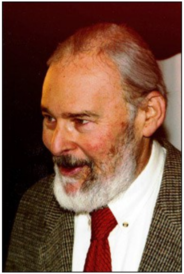
Approche Catégorielle en Analyse Musicale

Andrée Ehresmann - Alexandre Popoff

23-02-2018

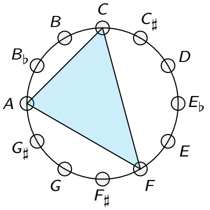
Allen Forte
Musical Set Theory



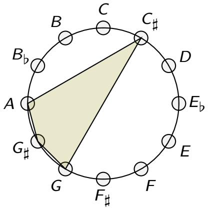
David Lewin
Analyse transformationnelle

Musical Set Theory

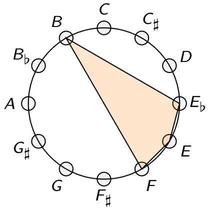
Forte set-class 3-11(B)
Prime form [0,4,7]

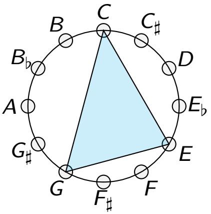


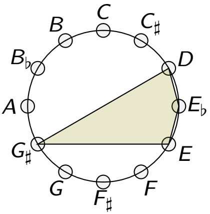
Forte set-class 4-5(A)
Prime form [0,1,2,6]

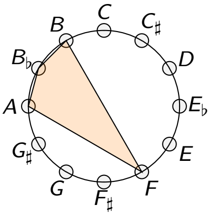


Forte set-class 4-5(B)
Prime form [0,4,5,6]









Lewin : notion de GIS

Définition

Un Generalized Interval System (GIS) est un triplet $(S, \mathrm{IVLS}, \mathrm{int})$ avec

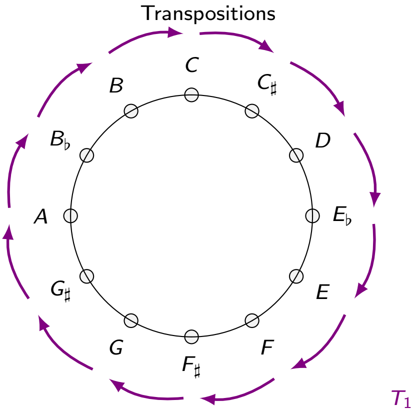
- S, l'espace du GIS, est un ensemble d'éléments,
- IVLS, est un groupe (le groupe des intervalles du GIS), et
- int est une fonction $\mathrm{int}\colon S \times S \to \mathrm{IVLS}$

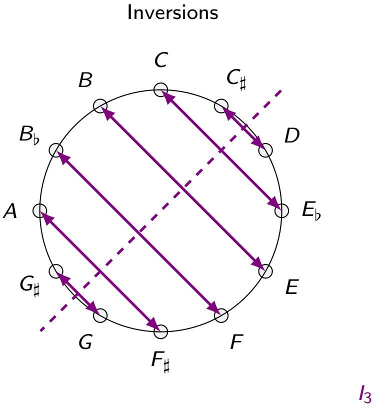
tel que

- pour tout $r, s, t \in S, \mathrm{int}(r, s) \circ \mathrm{int}(s, t) = \mathrm{int}(r, t)$, et
- pour tout $s \in S, i \in \mathrm{IVLS}$, il existe un unique $t \in S$ tel que $\mathrm{int}(s, t) = i$.

Kolman (2004) montre que cette définition est équivalente à la donnée d'un groupe et d'une action simplement transitive sur S.
Ceci est également équivalent à la donnée d'un groupe comme catégorie et d'un foncteur (représentable) vers **Sets**.

Le groupe T/I et son action sur les classes de hauteurs

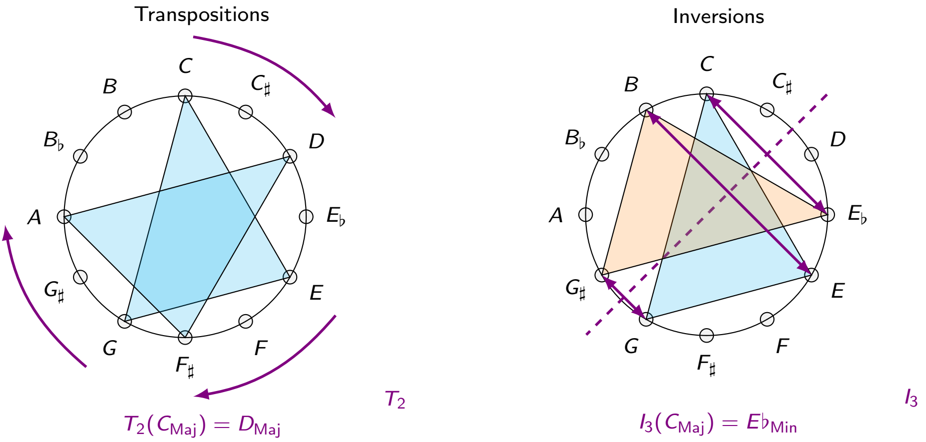




Le groupe T/I est isomorphe au groupe dihédral D_{24}.
Les isomorphismes du groupe T/I sont de la forme $\langle k, p\rangle$ avec

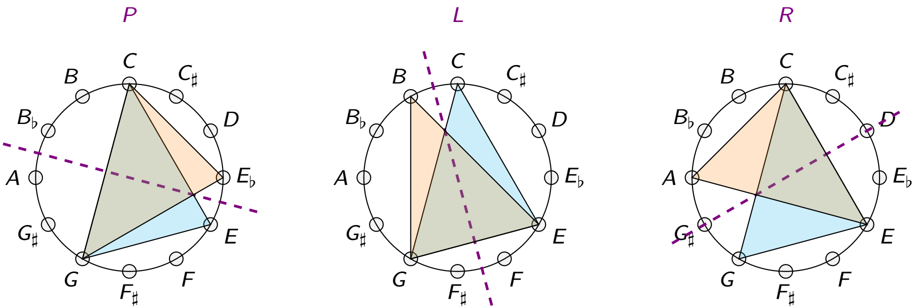
- $\langle k, p\rangle(T_n) = T_{kn}$
- $\langle k, p\rangle(I_n) = I_{kn+p}$
- $k \in \{1, 5, 7, 11\}, p \in \{0, \ldots, 11\}$

Le groupe T/I et son action sur l'ensemble des 24 accords majeurs/mineurs



L'action du groupe T/I sur l'ensemble des 24 accords majeurs/mineurs est simplement transitive.

Le groupe *PLR* et son action sur l'ensemble des 24 accords majeurs/mineurs

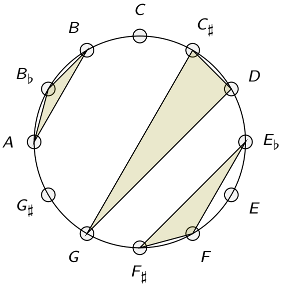


L'action du groupe *PLR* sur l'ensemble des 24 accords majeurs/mineurs est simplement transitive.

Les actions du groupe *PLR* et du groupe T/I commutent. Les deux groupes sont *duaux au sens de Lewin*.

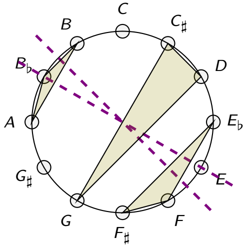
Réseaux de Klumpenhouwer

Les réseaux de Klumpenhouwer ont été introduits par Klumpenhouwer et Lewin au début des années 90. Ils permettent de comparer des ensembles de hauteurs, non-nécessairement reliés par des opérations de transposition ou d'inversion, en étudiant les relations entre leurs éléments.



Réseaux de Klumpenhouwer

Les réseaux de Klumpenhouwer (K-nets) ont été introduits par Klumpenhouwer et Lewin au début des années 90.
Ils permettent de comparer des ensembles de hauteurs, non-nécessairement reliés par des opérations de transposition ou d'inversion, en étudiant les relations entre leurs éléments.



Informellement, ce sont des graphes dirigés dont les sommets sont labellisés par des classes de hauteurs, et dont les arêtes sont labellisés par des transformations du groupe T/I.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dd, "T_1"'] \arrow[dr, "I_8"] & \\ & B \arrow[dl, "I_9"] \\ B\flat & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C\sharp \arrow[dd, "T_1"'] \arrow[dr, "I_8"] & \\ & G \arrow[dl, "I_9"] \\ D & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[dd, "T_1"'] \arrow[dr, "I_8"] & \\ & E\flat \arrow[dl, "I_9"] \\ F\sharp & \end{tikzcd}$$

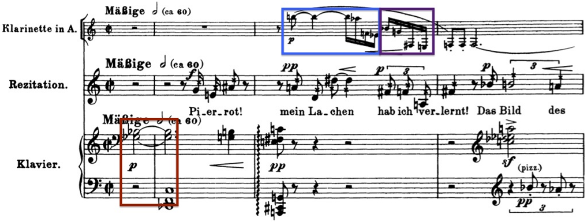
Les définitions des réseaux de Klumpenhouwer varient d'une publication à l'autre. Mazzola et Andreatta ont proposé une premiere formalisation catégorielle des K-nets (*'From a Categorical Point of View : K-Nets as Limit Denotators'*, Perspectives of New Music, 44/2, 2006).

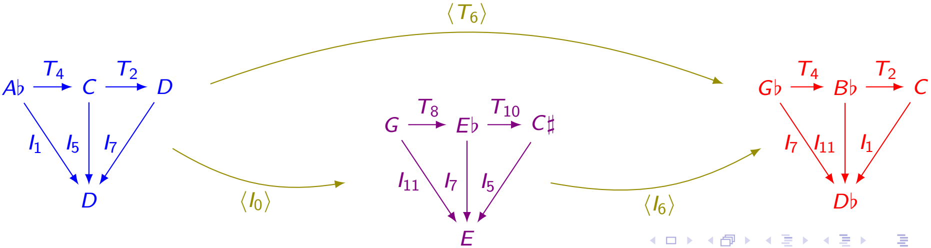
Réseaux de Klumpenhouwer : Isographies

La notion d'*isographie de K-nets* permet de comparer des réseaux entre eux, sur la base des automorphismes du groupe T/I.

- Un réseau est dit en *isographie positive* $\langle T_p \rangle$ avec un autre, si les transformations du premier sont les images du second par l'automorphisme $\langle 1, p \rangle$
- Un réseau est dit en *isographie négative* $\langle I_p \rangle$ avec un autre, si les transformations du premier sont les images du second par l'automorphisme $\langle 11, p \rangle$

9. Gebet an Pierrot.



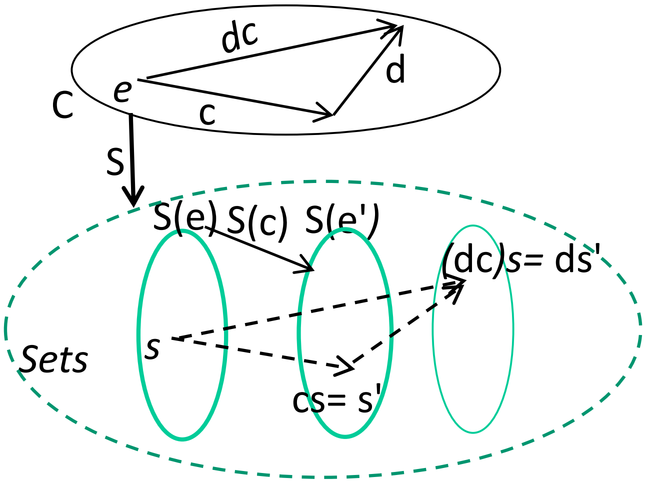


PARTIE 2

Présentation des notions catégoriques

Actions de catégories (C. Ehresmann 1957)

Une ***action*** *k:* C x M → M: (c, s) |→ cs d'un groupe C sur l'ensemble M, correspond au foncteurr S: C → *Sets* où S(e) = M, S(c): M → M: s |→ cs.



Une ***action de la catégorie*** C est de même définie par un foncteur S de C vers *Sets* tel que S(e) soit non vide pour tout objet e ϵ |C|.

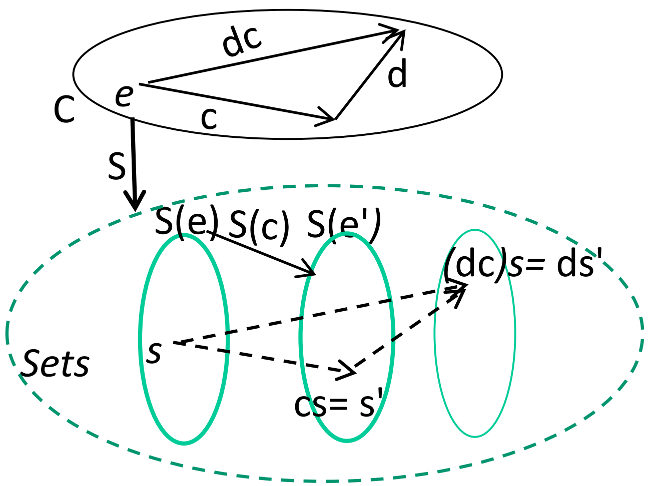
Si $M_S = \Sigma_e S(e)$, l'*action* de C sur M_S est *k:* $C{*}M_S \to M_S$:

(c, s) |→ cs = S(c)(s)

ssi c*:* e → e'   et s ϵ S*(e)*..

Actions de catégories (C. Ehresmann 1957)

Une ***action*** *k:* C x M → M: (c, s) |→ cs d'un groupe C sur l'ensemble M, correspond au foncteurr S: C → *Sets* où S(*e*) = M, S(c): M → M: s |→ cs.



Une ***action de la catégorie*** C est de même définie par un foncteur S de C vers *Sets* tel que S(e) soit non vide pour tout objet e є |C|.
Si $M_S = \Sigma_e S(e)$, l'*action* de C sur M_S est *k:* $C{*}M_S \to M_S$:

(c, s) |→ cs = S(c)(s)

ssi c*:* e → e' et *, s* є S(*e*)*.*

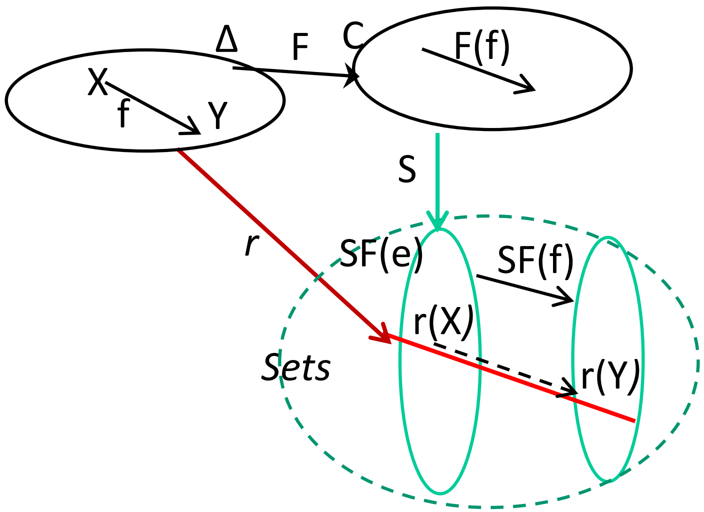
Un foncteur S: C → *Sets est **représentable*** s'il est isomorphe à un foncteur de la fotme Hom(e, -) pour un objet e de C.

Proposition. ***Si*** C *est un groupoïde transitif, un foncteur* S: C → *Sets est repré-sentable ssi l' action de C sur* M_S *est simplement transitive*.

=> Notion d'un ***Generalized Interval Groupoid System*** (Lewin, Mandereau)..

Des K-Nets aux PK-Nets

(i) ***Lewin K-net***: C'est la donnée d'un groupe C opérant sue un ensemble M via un foncteur S: C → *Sets*), d'un foncteur F : Δ → C et d'une application *r:* |Δ|→ M vérifiant, *r*(Y) = *S*F*(f)*(*r*(X)). pour tout *f*: X→ Y *de* Δ

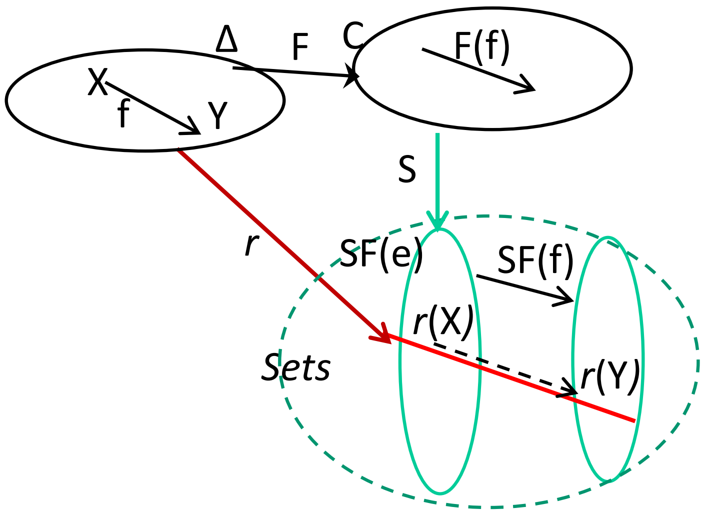


(ii) ***Mazzola-Andreatta généralisation*** (2006). Soit C une catégorie opérant via le foncteur S: C → *Sets* and F: Δ → C un foncteur.

Un K-*net pour* (S, F) est un élément (r_X) de la limite projective du foncteur SF: Δ → *Sets.*

Des K-Nets aux PK-Nets

(i) ***Lewin K-net***: C'est la donnée d'un groupe C opérant sue un ensemble M via un foncteur S: C → *Sets*), d'un foncteur F : Δ → C et d'une application *r:* |Δ|→ M vérifiant, *r*(Y) = *SF(f)(r*(X)). pour tout *f*: X→ Y *de* Δ



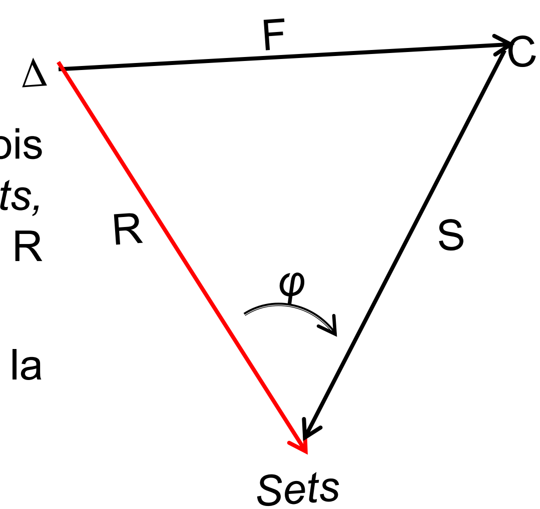
(ii) ***Mazzola-Andreatta généralisation*** (2006). Soit C une catégorie opérant via le foncteur S: C → *Sets* and F: Δ → C un foncteur.

Un K-*net pour* (S, F) est un élément (r_X) de la limite projective du foncteur SF: Δ → *Sets.*

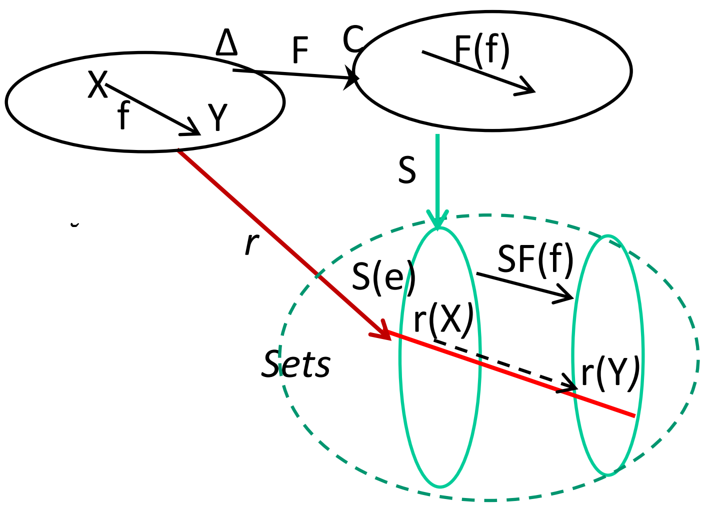
(iii) ***Poly-Klupenhauwer-net*** (A. Popoff, 2015)

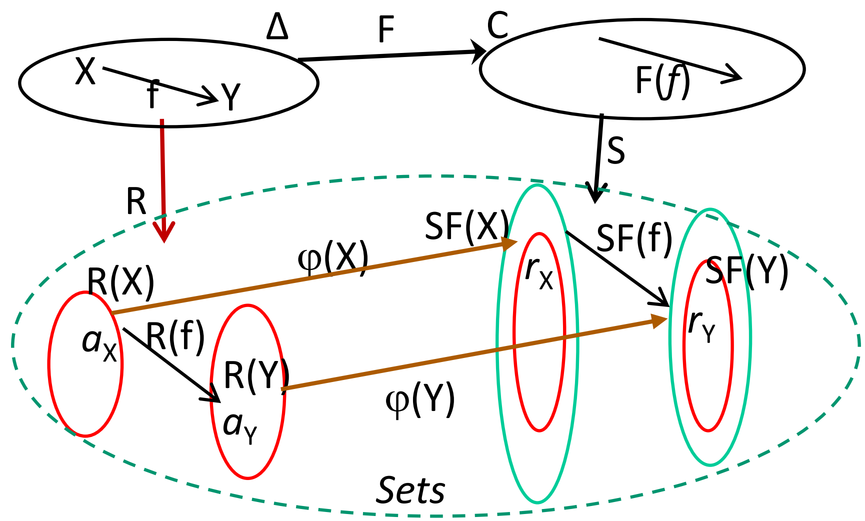
Définition. Un ***PK-net* K** = (R, S, F, φ) est formé de trois foncteurs : R: Δ → *Sets* à valeurs non vides, S: C → *Sets,* F: Δ → C et d'une transformation natu-relle φ: R → SF. R est sa *forme,* S son *support.*

=> K s'identifie au morphisme (F, φ): R → S de la catégorie Diag(*Sets*) des diagrammes de *Sets.*



Des PK-Nets aux K-Nets





Proposition. *Soit* (R, S, F, φ) *un PK-net ; l'application* lim φ: *lim* R $\rightarrow$ *lim* S *transforme chaque K-net pour* R: $\Delta \rightarrow$ *Sets en un K-net pour* (S, F).

Proof. Un élément de lim R est une famille $(a_X)_{iX\epsilon|\Delta|}$ telle que:

$$a_X \,\epsilon\, R(X) \quad \text{et} \quad a_Y = R(f)(a_X) \quad \text{pour tout} \quad f\colon X \rightarrow Y \text{ de } \Delta\,;$$

Son image par lim φ est le K-net $(r_X)_{X\,\epsilon|\Delta|}$ pour (S, F), où $r_X = \varphi(X)(a_X) \,\epsilon\, SF(X)$.

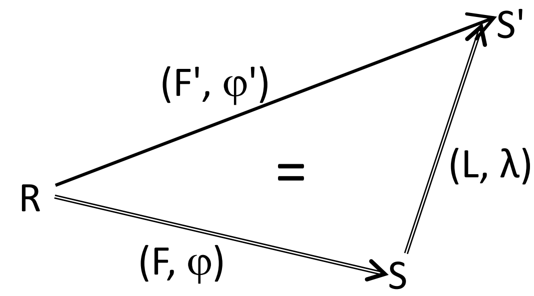
=> Un PK-net représente l'ensemble des K-nets associés à SF et une manière de les nommer (via lim φ) par les K-nets pour R.

Corollary. *Un PK-net 'se réduit' à un K-net ssi sa forme* R *prend ses valeurs dans les singletons.*

La catégorie $\mathbf{PKN_R}$ des PK-Nets de forme R à valeurs dans H

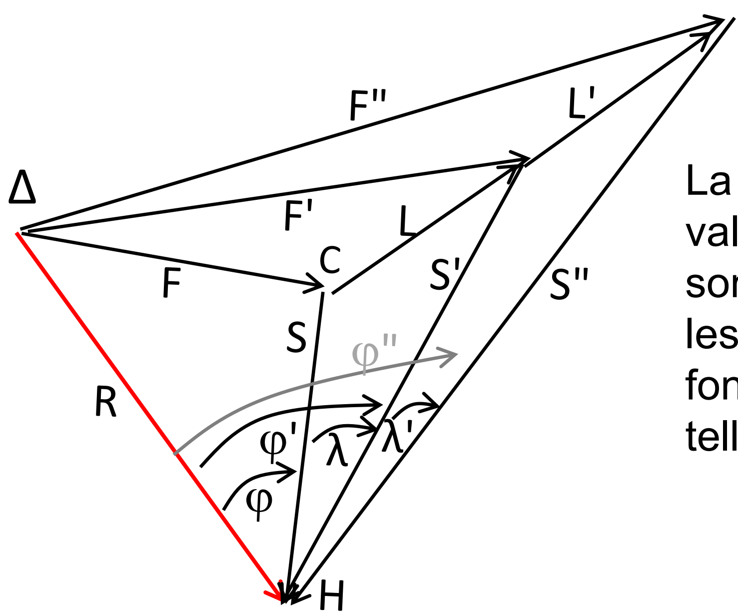
Soit H une catégorie. la **catégorie** Diag(H) **des diagrammes dans** H a pour objets les foncteurs vers H, pour morphismes de R: $\Delta \to$ H vers S: C $\to$ H les couples (F, φ), où F: $\Delta \to$ C est un foncteur, et où φ: R -> SF une trans-formation naturelle. Le composé de (F, φ): R $\to$ S et (L, λ): S $\to$ S', est

(F', φ') = (LF, λF ¤ φ.): R $\to$ S'.



Définition. Un **PK-net K** = (R, S, F, φ) **à valeurs dans** H est un morphisme (F, φ): R $\to$ S de Diag(H) ; R est sa ***forme***, S son ***support***. Le PK-net 'est' un **K-net** si R est un foncteur constant sur un objet final de H

Exemples. H = *Sets, Cat, Poset, Rel*



La ***categorie*** $\mathbf{PKN_R}$ ***des PK-nets de forme*** R à valeurs dans H est la catégorie R/Diag(H) : ses objets sont les PK-nets de forme R et les morphismes sont les couples (L, λ): **K → K'** où L: C $\to$ C' est un foncteur et λ: S -> S'L une transformation naturelle telle que

F' = LF et φ' = λF ¤ φ.

PK-Homogaphies et PK-isographies entre PK-Nets de forme R

Définition. Soit **K =** (R, S, F, φ) et **K' =** (R, S', F', φ') des PK-nets. Une ***PK-homographie*** (N, v): **K** → **K'** est formée d'un foncteur N: C → C' et d'une transformation naturelle v de SF vers S'F' tels que : F' = NF et φ'= v ¤ φ. C'est une ***PK-isographie*** si N est un isomorphisme et v une équivalence.

$$\begin{tikzcd} & C' \\ \Delta \arrow[ur, "F'"] \arrow[dr, Rightarrow, "F"'] \arrow[r, phantom, "="] & \\ & C \arrow[uu, Rightarrow, "N"'] \end{tikzcd}$$

H^{Δ}

$$\begin{tikzcd} & S'F' \\ R \arrow[ur, "\varphi'"] \arrow[dr, Rightarrow, "\varphi"'] \arrow[r, phantom, "="] & \\ & SF \arrow[uu, Rightarrow, "\nu"'] \end{tikzcd}$$

Les PK-homographies sont les morphismes d'une *catégorie* $\mathbf{HoPKN_R}$ *ayant l*es PK-nets de forme R pour objets et où le composé de

(N, v): **K** → **K'** et (N', v'): **K'** → **K"** est :(N', v') (N, v) = (N'N, v'¤ v): **K** → **K"**.

PK-Homogaphies et PK-isographies entre PK-Nets de forme R

Définition. Soit **K =** (R, S, F, φ) et **K' =** (R, S', F', φ') des PK-nets. Une ***PK-homographie*** (N, v): **K** → **K'** est formée d'un foncteur N: C → C' et d'une transformation naturelle v de SF vers S'F' tels que : F' = NF   et φ'= v ¤ φ. C'est une ***PK-isographie*** si N est un isomorphisme et v une équivalence.

$$\begin{tikzcd} & & C' \\ \Delta \arrow[urr, "F'"] \arrow[drr, Rightarrow, "F"'] & \arrow[r, phantom, "="] & \\ & & C \arrow[uu, Rightarrow, "N"'] \end{tikzcd}
\qquad
\boxed{\begin{array}{l} H^{\Delta} \\ \begin{tikzcd} & & S'F' \\ R \arrow[urr, "\varphi'"] \arrow[drr, Rightarrow, "\varphi"'] & \arrow[r, phantom, "="] & \\ & & SF \arrow[uu, Rightarrow, "v"'] \end{tikzcd} \end{array}}$$

Les PK-homographies sont les morphismes d'une *catégorie* $\mathbf{HoPKN_R}$ *ayant l*es PK-nets de forme R pour objets et où le composé de

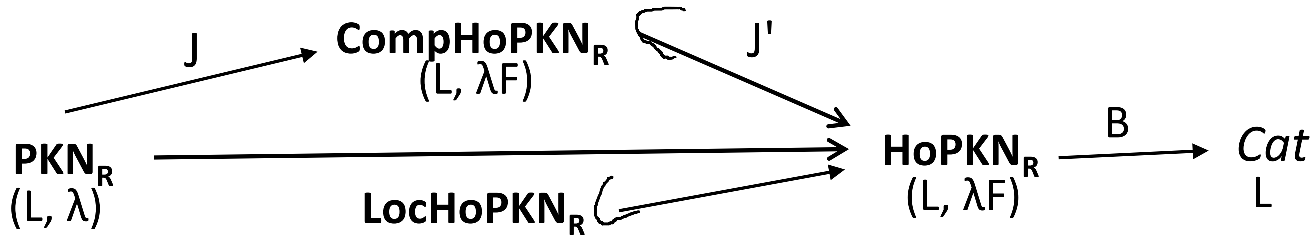
(N, v): **K** → **K'** et (N', v'): **K'** → **K''**   est :(N', v') (N, v) = (N'N, v'¤ v): **K** → **K''**.

Une PK-homographie (resp. PK-isographie) (N, v): **K** → **K'** est :

- ***complète*** s'il existe λ: S → S' tel que v = λF ; si |F| est surjectif, λ est unique;
- ***locale*** si S = S' et si v = Sv^.pour au moins un v^: F → F'.

Les PK-homographies complètes (resp. locales) forment une sous-catégorie $\mathbf{CompHoPKN_R}$ (resp. $\mathbf{LocHoPK_R}$) de $\mathbf{HoPKN_R}$.

Catégories de PK-Nets et PK-Homogaphies



Proposition. *Il existe un foncteur surjectif* J: $\mathbf{PKN_R} \rightarrow \mathbf{CompHoPKN_R}$ *associent à* (L, λ): **K → K'** *la PK-homographie complète* (L, λF): **K → K'.** *Sa restriction aux sous-catégories pleines ayant pour objets les PK-nets où* |F| *est surjectif est un isomorphisme.*

THEOREME. *On suppose* H *complète et cocomplète.*

(i) *Les catégories* $\mathbf{PKN_R}$ *et* $\mathbf{CompHoPKN_R}$ *ont des limites et des colimites connexes préservées par le foncteur* J *et l'insertion* J'.

(ii) $\mathbf{HoPKN_R}$ *a des produits, et il existe une limite (resp. colimite) pour tout foncteur* P: V → $\mathbf{HoPKN_R}$ tel que P(*v*) = (R, S_v, F_v, φ_v) soit un PK-net avec $|F_v|$ surjectif pour tout v ϵ |V| *(resp. et que V soit connexe).*

Catégories de PK-Nets et PK-Homogaphies

$$\begin{tikzcd}
 & \underset{(L,\,\lambda F)}{\mathbf{CompHoPKN}_R} \arrow[dr, hook, "J'"] & & \\
\underset{(L,\,\lambda)}{\mathbf{PKN}_R} \arrow[ur, "J"] \arrow[rr] & & \underset{(L,\,\lambda F)}{\mathbf{HoPKN}_R} \arrow[r, "B"] & \underset{L}{\mathit{Cat}} \\
 & \mathbf{LocHoPKN}_R \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Proposition. *Il existe un foncteur surjectif* J: $\mathbf{PKN_R} \to \mathbf{CompHoPKN_R}$ *associent à* (L, λ): **K → K'** *la PK-homographie complète* (L, λF): **K → K'.** *Sa restriction aux sous-catégories pleines ayant pour objets les PK-nets où* |F| *est surjectif est un isomorphisme.*

THEOREME. *On suppose* H *complète et cocomplète.*

(i) *Les catégories* $\mathbf{PKN_R}$ *et* $\mathbf{CompHoPKN_R}$ *ont des limites et des colimites connexes préservées par le foncteur* J *et l'insertion* J'.

(ii) $\mathbf{HoPKN_R}$ *a des produits, et il existe une limite (resp. colimite) pour tout foncteur* P: V → $\mathbf{HoPKN_R}$ tel que P(v) = (R, S_v, F_v, φ_v) soit un PK-net avec $|F_v|$ surjectif pour tout v є |V| *(resp. et que V soit connexe).*

PK-nets d'ordre supérieur

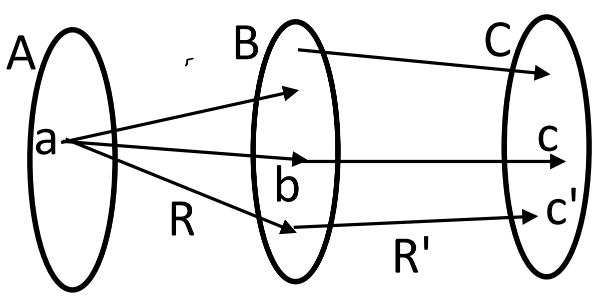
On définit des ***PK²-nets*** à valeurs dans H comme étant des PK-nets à valeurs dans la catégorie Diag(H). et des ***PK²-nets de forme*** R comme étant des PK-nets dans $\mathbf{HoPKN_R}$**.** *Cette construction s'itère, d'où* ***formation d'une hiérarchie de PK-nets d'ordre croissant et hyper-homographies entre eux.***

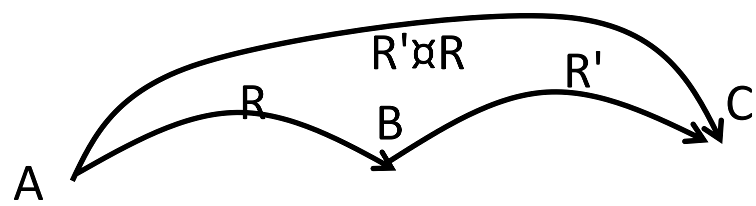
La 2-catégorie **Rel** des relations binaires entre ensembles

A et B étantdes ensembles, une relation de A vers B est identifiée à une partie du produit AxB. La relation $R: A \to B$ est *totale à gauche* si pour tout $a \in A$ il existe au moins un $b \in B$ avec $(a, b) \in R$.

La catégorie *Rel* des relations a pour objets les petits ensembles, pour morphismes les relations. Le composé R'¤R où $R': B \to C$, est défini par R'¤R = { (a, c) ϵ AxC | il existe b ϵ B [(a, b) ϵ R, (b, c) ϵ R'}.

Rel est isomorphe à son opposée. Une famille d'ensembles y admet pour produit (ou somme) leur réunion disjointe. *Sets* s'identifie à une sous-catégorie contienant tous les isomorphismes.



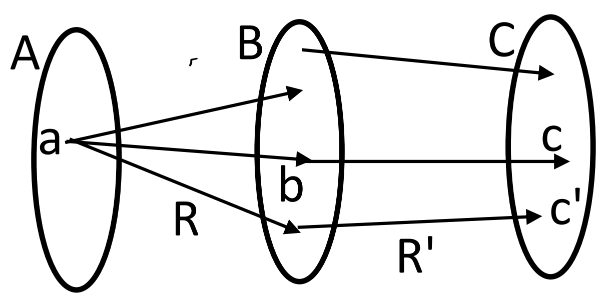


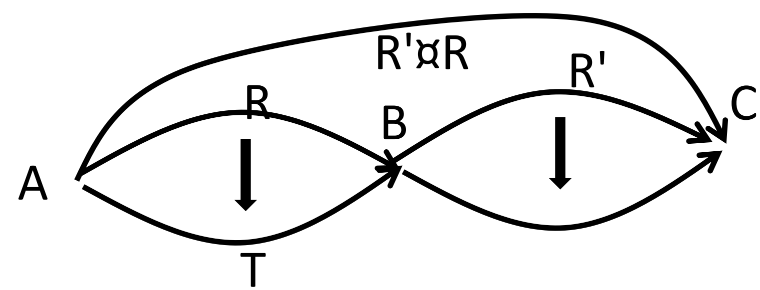
La 2-catégorie **Rel** des relations binaires entre ensembles

A et B étantdes ensembles, une relation de A vers B est identifiée à une partie du produit AxB. La relation $R: A \to B$ est *totale à gauche* si pour tout $a \in A$ il existe au moins un $b \in B$ avec $(a, b) \in R$.

La catégorie *Rel* des relations a pour objets les petits ensembles, pour morphismes les relations. Le composé R'¤R où $R': B \to C$, est défini par R'¤R = { $(a, c) \in AxC$ | il existe $b \in B$ [$(a, b) \in R$, $(b, c) \in R'$}.

Rel est isomorphe à son opposée. Une famille d'ensembles y admet pour produit (ou somme) leur réunion disjointe. *Sets* s'identifie à une sous-catégorie contienant tous les isomorphismes.



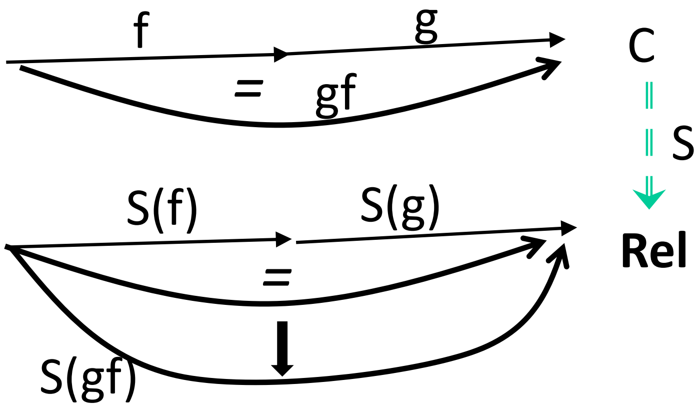


Rel est la catégorie des 1-morphismes d'une 2-catégorie **Rel** ayant pour catégorie **Rel**(A, B) la catégorie associée à l'ordre sur les parties de AxB: Il y a un 2-morphisme de R vers T ssi R est contenu dans T, et il est alors unique.

PK-Nets relationnels

Un ***lax-foncteur*** S: C -> **Rel** d'une (1-) catégorie C vers la 2-catégorie **Rel** est une application de C vers *Rel* qui préserve les objets et vérifie :

S(g) ¤ S(f) est contenu dans S(gf).



Une ***lax-transformation naturelle*** φ: S -> S' entre lax foncteurs S et S' de C vers **Rel** est une application φ: |C| → *Rel* telle que φ(e): S(e) → S'(e) vérifie :

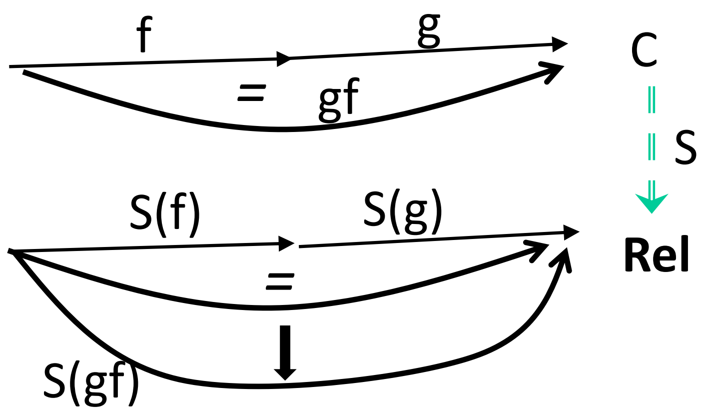
pour tout c: e → e', de C, φ(e')S(c) est contenu dans S'(c)φ(e).

Elle est ***totale à gauche*** si les relations φ(e) le sont.

PK-Nets relationnels

Un ***lax-foncteur*** S: C -> **Rel** d'une (1-) catégorie C vers la 2-catégorie **Rel** est une application de C vers *Rel* qui préserve les objets et vérifie :

S(g) ¤ S(f) est contenu dans S(gf).



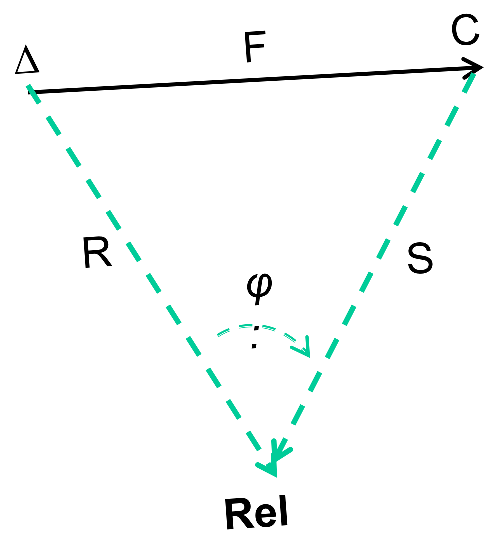
Une ***lax-transformation naturelle*** φ: S -> S' entre lax foncteurs S et S' de C vers **Rel** est une application φ: |C| → *Rel* telle que φ(e): S(e) → S'(e) vérifie :

pour tout c: e → e', de C, φ(e')S(c) est contenu dans S'(c)φ(e).

Elle est ***totale à gauche*** si les relations φ(e) le sont.

Définition. Soit S: C -> **Rel** et R: Δ -> **Rel** des lax foncteurs, R étant à veleurs non vides. Un ***PK-net retationnel*** *de* forme R et support S est une donnée :

(R; S; F; φ), où F: Δ → C est un foncteur et φ une lax transformation naturelle totale à gauche de R vers SF.



Les PK-nets relationnels de forme R sont les objets d'une catégorie **RelPKNet**$_{\mathbf{R}}$ ayant pour morphismes les Rel-PK-***homographies*** (N, v) avec v: SF -> S'F une lax transformation naturelle totale à gauche.

Groupe des bisections d'un groupoïde

Soit C un groupoïde transitif, s et t: C $\rightarrow$ |C| les applications source et but ('target'). On note eCe le sous-groupe des endomorphismes de C en e. Ces groupes sont tous isomorphes à un même groupe G.

Definition (C. Ehresmann 1959, Mackenzie 1987). On appellee ***bisection de*** C une application g: |C| $\rightarrow$C telle que :

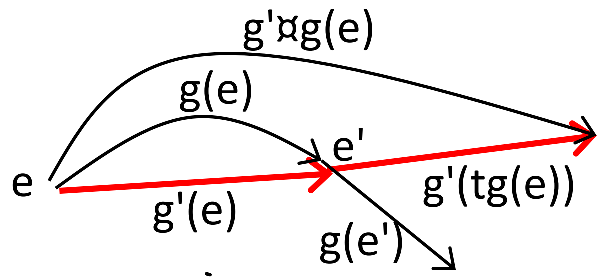
(i) sg = identité, (ii) tg: |C| ➔ |C| est une bijection.

Proposition. *Les bisections de C forment un groupe Bis*(C) *pour la composition g*'¤g où

(g' ¤ g)(e) = g'(tg(e)) g(e). pour tout e.

L'inverse de g est g^{-1} : e |-> $g((tg)^{1}(e))^{-1}$.

Les bisections n *telles que* tn *soit une identité forment un sous-groupe* N *de Bis*(C) *isomorphe au produit de tous les groupes eCe, soit à* $G^{||C||}$.



Groupe des bisections d'un groupoïde

Soit C un groupoïde transitif, s et t: C → |C| les applications source et but ('target'). On note eCe le sous-groupe des endomorphismes de C en e. Ces groupes sont tous isomorphes à un même groupe G.

Definition (C. Ehresmann 1959, Mackenzie 1987). On appellee ***bisection de*** C une application g: |C| →C telle que :

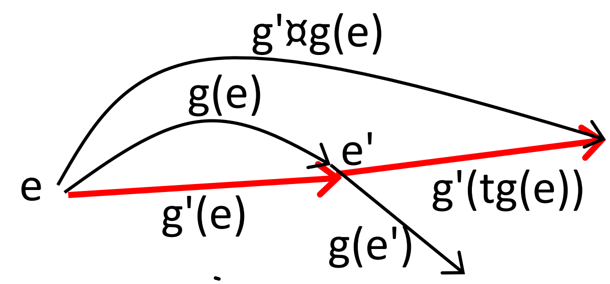
(i) sg = identité, (ii) tg: |C| ➔ |C| est une bijection.

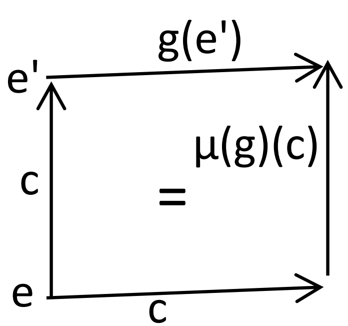
Proposition. *Les bisections de C forment un groupe Bis*(C) *pour la composition g'*¤g où

(g' ¤ g)(e) = g'(tg(e)) g(e). pour tout e.

L'inverse de g est g^{-1} : e |-> $g((tg)^{1}(e))^{-1}$.

Les bisections n *telles que* tn *soit une identité forment un sous-groupe* N *de Bis*(C) *isomorphe au produit de tous les groupes eCe, soit à* $G^{||C||}$.





Proposition. *Il existe un isomomorphisme* μ *de Bis*(C) *sur un sous-groupe du groupe Aut*(C) *des automorphismes de C, qui associe à une bisection* g *l'automorphisme (dit* ***automorphisme interne****) de* C *défini par*

μ(g): c |-> g(e') c $g(e)^{-1}$ *pour tout* c: e → e' de C.

Bis(C) comme produit semi-direct

On choisit un objet u de C et une application h: |C| → C qui associe à e un morphisme h(e): e -> u ; on prend h(u) = u. Pour tout couple (e, e') d'objets de C on note $h_{e,e'} = h(e')^{-1}h(e)$: ces morphismes forment un sous-groupe de C isomorphe au groupoïde des couples de |C|.
A une bijection σ de |C| est associée la bisection h_σ: e [-> $h_{e,\sigma(e)}$. Ces bisec-tions forment un sous-groupe H de *Bis*(C) isomorphe au groupe $S_{|C|}$= *Bij*(|C|)..

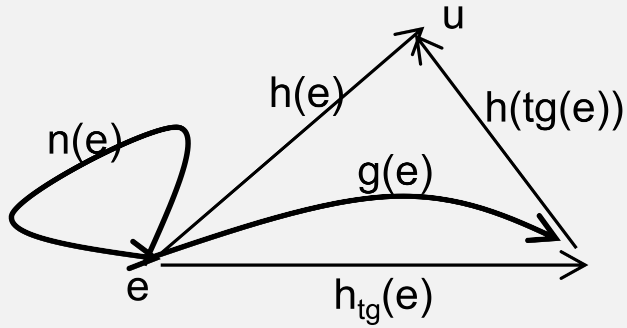
THEOREME *Le groupe Bis*(C) *est engendré par les sous-groups* N *et* H*. Le groupe* H *opère sur* N *et Bis*(C) *est isomorphe au produit semi-direct correpondant, isomorphe à* $S_{|C|}$ X| $G^{|C|}$ et au wreath product' G∫$S_{|C|}$.

Une bisection g se décompose en

$g = h_{tg}\, n \in HN$ où $n(e) = h_{tg}(e)^{-1}g(e)$.

L'action de H sur N associe à (h_σ, n)
la bisection

$n' \in N$ où $n'(e) = h_\sigma(e)^{-1}\, n(\sigma(e))h_\sigma(e)$..

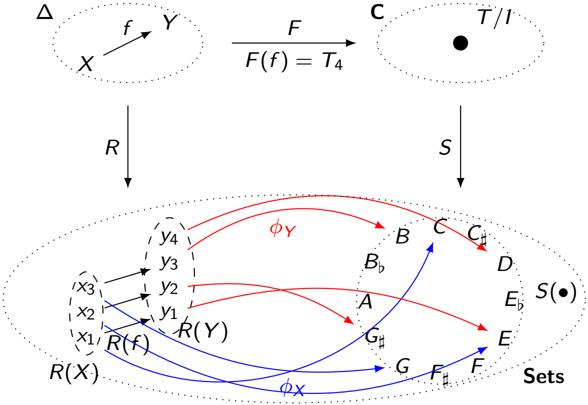


Corollaire. *Tout automorphisme du groupoïde C est un composé d'automorphismes internes de C et d'automorphismes associés à un automorphisme de* uCu.

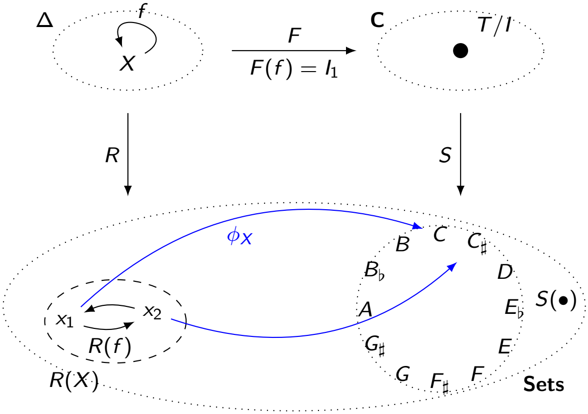
PK-Nets

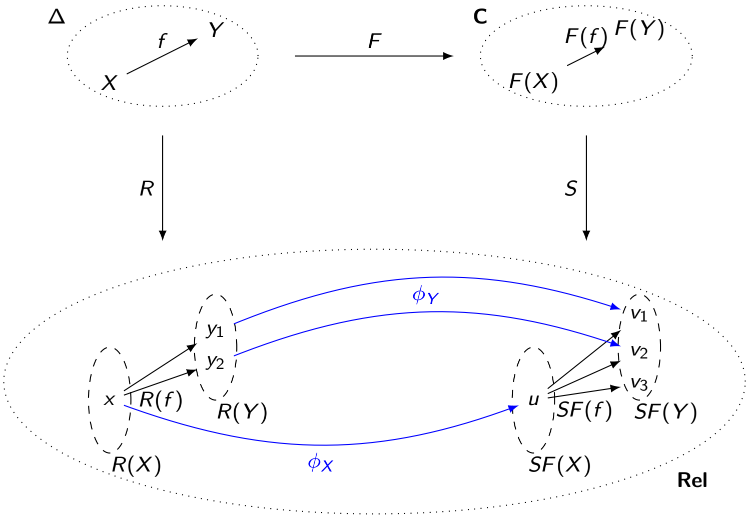
Accords de cardinalité variable : Do majeur - Septième de dominante sur Mi

Formalisation par un PK-Net :



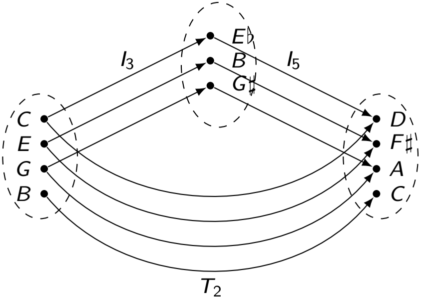
Les PK-nets permettent des réseaux plus généraux que les K-nets.





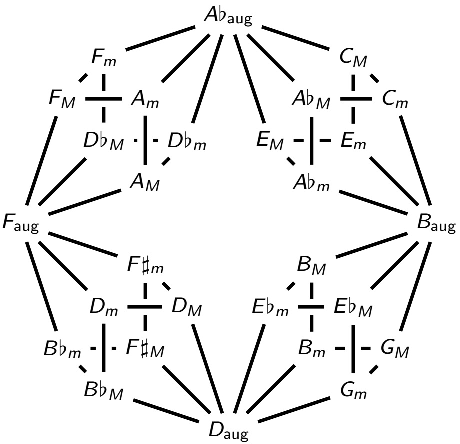
- S est un lax foncteur de **C** vers **Rel**
- R est un lax foncteur de Δ vers **Rel** à valeurs non-nulles
- F est un foncteur de Δ vers **C**
- ϕ est une lax transformation naturelle de R to SF, telle que, pour tout objet X de Δ, la composante ϕ_X est totale à gauche.

L'accord de septième majeure sur Ré est relié à l'accord de septième majeure sur Do par la transposition de deux demi-tons.
L'accord de Mi bémol mineur est relié par les inversions I_3 et I_5 aux accords majeurs sur lesquels sont construits ces accords de septième.



Le lax foncteur de Δ vers **Rel** permet d'exprimer cette dépendance.

Douthett (1998) définit la relation $\mathcal{P}_{1,0}$ entre accords majeurs, mineurs, et augmentés : deux accords sont en relation $\mathcal{P}_{1,0}$ si ils ont une seule note différant d'un demi-ton. Le graphe associé ("Cube Dance") est présenté ci-dessous.

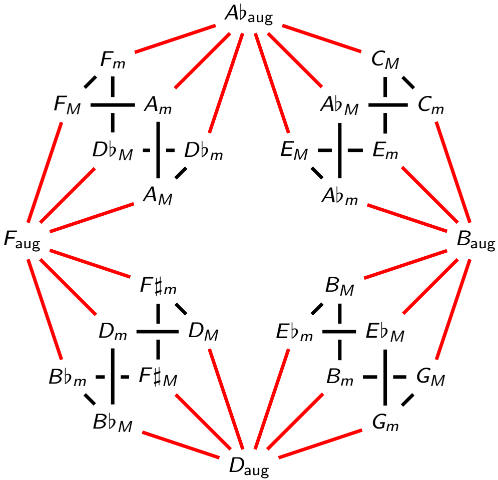


Le monoïde généré par la relation $\mathcal{P}_{1,0}$ a pour présentation

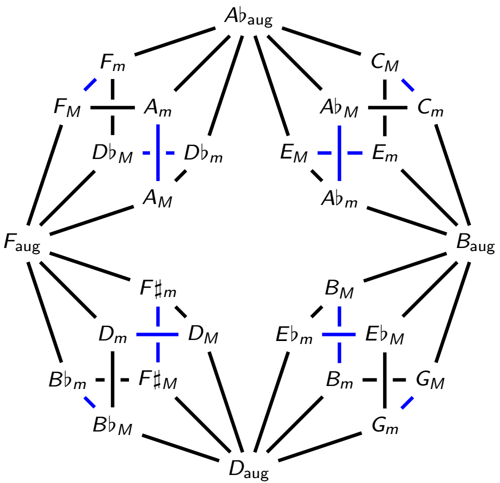
$$M_{\mathcal{P}_{1,0}} = \langle \mathcal{P}_{1,0} \mid {\mathcal{P}_{1,0}}^7 = {\mathcal{P}_{1,0}}^5 \rangle.$$

Il y est associé un foncteur $S\colon M_{\mathcal{P}_{1,0}} \to \mathbf{Rel}$ tel que son image est l'ensemble des 28 accords majeurs, mineurs, et augmentés.

Il est également possible de différencier certaines relations $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}$, et $\mathcal{L}$.

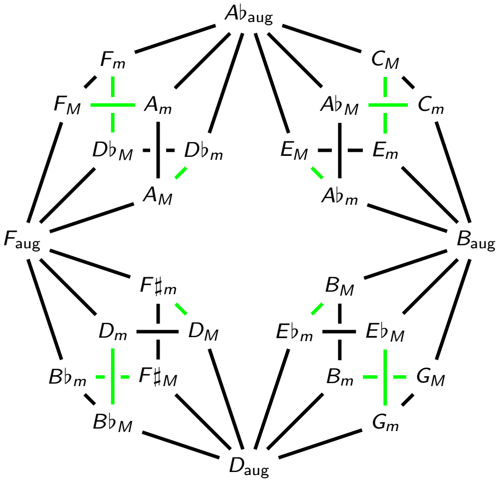


Il est également possible de différencier certaines relations $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}$, et $\mathcal{L}$.



PK-Nets relationnels : $S : \mathbf{C} \to \mathbf{Rel}$

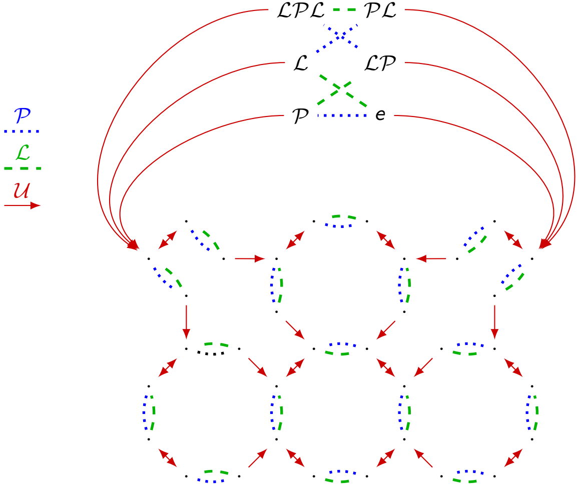
Il est également possible de différencier certaines relations $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}$, et $\mathcal{L}$.



Le monoïde généré par les relations $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}$, et $\mathcal{L}$ a pour présentation

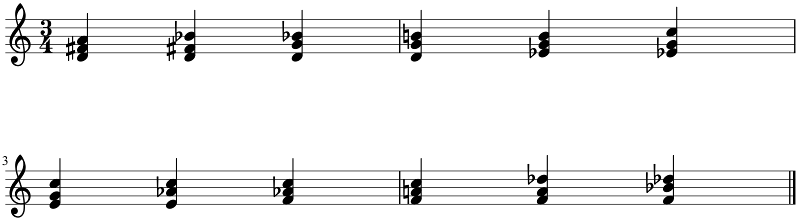
$$M_{\mathcal{UPL}} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{P}, \mathcal{L} \mid \mathcal{P}^2 = \mathcal{L}^2 = e,\ \ \mathcal{LPL} = \mathcal{PLP},\ \ \mathcal{U}^3 = \mathcal{U},$$
$$\mathcal{UP} = \mathcal{UL},\ \ \mathcal{PU} = \mathcal{LU},\ \ \mathcal{U}^2\mathcal{PU}^2 = \mathcal{PU}^2\mathcal{PU}^2\mathcal{P},$$
$$(\mathcal{UP})^2\mathcal{U}^2 = \mathcal{P}(\mathcal{UP})^2\mathcal{U}^2\mathcal{P},\ \ \mathcal{U}^2(\mathcal{PU})^2 = \mathcal{PU}^2(\mathcal{PU})^2\mathcal{P}\rangle ,$$

dont le graphe de Cayley est le suivant.



PK-Nets relationnels : $S : \mathbf{C} \to \mathbf{Rel}$

Le monoïde $M_{\mathcal{UPL}}$ trouve une application dans l'analyse de *Take A Bow* de *Muse*.



Le Rel PK-net correspondant à cette progression d'accords est le suivant.

$$\begin{tikzcd}
D_M \arrow[r, "\mathcal{U}"] & D_{\mathrm{aug}} \arrow[r, "\mathcal{U}"] & G_m \arrow[r, "\mathcal{P}"] & G_M \arrow[r, "\mathcal{U}"] & B_{\mathrm{aug}} \arrow[r, "\mathcal{U}"] & C_m \arrow[dlllll, "\mathcal{P}"] \\
C_M \arrow[r, "\mathcal{U}"'] & A\flat_{\mathrm{aug}} \arrow[r, "\mathcal{U}"'] & F_m \arrow[r, "\mathcal{P}"'] & F_M \arrow[r, "\mathcal{U}"'] & F_{\mathrm{aug}} \arrow[r, "\mathcal{U}"'] & B\flat_m
\end{tikzcd}$$

La lax transformation naturelle ϕ permet de travailler avec $M_{\mathcal{UPL}}$ en ne sélectionnant que certains accords dans l'image de $M_{\mathcal{UPL}}$ par S.

Morphismes de PK-nets

Homographie de PK-nets :

$$
\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r, dash] \arrow[dd, "R"'] & \Delta \arrow[r, dash] \arrow[d, "F"] & \Delta \arrow[r, dash] \arrow[d, "F'"] & \Delta \arrow[dd, "R"] \\
{} \arrow[r, phantom, "\Rightarrow \phi"] & \mathbf{C} \arrow[r, red, "N"] \arrow[d, "S"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, red, "\Rightarrow \nu"'] & \mathbf{C}' \arrow[d, "S'"'] & {} \arrow[l, phantom, "\phi' \Leftarrow"'] \\
\mathbf{Sets} \arrow[r, dash] & \mathbf{Sets} \arrow[r, dash] & \mathbf{Sets} \arrow[r, dash] & \mathbf{Sets}
\end{tikzcd}
$$

- N tel que $F' = NF$
- $\nu \colon SF \to S'F'$ telle que $\phi' = \nu \circ \phi$

Dans une *homographie locale* de PK-nets, $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$, et la transformation naturelle ν se décompose en $\nu = S\hat{\nu}$ avec

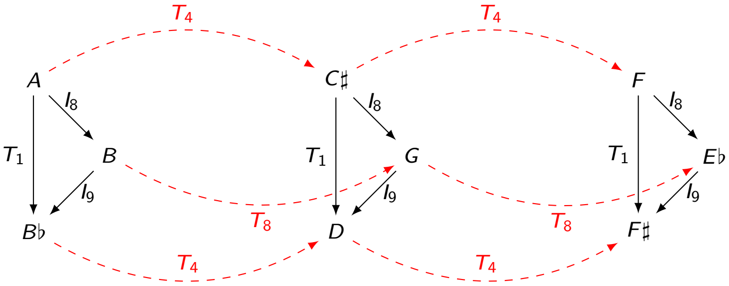
- N tel que $F' = NF$
- $\hat{\nu} \colon F \to F' = NF$

$$
\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r, no head] \arrow[dd, "R"'] & \Delta \arrow[r, no head] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\hat{\nu}}{\Rightarrow}"] & \Delta \arrow[r, no head] \arrow[d, "F' = NF"] & \Delta \arrow[dd, "R"] \\
\arrow[r, phantom, "\overset{\phi}{\Rightarrow}"] & \mathbf{C} \arrow[r, "N"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mathrm{id}_S}{\Rightarrow}"] & \mathbf{C} \arrow[d, "S"] & \arrow[l, phantom, "\overset{\phi'}{\Leftarrow}"] \\
\mathbf{Sets} \arrow[r, no head] & \mathbf{Sets} \arrow[r, no head] & \mathbf{Sets} \arrow[r, no head] & \mathbf{Sets}
\end{tikzcd}
$$

Isographie $\langle T_0 \rangle$ entre les trois groupes de notes.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "I_8"] \arrow[dd, "T_1"'] & \\ & B \arrow[dl, "I_9"] \\ B\flat & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C\sharp \arrow[dr, "I_8"] \arrow[dd, "T_1"'] & \\ & G \arrow[dl, "I_9"] \\ D & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[dr, "I_8"] \arrow[dd, "T_1"'] & \\ & E\flat \arrow[dl, "I_9"] \\ F\sharp & \end{tikzcd}$$

Isographie $\langle T_0 \rangle$ entre les trois groupes de notes.



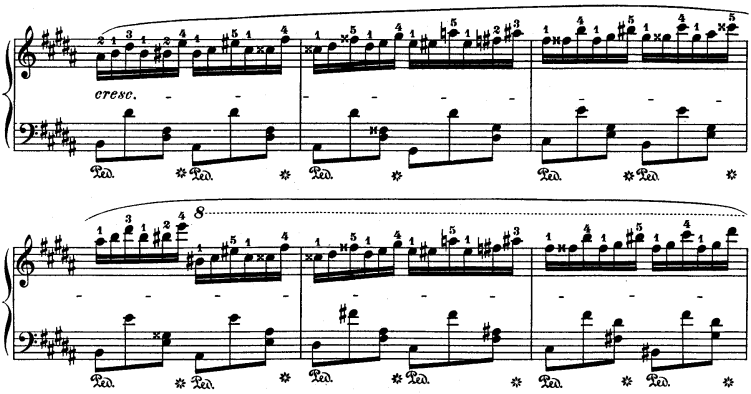
Dans une *homographie complète* de PK-nets, la transformation naturelle ν se décompose en $\nu = \tilde{\nu}F$ avec

- N tel que $F' = NF$
- $\tilde{\nu} \colon S \to S'N$

$$
\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r, dash] \arrow[ddd, "R"'] \arrow[ddr, phantom, "\overset{\phi}{\Rightarrow}"] & \Delta \arrow[r, dash] \arrow[d, "F"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mathrm{id}_F}{\Rightarrow}"] & \Delta \arrow[r, dash] \arrow[d, "F"] & \Delta \arrow[ddd, "R"] \arrow[ddl, phantom, "\overset{\phi'}{\Leftarrow}"] \\
& \mathbf{C} \arrow[r, dash] \arrow[dd, "S"'] \arrow[ddr, phantom, "\overset{\tilde{\nu}}{\Rightarrow}"] & \mathbf{C} \arrow[d, "N"'] & \\
& & \mathbf{C}' \arrow[d, "S'"'] & \\
\mathbf{Sets} \arrow[r, dash] & \mathbf{Sets} \arrow[r, dash] & \mathbf{Sets} \arrow[r, dash] & \mathbf{Sets}
\end{tikzcd}
$$

Lorsque N est un isomorphisme et $\tilde{\nu}$ une équivalence, ceci revient à étudier le groupe d'automorphismes de l'objet $(\mathbf{C}, S)$ de $\mathrm{Diag}(\mathbf{Sets})$.

Exemple de morphisme de PK-Net : Sonate pour piano de Chopin's, Nr. 3, op. 58 en Si mineur



La correspondance entre l'évolution temporelle et l'évolution des hauteurs peut être décrite par une homographie complète $(N, \tilde{\nu}F)$ définie par

- le groupe $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ et son foncteur représentable vers **Sets**, décrivant les transformations d'une pulsation rythmique régulière,
- le groupe $\mathbb{Z}_{12} = \langle z \mid z^{12} = 1 \rangle$ et son foncteur représentable vers **Sets**, décrivant les transformations des 12 classes de hauteur,
- l'homomorphisme $N\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{12}$ associant z^2 à t, avec la transformation naturelle $\tilde{\nu}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{12}$ telle que $\tilde{\nu}(t) = (z+2) \pmod{12}$.

Théorème

*Soit (G, S) un objet de Diag(**Sets**), où G est un groupe, et S un foncteur représentable de G vers **Sets** (action simplement transitive).*
Alors, le groupe d'automorphismes de (G, S) est isomorphe à $G \rtimes Aut(G)$, càd l'holomorphe de G.

Le sous-groupe normal G de $\mathrm{Aut}(G, S)$ correspond aux éléments $(N, \tilde{\nu})$ où N est l'identité. La transformation naturelle $\tilde{\nu}$ définit une action de groupe qui commute avec l'action de n'importe quel élément g de G.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "S(g)"] \arrow[d, "\tilde{\nu}"'] & y \arrow[d, "\tilde{\nu}"] \\
\tilde{\nu}(x) \arrow[r, "S(g)"'] & \tilde{\nu}(y)
\end{tikzcd}$$

Si $G = T/I$, l'action de $\tilde{\nu}$ coincide avec celle des éléments du groupe PRL.
A l'inverse, si $G = \mathrm{PRL}$, l'action de $\tilde{\nu}$ coincide avec celle des éléments du groupe T/I.

Dualité de Lewin = cas particulier au sein de $\mathrm{Aut}(G, S)$.

Application : Gesualdo, motet à cinq voix *Deus refugium et virtu*

Application : Gesualdo, motet à cinq voix *Deus refugium et virtu*

$$
\begin{tikzcd}
\mathit{La}_{\text{Maj}} \arrow[dr, "PRP=(RL)^6R"] & & & & & \mathit{Mi}_{\text{Maj}} \arrow[dr, "PRP=(RL)^6R"] & & \\
& \mathit{Do}_{\text{Min}} \arrow[dr, "RLP=(RL)^4R"] & & \arrow[r, "N=Id", "\left\{\begin{array}{l}\tilde{\nu}(n_{\text{Maj}})=(n+7)_{\text{Maj}}\\ \tilde{\nu}(n_{\text{Min}})=(n+7)_{\text{Min}}\end{array}\right."'] & {} & & \mathit{Sol}_{\text{Min}} \arrow[dr, "RLP=(RL)^4R"] & \\
& & \mathit{Sol}_{\text{Maj}} & & & & & \mathit{Ré}_{\text{Maj}}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} N(L)=R \\ N(R)=RLR \end{array} \Bigg\downarrow \left\{\begin{array}{l}\tilde{\nu}(n_{\text{Maj}})=(n+7)_{\text{Maj}}\\ \tilde{\nu}(n_{\text{Min}})=n_{\text{Min}}\end{array}\right.
\qquad\qquad
\begin{array}{c} N(L)=R \\ N(R)=RLR \end{array} \Bigg\downarrow \left\{\begin{array}{l}\tilde{\nu}(n_{\text{Maj}})=(n+7)_{\text{Maj}}\\ \tilde{\nu}(n_{\text{Min}})=n_{\text{Min}}\end{array}\right.
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathit{Mi}_{\text{Maj}} \arrow[dr, "PLP=(RL)^7R"] & & & & & \mathit{Si}_{\text{Maj}} \arrow[dr, "PLP=(RL)^7R"] & & \\
& \mathit{Do}_{\text{Min}} \arrow[dr, "P(LR)^2=(RL)^5R"] & & \arrow[r, "N=Id", "\left\{\begin{array}{l}\tilde{\nu}(n_{\text{Maj}})=(n+7)_{\text{Maj}}\\ \tilde{\nu}(n_{\text{Min}})=(n+7)_{\text{Min}}\end{array}\right."'] & {} & & \mathit{Sol}_{\text{Min}} \arrow[dr, dashed] & \\
& & \mathit{Ré}_{\text{Maj}} & & & & & (\mathit{La}_{\text{Min}})
\end{tikzcd}
$$

Si S n'est pas représentable, il est plus difficile de déterminer le groupe d'automorphismes de (G, S).

Théorème

*Soit l'objet (G, S) de Diag(**Sets**), où G est le groupe T/I, et S le foncteur vers **Sets** correspondant à l'action de T/I sur l'ensemble $\mathbb{Z}_{12}$.*
Alors, le groupe d'automorphismes de $(T/I, S)$ est isomorphe au groupe $T/M \simeq \mathrm{Aut}(T/I)$.

Les éléments $(N, \tilde{\nu})$ de $\mathrm{Aut}(T/I, S)$ correspondent aux isographies $\langle k_p \rangle$ où p est pair, avec $\tilde{\nu}(x) = kx + p/2$ ou $\tilde{\nu}(x) = kx + p/2 + 6$.

En particulier, puisque T/I est un sous-groupe de T/M, il est possible de réinterpréter l'action de ses éléments comme une action par isographies $\langle k_p \rangle$ avec p pair.

Le groupe T/I, usuellement considéré en tant qu' extension de $\mathbb{Z}_{12}$ par $\mathbb{Z}_2$, peut ainsi être réinterprété en tant qu'extension de $\mathbb{Z}_2$ par D_{12}.

Le groupe d'automorphismes de $(T/I, S)$ possède naturellement une structure de 2-groupe :

$$
\begin{tikzcd}
T/I \arrow[rr, bend left, "N_1"] \arrow[rr, bend right, "N_2"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[ddr, "S"', ""{name=L}] & & T/I \arrow[ddl, "S", ""'{name=R}] \\
& & \\
& \mathbf{Sets} &
\arrow[from=L, to=R, dashed, "\tilde{\nu}_1", "\tilde{\nu}_2"']
\end{tikzcd}
$$

avec $S(\tilde{\nu}_2) = S(\eta) \circ S(\tilde{\nu}_1)$.

Ainsi, les éléments du groupe T/I peuvent aussi être réinterprétés comme des 2-morphismes η de $\mathrm{Aut}(T/I, S)$, et leur action comme l'action canonique sur $\mathbb{Z}_{12}$ donnée par $S(\eta)$.

Remarque

Soit S un foncteur d'un groupe G vers **Sets** : les éléments $(N, \tilde{\nu})$ de $\mathrm{Aut}(G, S)$ définissent une action de groupe sur l'image de G par S via $\tilde{\nu}$, i.e. un nouveau foncteur $S' : \mathrm{Aut}(G, S) \to$ **Sets**.

Il est alors possible d'étudier le groupe d'automorphismes de $(\mathrm{Aut}(G, S), S')$, qui définit un nouveau foncteur $S'' : \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(G, S), S') \to$ **Sets**, et ainsi de suite...

Dans le cas $G = T/I$, on a $\mathrm{Aut}(G, S) \simeq T/M$, et $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(G, S), S') \simeq T/M$.

Les éléments de $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(G, S), S')$ peuvent être identifiés à certains morphismes verticaux dans la catégorie double des carrés commutatifs de Diag(**Sets**).

En relâchant la condition $F' = NF$ dans les homographies locales, il est possible des transformations de PK-nets plus générales.

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r, dash] \arrow[dd, "R"'] & \Delta \arrow[r, dash] \arrow[d, "F"] \arrow[r, phantom, "\overset{F \;\Rightarrow\; F'}{\hat{\nu}}"] & \Delta \arrow[r, dash] \arrow[d, "F'"'] & \Delta \arrow[dd, "R"] \\
\arrow[r, phantom, "\overset{\phi}{\Rightarrow}"] & \mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "S"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\overset{S \;\Rightarrow\; S}{\mathrm{id}_S}"] & \mathbf{C} \arrow[d, "S"] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi'}{\Leftarrow}"] & \\
\mathbf{Sets} \arrow[r, dash] & \mathbf{Sets} \arrow[r, dash] & \mathbf{Sets} \arrow[r, dash] & \mathbf{Sets}
\end{tikzcd}$$

Ceci est en lien avec les problématiques de voice-leading, lorsque **C** est un groupe, notamment le groupe T/I.

PK-nets et voice-leading

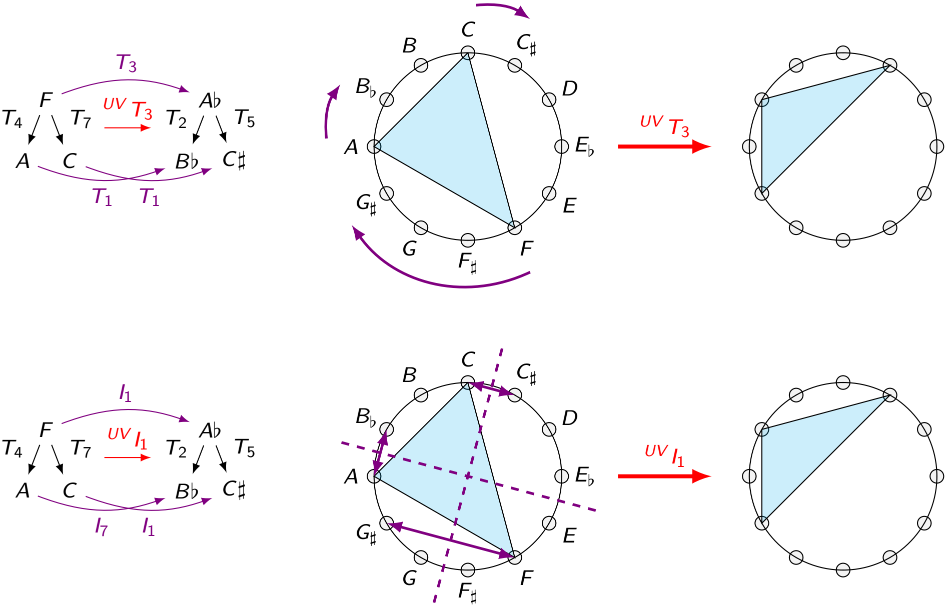
Les objets de $(T/I)^{\Delta}$ (foncteurs $F\colon \Delta \to T/I$) peuvent être vus comme des *types d'accords généralisés*.

$$U = \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl, "T_4"'] \arrow[dr, "T_7"] & \\ \bullet & & \bullet \end{tikzcd} \qquad V = \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl, "T_2"'] \arrow[dr, "T_5"] & \\ \bullet & & \bullet \end{tikzcd}$$

Théorème

Soit Δ un poset avec un plus petit élément O, et soit $\mathbf{G}$ un groupe considéré comme une catégorie. Alors

- *la catégorie de foncteurs $\mathbf{G}^{\Delta}$ est un groupoïde, et*
- *pour tous objets F et F' de $\mathbf{G}^{\Delta}$ l'ensemble $Hom(F, F')$ peut être identifié bijectivement avec l'ensemble des éléments de $\mathbf{G}$.*

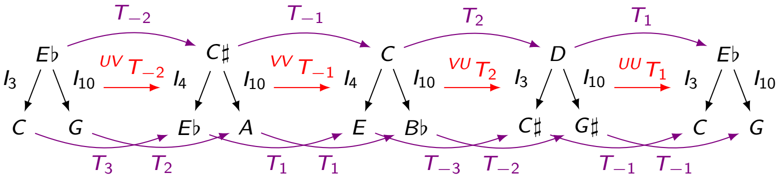


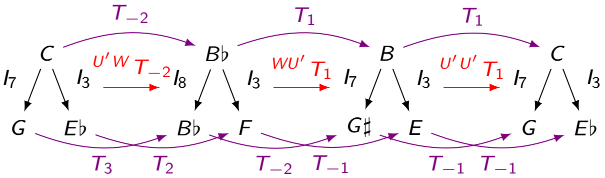
T3
F
T4
T7
UV T3
T2
A♭
T5
A
C
B♭
C♯
T1
T1
B
C
C♯
B♭
D
A
E♭
G♯
E
G
F♯
F
UV T3
I1
F
T4
T7
UV I1
T2
A♭
T5
A
C
B♭
C♯
I7
I1
B
C
C♯
B♭
D
A
E♭
G♯
E
G
F♯
F
UV I1

$$\begin{tikzcd} & E\flat \arrow[dl, "I_3"'] \arrow[dr, "I_{10}"] & \\ C & & G \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & C\sharp \arrow[dl, "I_4"'] \arrow[dr, "I_{10}"] & \\ E\flat & & A \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "I_4"'] \arrow[dr, "I_{10}"] & \\ E & & B\flat \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "I_3"'] \arrow[dr, "I_{10}"] & \\ C\sharp & & G\sharp \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & E\flat \arrow[dl, "I_3"'] \arrow[dr, "I_{10}"] & \\ C & & G \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "I_7"'] \arrow[dr, "I_3"] & \\ G & & E\flat \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & B\flat \arrow[dl, "I_8"'] \arrow[dr, "I_3"] & \\ B\flat & & F \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "I_7"'] \arrow[dr, "I_3"] & \\ G\sharp & & E \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "I_7"'] \arrow[dr, "I_3"] & \\ G & & E\flat \end{tikzcd}$$


5
A tempo (nicht eilen)
Rit.
p
mp poco marc.
mf
f *)
pp
p
pp
mf
f *)
pp
mf
Viel Ped.


T_{-2} T_{-1} T_2 T_1
$E\flat$ $C\sharp$ C D $E\flat$
I_3 I_{10} UV T_{-2} I_4 I_{10} VV T_{-1} I_4 I_{10} VU T_2 I_3 I_{10} UU T_1 I_3 I_{10}
C G $E\flat$ A E $B\flat$ $C\sharp$ $G\sharp$ C G
T_3 T_2 T_1 T_1 T_{-3} T_{-2} T_{-1} T_{-1}


T_{-2} T_1 T_1
C $B\flat$ B C
I_7 I_3 $U'W$ T_{-2} I_8 I_3 WU' T_1 I_7 I_3 $U'U'$ T_1 I_7 I_3
G $E\flat$ $B\flat$ F $G\sharp$ E G $E\flat$
T_3 T_2 T_{-2} T_{-1} T_{-1} T_{-1}

Théorème

Soit $\mathbf{C}$ un groupoïde à n objets, avec, pour tout objet X de $\mathbf{C}$, $End(X) \simeq G$.
Alors le groupe des bisections de $\mathbf{C}$ est isomorphe à $G \wr S_n$.

En particulier, si l'on considère la catégorie de foncteurs G^{Δ} pour un groupe G tel que G soit une extension $1 \to Z \to G \to H \to 1$, alors il est possible de construire une sous-catégorie $\widetilde{G^{\Delta}}$ par pull-back

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathbf{G}^{\Delta}} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \widetilde{\mathbf{H}^{\Delta}} \arrow[d, "\iota"] \\ \mathbf{G}^{\Delta} \arrow[r, "\Pi"] & \mathbf{H}^{\Delta} \end{tikzcd}$$

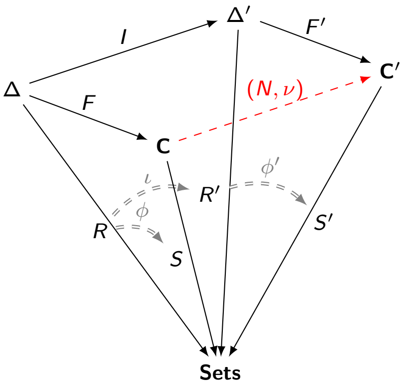
où

- pour tout objet X de $\widetilde{\mathbf{H}^{\Delta}}$, $\mathrm{End}(X)$ est trivial,
- le foncteur d'inclusion ι est l'identité sur les objets.

Alors, le groupe des bisections d'un sous-groupoïde fini (k objets) de $\widetilde{G^{\Delta}}$ est isomorphe à $Z \wr S_k$. Dans le cas du groupe T/I, le groupe des bisections est isomorphe à $\mathbb{Z}_{12} \wr S_k$. Si $k = 2$, on retrouve le groupe des UTT de Hook.

Changement de Δ

Il est possible de généraliser la construction catégorielle pour prendre en compte des changements dans la catégorie Δ et le foncteur R.



- I est un foncteur de Δ vers Δ'
- ι est une transformation naturelle de R vers $R'I$
- N est un foncteur de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}'$ tel que $NF = F'I$
- ν est une transformation naturelle de SF vers $S'F'I$, telle que $\nu \circ \phi = (\phi' I) \circ \iota$.

En s'intéressant aux problématiques de voice-leading, et en relâchant la contrainte $F' = NF$, la slice 2-catégorie $\mathbf{Cat}/(T/I)$ généralise le groupoïde $(T/I)^{\Delta}$.

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[rr, "I"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[dr, bend left, "F'I"] & & \Delta' \arrow[dl, "F'"] \\
& T/I &
\end{tikzcd}$$

$$\nu : F \Rightarrow F'I$$

Merci de votre attention