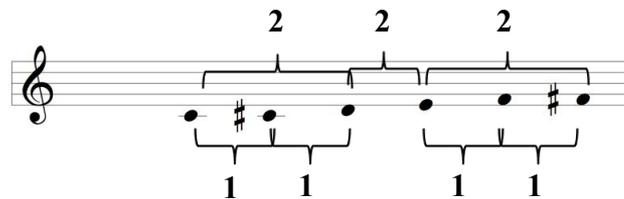
# Pour aller plus loin : un théorème d'algèbre musicale



**HOMOMETRIE**  
←→  
**Théorème de l'hexacorde**



**M. Babbitt**



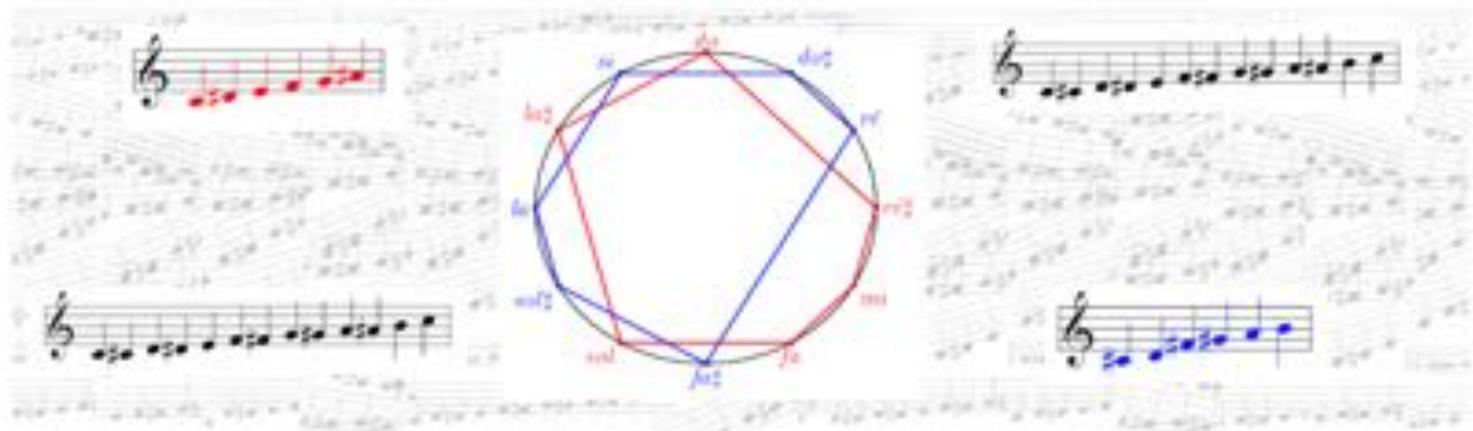
Images et visualisation

[Retour à la rubrique](#)

# MATHÉMUSIQUE : INTRODUCTION AU THÉORÈME DE L'HEXACORDE

Pierre boule

Le 29 octobre 2019 - Écrit par Corentin Bayette



Le *théorème de l'hexacorde* est un théorème issu d'un problème musical et qui peut se démontrer de multiples façons. Nous proposons dans cet article une description de sa découverte et d'une approche mathématique de la musique permettant de comprendre l'une de ses démonstrations parmi les plus récentes et intuitives. Après un bref rappel historique, nous proposons de définir formellement les notes et les intervalles musicaux pour ensuite pouvoir énoncer et démontrer le théorème de l'hexacorde. Quelques notions mathématiques plus avancées sont également données dans les dépliants et en fin d'article pour ceux qui souhaitent aller un peu plus loin.

# Le projet SMIR : les maths dans la musique, la musique des maths

Approches  
« audio »

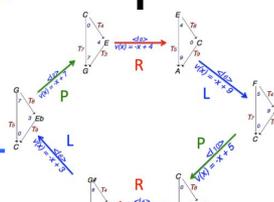
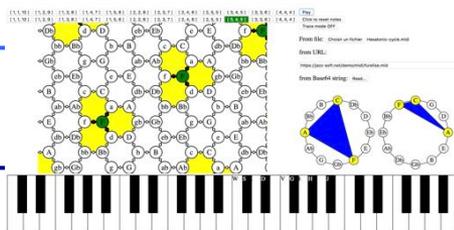
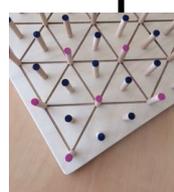
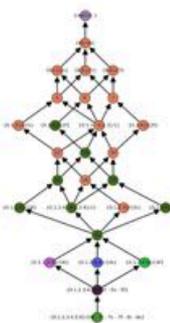
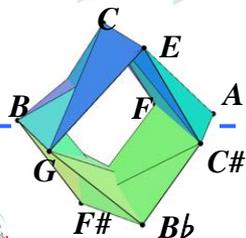
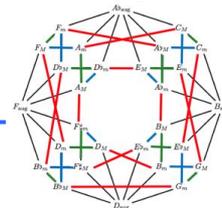
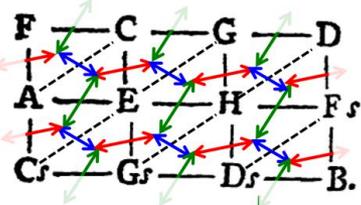
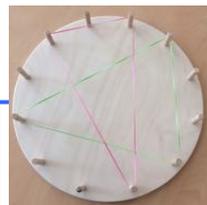
Modèles  
algébriques



?

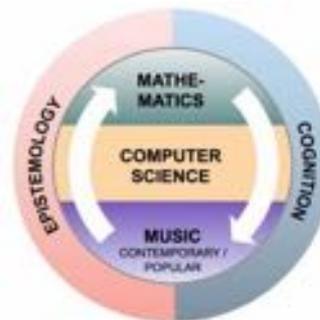
Modèles  
topologiques

Modèles  
catégoriels



Modèles  
computationnels

Modèles cognitifs

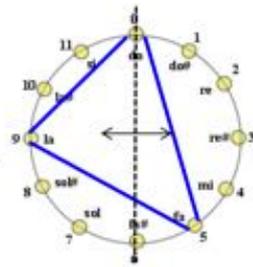


Approches « symboliques »

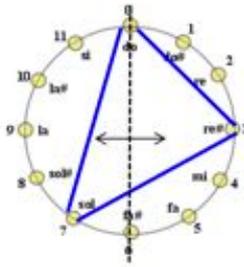
# L'harmonie négative ou la dualité majeur/mineur



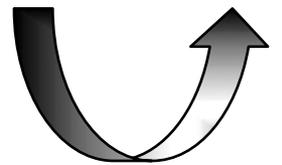
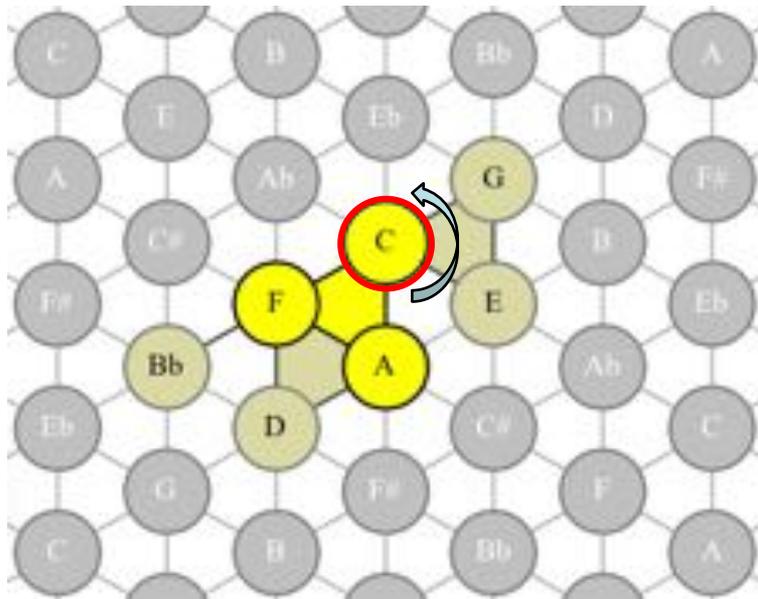
Accord  
majeur



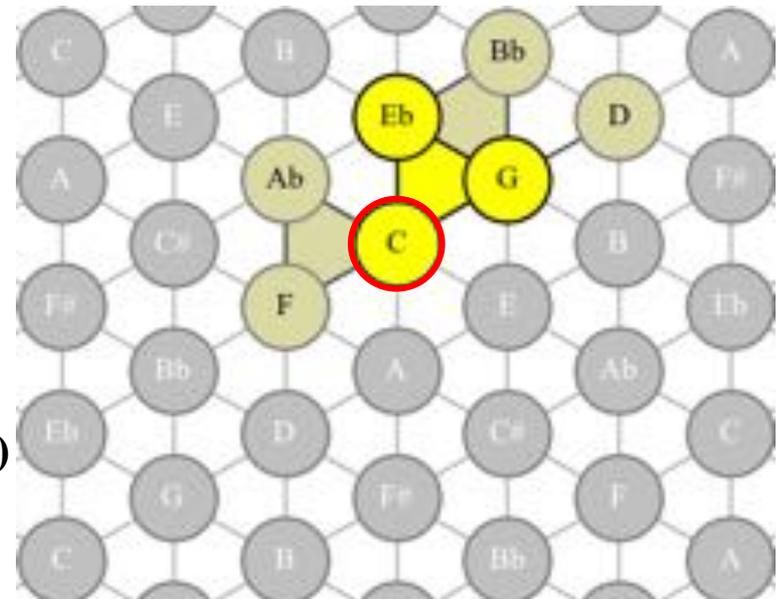
inversion



Accord  
majeur

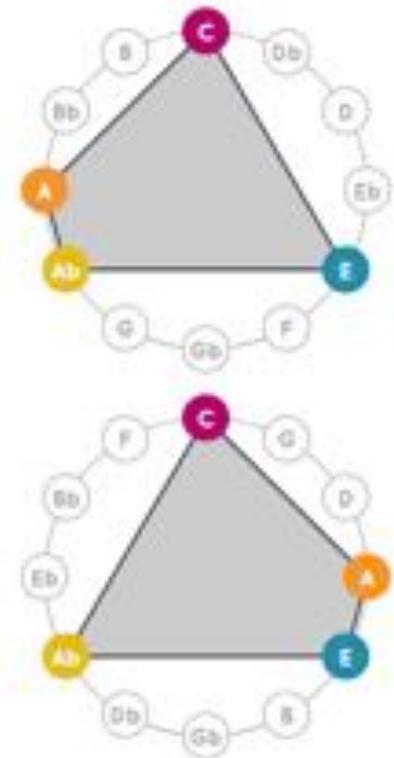
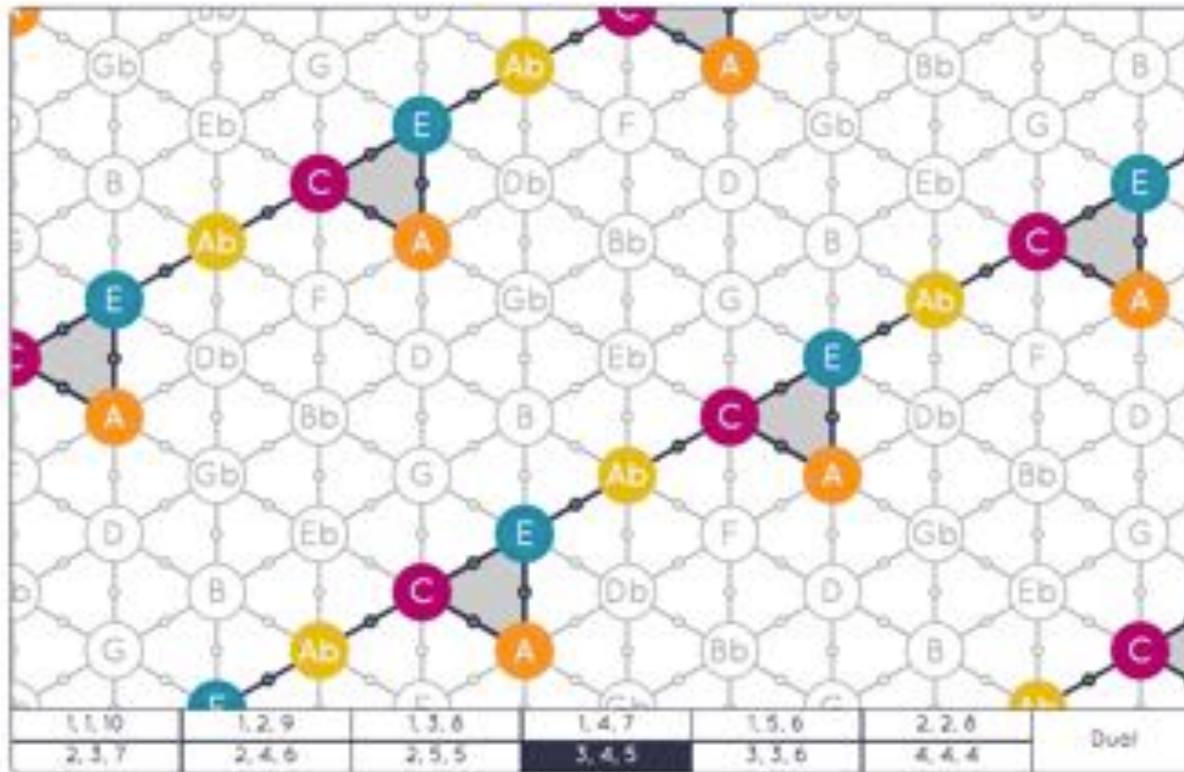


Rotation  
(autour du do)



# THE TONNETZ

ONE KEY - MANY REPRESENTATIONS



➔ <https://guichaoua.gitlab.io/web-hexachord/>

