Soutenance de thèse

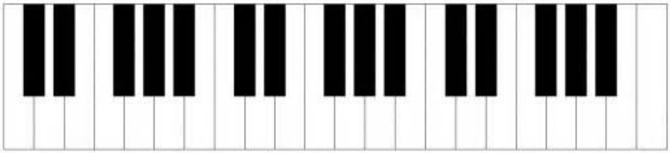
Etude de deux concepts mathématico-musicaux : l'homométrie non-commutative et les distances d'accords

Grégoire GENUYS

L'Homométrie non-commutative

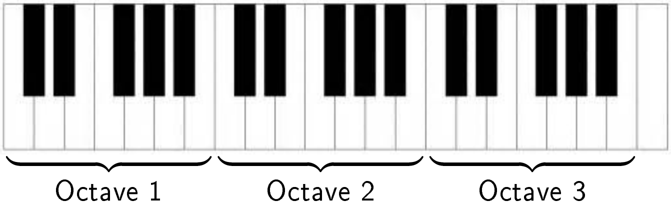
Introduction

De la musique aux mathématiques



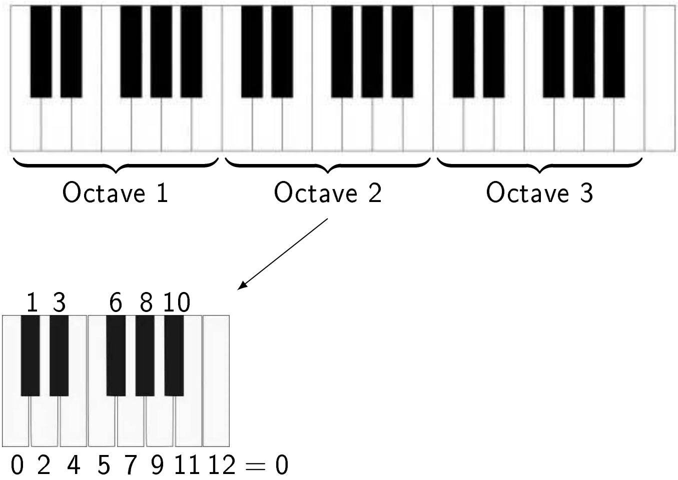
Introduction

De la musique aux mathématiques



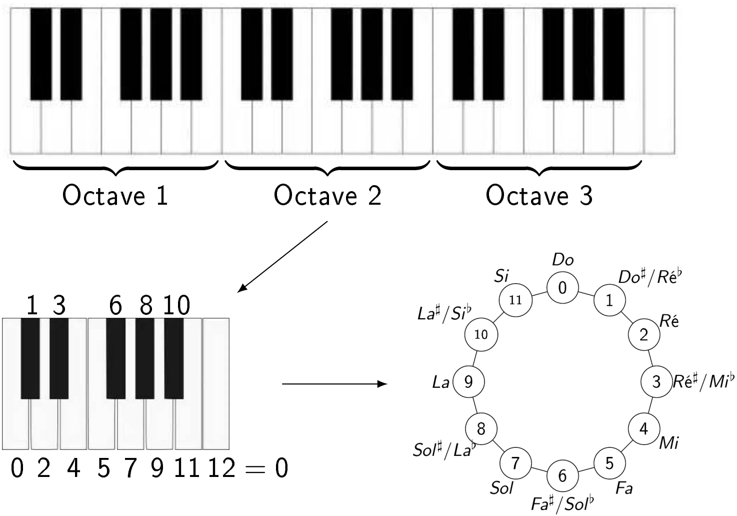
Introduction

De la musique aux mathématiques



Introduction

De la musique aux mathématiques

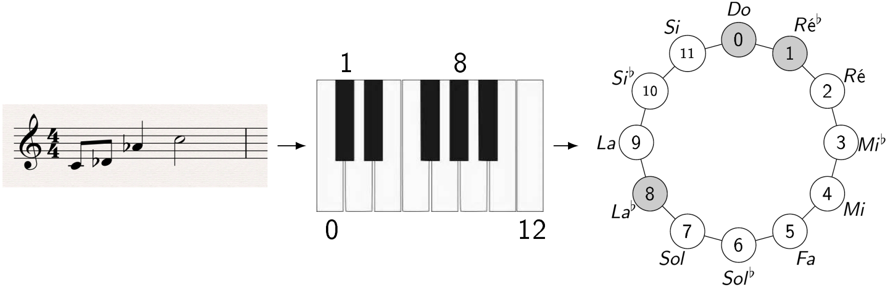


- On représente toutes les notes par des numéros entre 0 et 11, soit par un élément de $\mathbb{Z}_{12} := \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Introduction

De la musique aux mathématiques

- On représente toutes les notes par des numéros entre 0 et 11, soit par un élément de $\mathbb{Z}_{12} := \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
- Par exemple, la mélodie

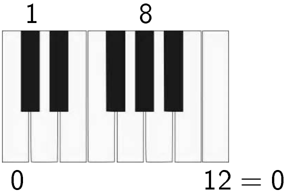


est représentée par : $\{Do, Ré^\flat, La^\flat, Do\} = \{0, 1, 8, 0\}$.

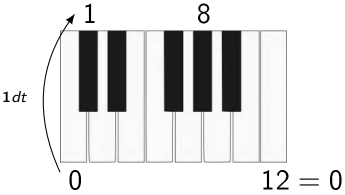
Introduction
La notion d'intervalle

- L'**intervalle musical** entre deux notes est la "distance" entre ces deux notes, qui correspond au nombre de touches séparant ces notes sur un clavier de piano.

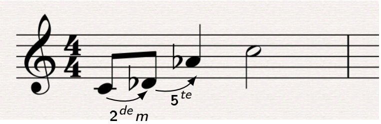
- L'**intervalle musical** entre deux notes est la "distance" entre ces deux notes, qui correspond au nombre de touches séparant ces notes sur un clavier de piano.
- Par exemple dans la mélodie précédente :

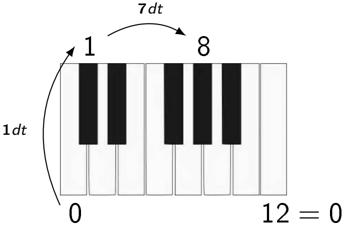


- L'**intervalle musical** entre deux notes est la "distance" entre ces deux notes, qui correspond au nombre de touches séparant ces notes sur un clavier de piano.
- Par exemple dans la mélodie précédente :



- L'**intervalle musical** entre deux notes est la "distance" entre ces deux notes, qui correspond au nombre de touches séparant ces notes sur un clavier de piano.
- Par exemple dans la mélodie précédente :

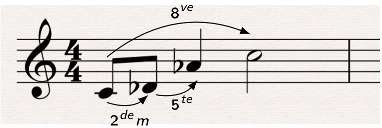


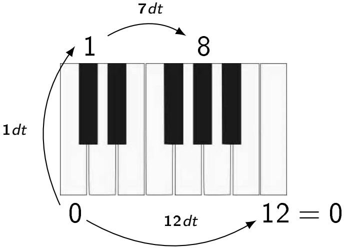


Introduction

La notion d'intervalle

- L'**intervalle musical** entre deux notes est la "distance" entre ces deux notes, qui correspond au nombre de touches séparant ces notes sur un clavier de piano.
- Par exemple dans la mélodie précédente :





Introduction

Définition de l'homométrie

- Pour une mélodie donnée, on peut calculer tous les intervalles qu'elle contient. On peut alors former son **vecteur d'intervalles** :

Introduction

Définition de l'homométrie

- Pour une mélodie donnée, on peut calculer tous les intervalles qu'elle contient. On peut alors former son **vecteur d'intervalles** :

$$\mathbf{iv}(\{0,1,8,0\}) = [2,0,0,2,1,0,1,2,0,0,2],$$

Introduction

Définition de l'homométrie

- Pour une mélodie donnée, on peut calculer tous les intervalles qu'elle contient. On peut alors former son **vecteur d'intervalles** :

$$\mathbf{iv}(\{0, 1, 8, 0\}) = [\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nombre d'intervalles valant 1 dt}}}{2}, 0, 0, 2, 1, 0, 1, 2, 0, 0, 2],$$

Introduction

Définition de l'homométrie

- Pour une mélodie donnée, on peut calculer tous les intervalles qu'elle contient. On peut alors former son **vecteur d'intervalles** :

nombre d'intervalles valant 1 dt

nombre d'intervalles valant 2 dt

$$\mathbf{iv}(\{0,1,8,0\}) = [2,0,0,2,1,0,1,2,0,0,2],$$

Introduction

Définition de l'homométrie

- Pour une mélodie donnée, on peut calculer tous les intervalles qu'elle contient. On peut alors former son **vecteur d'intervalles** :

nombre d'intervalles valant 1 dt

nombre d'intervalles valant 2 dt

$$\mathbf{iv}(\{0,1,8,0\}) = [2,0,0,2,1,0,1,2,0,0,2],$$

$$\mathbf{iv}(A)(t) = \mathbb{I}_{-A} \star \mathbb{I}_{A}(t),\ t \in \mathbb{Z}_{12}.$$

Introduction

Définition de l'homométrie

- Pour une mélodie donnée, on peut calculer tous les intervalles qu'elle contient. On peut alors former son **vecteur d'intervalles** :

nombre d'intervalles valant 1 dt

nombre d'intervalles valant 2 dt

$$\mathbf{iv}(\{0,1,8,0\}) = [2,0,0,2,1,0,1,2,0,0,2],$$

$$\mathbf{iv}(A)(t) = \mathbb{I}_{-A} \star \mathbb{I}_A,\ t \in \mathbb{Z}_{12}.$$

- Deux mélodies sont **homométriques** si elles ont le même vecteur d'intervalles, c'est-à-dire qu'elles sont composées à partir des mêmes intervalles musicaux.

Introduction

Définition de l'homométrie

- Pour une mélodie donnée, on peut calculer tous les intervalles qu'elle contient. On peut alors former son **vecteur d'intervalles** :

nombre d'intervalles valant 1 dt

nombre d'intervalles valant 2 dt

$$\mathbf{iv}(\{0,1,8,0\}) = [2,0,0,2,1,0,1,2,0,0,2],$$

$$\mathbf{iv}(A)(t) = \mathbb{I}_{-A} \star \mathbb{I}_A,\ t \in \mathbb{Z}_{12}.$$

- Deux mélodies sont **homométriques** si elles ont le même vecteur d'intervalles, c'est-à-dire qu'elles sont composées à partir des mêmes intervalles musicaux.

- $\{Do, Ré^\flat, Mi, Sol^\flat\}$=$\{0,1,4,6\}$et $\{Do, Ré^\flat, Mi^\flat, Sol\}$=$\{0,1,3,7\}$ sont homométriques.

- Nous avons deux ensembles : des Notes et des Intervalles qui peuvent agir dessus.

$$
\begin{gathered}
Ré + 5^{te} = La \\
\Longrightarrow 2 + 7 = 9
\end{gathered}
$$

- Nous avons deux ensembles : des Notes et des Intervalles qui peuvent agir dessus.

$$\mathit{R}\text{é} + 5^{te} = \mathit{La}$$
$$\Longrightarrow 2 + 7 = 9$$

- L'addition est commutative : $2 + 7 = 7 + 2$.

Introduction

Commutativité et non-commutativité

- Nous avons deux ensembles : des Notes et des Intervalles qui peuvent agir dessus.

$$Ré + 5^{te} = La$$
$$\Longrightarrow 2 + 7 = 9$$

- L'addition est commutative : $2 + 7 = 7 + 2$.

- **Que se passe-t-il si nous nous plaçons dans un contexte non-commutatif? Que se passe-t-il si les Intervalles peuvent agir à droite et à gauche sur les Notes?**

- Nous avons deux ensembles : des Notes et des Intervalles qui peuvent agir dessus.

$$
\begin{aligned}
&Ré + 5^{te} = La \\
&\Longrightarrow 2 + 7 = 9
\end{aligned}
$$

- L'addition est commutative : $2 + 7 = 7 + 2$.

- **Que se passe-t-il si nous nous plaçons dans un contexte non-commutatif? Que se passe-t-il si les Intervalles peuvent agir à droite et à gauche sur les Notes?**

- Que se passe-t-il si " Ré $+ 5^{te} \neq 5^{te} +$ Ré "?

Bilan et position du problème

L'homométrie a été étudiée dans le cas du groupe commutatif $\mathbb{Z}_{12}$ (et plus généralement $\mathbb{Z}_n$) qui agit sur lui-même par addition.

Bilan et position du problème

L'homométrie a été étudiée dans le cas du groupe commutatif $\mathbb{Z}_{12}$ (et plus généralement $\mathbb{Z}_n$) qui agit sur lui-même par addition.

- Comment se comporte l'homométrie dans des groupes non-commutatifs?

Bilan et position du problème

L'homométrie a été étudiée dans le cas du groupe commutatif $\mathbb{Z}_{12}$ (et plus généralement $\mathbb{Z}_n$) qui agit sur lui-même par addition.

- Comment se comporte l'homométrie dans des groupes non-commutatifs?

- Quels groupes non-commutatifs étudiés et quelle interprétation musicale leur donner?

Bilan et position du problème

L'homométrie a été étudiée dans le cas du groupe commutatif $\mathbb{Z}_{12}$ (et plus généralement $\mathbb{Z}_n$) qui agit sur lui-même par addition.

- Comment se comporte l'homométrie dans des groupes non-commutatifs?
  $\longrightarrow$ Etude de produits semi-directs

- Quels groupes non-commutatifs étudiés et quelle interprétation musicale leur donner?

Bilan et position du problème

L'homométrie a été étudiée dans le cas du groupe commutatif $\mathbb{Z}_{12}$ (et plus généralement $\mathbb{Z}_n$) qui agit sur lui-même par addition.

- Comment se comporte l'homométrie dans des groupes non-commutatifs?
  $\longrightarrow$ Etude de produits semi-directs

- Quels groupes non-commutatifs étudiés et quelle interprétation musicale leur donner?
  $\longrightarrow$ Le groupe diédral (accords musicaux)
  $\longrightarrow$ Le groupe des instants et durées (rythmes)

Les produits semi-directs

Qui sont-ils?

- Le produit semi-direct de deux groupes $(G, +)$ et $(H, \times)$ est le groupe produit $G \rtimes H$ dont :
  - les éléments sont les couples $(g, h) \in G \times H$;
  - la multiplication entre deux éléments est :

$$(g_1, h_1) \times (g_2, h_2) = (g_1 + h_1 \times g_2, h_1 \times h_2)$$

Les produits semi-directs

Qui sont-ils?

- Le produit semi-direct de deux groupes $(G, +)$ et $(H, \times)$ est le groupe produit $G \rtimes H$ dont :
  - les éléments sont les couples $(g, h) \in G \times H$;
  - la multiplication entre deux éléments est :

$$(g_1, h_1) \times (g_2, h_2) = (g_1 + h_1 \times g_2, h_1 \times h_2)$$

- Généralement, $G \rtimes H$ n'est pas un groupe commutatif :

$$(g_1, h_1) \times (g_2, h_2) \neq (g_2, h_2) \times (g_1, h_1)$$

Les produits semi-directs

Intervalles à droite et à gauche

- Nous pouvons définir deux intervalles entre deux éléments (g_1, h_1) et (g_2, h_2) :

$$(g_1, h_1) \times \underbrace{(i, j)}_{\text{intervalle à droite}} = (g_2, h_2)$$

$$\underbrace{(i', j')}_{\text{intervalle à gauche}} \times (g_1, h_1) = (g_2, h_2)$$

Les produits semi-directs

Intervalles à droite et à gauche

- Nous pouvons définir deux intervalles entre deux éléments (g_1, h_1) et (g_2, h_2) :

$$(g_1, h_1) \times \underbrace{(i, j)}_{\text{intervalle à droite}} = (g_2, h_2)$$

$$\underbrace{(i', j')}_{\text{intervalle à gauche}} \times (g_1, h_1) = (g_2, h_2)$$

- Un produit semi-direct agit sur lui-même par multiplication à droite ou à gauche.

Les produits semi-directs

Homométrie à droite et à gauche

- Pour un ensemble de couples $\{(g_1, h_1), (g_2, h_2), ..., (g_n, h_n)\}$ nous pouvons regarder tous les intervalles :

$$\begin{array}{ll}
\text{à droite} & \text{à gauche} \\
(g_1, h_1) \times (i_1, j_1) = (g_2, h_2) & (i'_1, j'_1) \times (g_1, h_1) = (g_2, h_2) \\
(g_1, h_1) \times (i_2, j_2) = (g_3, h_3) & (i'_2, j'_2) \times (g_1, h_1) = (g_3, h_3) \\
(g_1, h_1) \times (i_3, j_3) = (g_4, h_4) & (i'_3, j'_3) \times (g_1, h_1) = (g_4, h_4) \\
... & ... \\
... & ...
\end{array}$$

Les produits semi-directs

Homométrie à droite et à gauche

- Pour un ensemble de couples $\{(g_1, h_1), (g_2, h_2), ..., (g_n, h_n)\}$ nous pouvons regarder tous les intervalles :

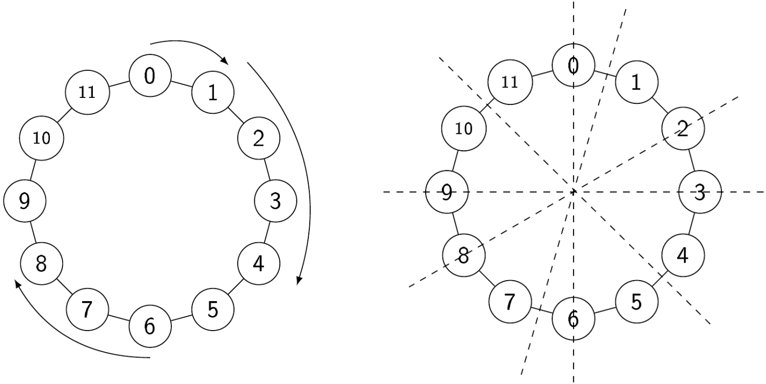
à droite	à gauche
$(g_1, h_1) \times (i_1, j_1) = (g_2, h_2)$	$(i'_1, j'_1) \times (g_1, h_1) = (g_2, h_2)$
$(g_1, h_1) \times (i_2, j_2) = (g_3, h_3)$	$(i'_2, j'_2) \times (g_1, h_1) = (g_3, h_3)$
$(g_1, h_1) \times (i_3, j_3) = (g_4, h_4)$	$(i'_3, j'_3) \times (g_1, h_1) = (g_4, h_4)$
...	...
...	...

- Deux ensembles de couples sont **homométriques à droite** et/ou **à gauche** s'ils ont le même ensemble d'intervalles à droite et/ou à gauche.

Le groupe diédral D_{12}

Définition

- Le groupe diédral D_{12} est formé de l'ensemble des symétries d'un polygône à 12 côtés :



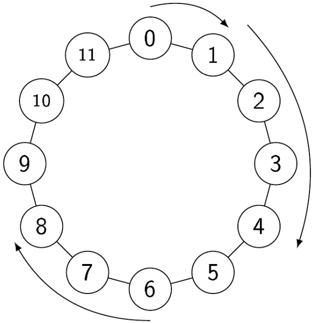
12 Rotations
$(p, 1)$ pour $p \in \mathbb{Z}_{12}$

12 Réflections
$(p, -1)$ pour $p \in \mathbb{Z}_{12}$

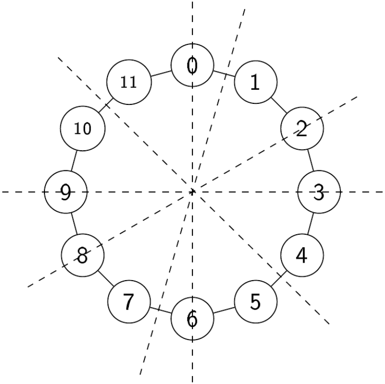
Le groupe diédral D_{12}

Définition

- Le groupe diédral D_{12} est formé de l'ensemble des symétries d'un polygône à 12 côtés :



12 Rotations
$(p, 1)$ pour $p \in \mathbb{Z}_{12}$



12 Réflections
$(p, -1)$ pour $p \in \mathbb{Z}_{12}$

- D_{12} est le produit semi-direct $\mathbb{Z}_{12} \rtimes \mathbb{Z}_2$, où $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$.

Le groupe diédral D_{12}

Interprétation musicale des **éléments**

- Un **accord** est un ensemble de notes jouées simultanément.

Le groupe diédral D_{12}

Interprétation musicale des **éléments**

- Un **accord** est un ensemble de notes jouées simultanément.
- On appelle **triade** un accord composé de trois notes.
  Nous étudierons deux types de triades:

Le groupe diédral D_{12}

Interprétation musicale des **éléments**

- Un **accord** est un ensemble de notes jouées simultanément.
- On appelle **triade** un accord composé de trois notes.
  Nous étudierons deux types de triades:
  - les **triades majeures** : contenant un intervalle de tierce majeure et de quinte;

Le groupe diédral D_{12}

Interprétation musicale des **éléments**

- Un **accord** est un ensemble de notes jouées simultanément.
- On appelle **triade** un accord composé de trois notes.
  Nous étudierons deux types de triades:
  - les **triades majeures** : contenant un intervalle de tierce majeure et de quinte;
  - les **triades mineures** : contenant un intervalle de tierce mineure et de quinte.

Le groupe diédral D_{12}

Interprétation musicale des **éléments**

- Un **accord** est un ensemble de notes jouées simultanément.
- On appelle **triade** un accord composé de trois notes.
  Nous étudierons deux types de triades:
  - les **triades majeures** : contenant un intervalle de tierce majeure et de quinte;
  - les **triades mineures** : contenant un intervalle de tierce mineure et de quinte.
- La **tonique** est la note sur laquelle se construit la triade.

Le groupe diédral D_{12}

Interprétation musicale des **éléments**

- Un **accord** est un ensemble de notes jouées simultanément.
- On appelle **triade** un accord composé de trois notes.
  Nous étudierons deux types de triades:
  - les **triades majeures** : contenant un intervalle de tierce majeure et de quinte;
  - les **triades mineures** : contenant un intervalle de tierce mineure et de quinte.
- La **tonique** est la note sur laquelle se construit la triade.
- Nous noterons $(\text{tonique}, 1)$ et $(\text{tonique}, -1)$ les triades majeures et mineures.
  Par exemple Do-majeur$= (0, 1)$ et Si-mineur$= (11, -1)$.

Le groupe diédral D_{12}

Interprétation musicale des **éléments**

- Un **accord** est un ensemble de notes jouées simultanément.
- On appelle **triade** un accord composé de trois notes.
  Nous étudierons deux types de triades:
  - les **triades majeures** : contenant un intervalle de tierce majeure et de quinte;
  - les **triades mineures** : contenant un intervalle de tierce mineure et de quinte.
- La **tonique** est la note sur laquelle se construit la triade.
- Nous noterons $(\text{tonique}, 1)$ et $(\text{tonique}, -1)$ les triades majeures et mineures.
  Par exemple Do-majeur$= (0, 1)$ et Si-mineur$= (11, -1)$.

$\longrightarrow$ L'ensemble des triades est en **bijection** avec D_{12}.

Le groupe diédral D_{12}

Interprétation musicale des **intervalles**

Le groupe diédral agit à droite et à gauche sur l'ensemble des triades de la manière suivante :

A gauche :	**A droite** :
$\mapsto$ par transposition $T_p = (p, 1)$: $(p, 1) \times (\text{tonique}, \pm 1) = (\textbf{tonique+p}, \pm 1)$	$\mapsto$ par parallélisme $P = (0, -1)$: $(\text{tonique}, \pm 1) \times (0, -1) = (\text{tonique}, - \pm 1)$
$\mapsto$ par inversion $I_q = (q, -1)$: $(q, -1) \times (\text{tonique}, \pm 1) = (\textbf{q-tonique}, - \pm 1)$	$\mapsto$ par E.T.G., $L = (4, -1)$: $(\text{tonique}, \pm 1) \times (4, -1) = (\textbf{tonique} \pm \mathbf{4}, - \pm 1)$
	$\mapsto$ par ton relatif $R = (9, -1)$: $(\text{tonique}, \pm 1) \times (9, -1) = (\textbf{tonique} \pm \mathbf{9}, - \pm 1)$
groupe T/I $= \langle T_1, I_0 \mid T_1^{12} = I_0^2 = 1, I_0 T_1 I_0 = T_1^{-1} \rangle$	groupe PLR $= \langle s, t \mid s = t = 1, tst = t^{-1} \rangle, \ s = LR, t = L$

Le groupe diédral D_{12}

Résumé

- Dans D_{12}, nous interprétons les ensembles comme des enchaînements de triades majeures et mineures.

Le groupe diédral D_{12}

Résumé

- Dans D_{12}, nous interprétons les ensembles comme des enchaînements de triades majeures et mineures.
- Un intervalle à gauche entre deux triades est une opération dans le groupe T/I ($\approx D_{12}$), un intervalle à droite entre deux triades est une opération dans le groupe PLR ($\approx D_{12}$).

Le groupe diédral D_{12}

Résumé

- Dans D_{12}, nous interprétons les ensembles comme des enchaînements de triades majeures et mineures.
- Un intervalle à gauche entre deux triades est une opération dans le groupe T/I ($\approx D_{12}$), un intervalle à droite entre deux triades est une opération dans le groupe PLR ($\approx D_{12}$).
- Deux enchaînements de triades sont **homométriques** à droite ou à gauche s'ils possèdent le même ensemble d'intervalles à droite ou à gauche.

Le groupe diédral

Un exemple

$$\begin{tikzcd}
do \arrow[rr, "I_8"] \arrow[dr, "I_{10}"] & & RE^\flat \arrow[dl, "T_2"'] \arrow[dd, "I_4"] \\
& MI^\flat \arrow[dl, "I_2"] \arrow[dr, "I_6"'] & \\
mi \arrow[uu, "T_8"] & & la^\flat \arrow[ll, "T_8"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
do \arrow[rr, "I_{10}"] \arrow[dr, "T_4"] & & MI^\flat \arrow[dl, "I_2"'] \arrow[dd, "I_6"] \\
& mi \arrow[dl, "I_4"] \arrow[dr, "T_4"'] & \\
FA \arrow[uu, "I_0"] & & la^\flat \arrow[ll, "I_8"]
\end{tikzcd}$$

dans le groupe T/I.

$$\begin{tikzcd}
do \arrow[rr, "LRL"] \arrow[dr, "R"] & & RE^\flat \arrow[dl, "PRLR"'] \arrow[dd, "PRL"] \\
& MI^\flat \arrow[dl, "LPR"] \arrow[dr, "RLP"'] & \\
mi \arrow[uu, "PL"] & & la^\flat \arrow[ll, "PL"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
do \arrow[rr, "R"] \arrow[dr, "LP"] & & MI^\flat \arrow[dl, "LPR"'] \arrow[dd, "RLP"] \\
& mi \arrow[dl, "LRL"] \arrow[dr, "LP"'] & \\
FA \arrow[uu, "PRL"] & & la^\flat \arrow[ll, "PRP"]
\end{tikzcd}$$

dans le groupe PLR.

Les ensembles $\langle do, RE^\flat, MI^\flat, mi, la^\flat \rangle$ et $\langle do, MI^\flat, mi, FA, la^\flat \rangle$ sont homométriques à droite et à gauche.

Le groupe diédral D_{12}

Notations

- '$\mathbf{A}$' représente un ensemble de triades ($\mathbf{A} \subset D_{12}$).
  'A' représente un ensemble de notes ($A \subset \mathbb{Z}_{12}$).

Le groupe diédral D_{12}

Notations

- '**A**' représente un ensemble de triades ($\mathbf{A} \subset D_{12}$).
  'A' représente un ensemble de notes ($A \subset \mathbb{Z}_{12}$).

- Si **A** est un ensemble de triades, A représentera l'ensemble des toniques des triades de **A**.

Le groupe diédral D_{12}

Notations

- '$\mathbf{A}$' représente un ensemble de triades ($\mathbf{A} \subset D_{12}$).
  'A' représente un ensemble de notes ($A \subset \mathbb{Z}_{12}$).

- Si $\mathbf{A}$ est un ensemble de triades, A représentera l'ensemble des toniques des triades de $\mathbf{A}$.

  Exemple : Si $\mathbf{A} = \langle do, SOL \rangle = \langle (0, -1), (7, 1) \rangle$, $A = \{0, 7\}$.

Le groupe diédral D_{12}

Notations

- '$\mathbf{A}$' représente un ensemble de triades ($\mathbf{A} \subset D_{12}$).
  'A' représente un ensemble de notes ($A \subset \mathbb{Z}_{12}$).
- Si $\mathbf{A}$ est un ensemble de triades, A représentera l'ensemble des toniques des triades de $\mathbf{A}$.

  Exemple : Si $\mathbf{A} = \langle do, SOL \rangle = \langle (0, -1), (7, 1) \rangle$, $A = \{0, 7\}$.
- A est divisé en deux sous-ensembles : A_+ qui contient les toniques associées aux accords majeurs et A_- qui contient les toniques associées aux accords mineurs.

Le groupe diédral D_{12}

Notations

- '**A**' représente un ensemble de triades ($\mathbf{A} \subset D_{12}$).
  'A' représente un ensemble de notes ($A \subset \mathbb{Z}_{12}$).

- Si **A** est un ensemble de triades, A représentera l'ensemble des toniques des triades de **A**.

  Exemple : Si $\mathbf{A} = \langle do, SOL \rangle = \langle (0, -1), (7, 1) \rangle$, $A = \{0, 7\}$.

- A est divisé en deux sous-ensembles : A_+ qui contient les toniques associées aux accords majeurs et A_- qui contient les toniques associées aux accords mineurs.

  Exemple : Si $\mathbf{A} = \langle do, SOL \rangle$, $A_+ = \{7\}$ et $A_- = \{0\}$.

L'homométrie dans D_{12}

$\mathbf{iv}(A)(t) = \mathbb{I}_{-A} \star \mathbb{I}_A(t), t \in \mathbb{Z}_{12}$
$\mathbf{ifunc}(A, B)(t) = \mathbb{I}_{-A} \star \mathbb{I}_B(t)$

Théorème

Deux ensembles **A** et **B** dans D_{12} sont homométriques pour l'action à droite si et seulement si les deux equations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \mathbf{iv}(A_+) + \mathbf{iv}(A_-) = \mathbf{iv}(B_+) + \mathbf{iv}(B_-) \\ \mathbf{ifunc}(A_+, A_-) = \mathbf{ifunc}(B_+, B_-). \end{cases}$$

Deux ensembles **A** et **B** dans D_{12} sont homométriques pour l'action à gauche si et seulement si les deux equations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \mathbf{iv}(A_+) + \mathbf{iv}(A_-) = \mathbf{iv}(B_+) + \mathbf{iv}(B_-) \\ \mathbf{ifunc}(I_0 A_+, A_-) = \mathbf{ifunc}(I_0 B_+, B_-). \end{cases}$$

L'homométrie dans D_{12}[1]

Propriété de l'homométrie à droite

Proposition

Si **A** and **B** sont homométriques à droite dans D_{12}, alors A et B sont homométriques dans $\mathbb{Z}_{12}$.

[1] Genuys, G.:"Homometry in the Dihedral Groups: Lifting Sets from Zn to Dn", (à paraitre) Mathematic and Computation in Music, Sixth International Conference (2017)

L'homométrie dans D_{12}[1]

Propriété de l'homométrie à droite

Proposition

Si **A** and **B** sont homométriques à droite dans D_{12}, alors A et B sont homométriques dans $\mathbb{Z}_{12}$.

Exemple

Les ensembles $\langle do, RE^\flat, MI^\flat, mi, la^\flat \rangle$ et $\langle do, MI^\flat, mi, FA, la^\flat \rangle$ sont homométriques à droite dans D_{12}

$\Longrightarrow$ Les mélodies $\{Do, Ré^\flat, Mi^\flat, Mi, La^\flat\}$ et $\{Do, Mi^\flat, Mi, Fa, La^\flat\}$ sont homométriques dans $\mathbb{Z}_{12}$.

[1] Genuys, G.:"Homometry in the Dihedral Groups: Lifting Sets from Zn to Dn", (à paraitre) Mathematic and Computation in Music, Sixth International Conference (2017)

L'homométrie dans D_{12}[1]

Propriété de l'homométrie à droite

Proposition

Si **A** and **B** sont homométriques à droite dans D_{12}, alors A et B sont homométriques dans $\mathbb{Z}_{12}$.

Exemple

Les ensembles $\langle do, RE^\flat, MI^\flat, mi, la^\flat \rangle$ et $\langle do, MI^\flat, mi, FA, la^\flat \rangle$ sont homométriques à droite dans D_{12}

$\Longrightarrow$ Les mélodies $\{Do, Ré^\flat, Mi^\flat, Mi, La^\flat\}$ et $\{Do, Mi^\flat, Mi, Fa, La^\flat\}$ sont homométriques dans $\mathbb{Z}_{12}$.

- Inversement, est-il possible de construire des ensembles de triades homométriques à partir de mélodies homométriques?

[1] Genuys, G.:"Homometry in the Dihedral Groups: Lifting Sets from Zn to Dn", (à paraitre) Mathematic and Computation in Music, Sixth International Conference (2017)

L'homométrie dans D_{12}

Le concept de lift

- Un **lift** est une application $l : \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12}) \longrightarrow \mathcal{P}(D_{12})$ telle que $\pi \circ l = id$, où π est la projection $D_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$ sur la première composante.

D_{12}
(triades - harmonie)

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\mathbb{Z}_{12}$
(notes - mélodies)

L'homométrie dans D_{12}

Le concept de lift

- Un **lift** est une application $l : \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12}) \longrightarrow \mathcal{P}(D_{12})$ telle que $\pi \circ l = id$, où π est la projection $D_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$ sur la première composante.

D_{12} $\quad$ $DO = (0, 1)$

(triades - harmonie)

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\mathbb{Z}_{12}$

(notes - mélodies)

- Un **lift** est une application $l : \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12}) \longrightarrow \mathcal{P}(D_{12})$ telle que $\pi \circ l = id$, où π est la projection $D_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$ sur la première composante.

D_{12}

(triades - harmonie)

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\mathbb{Z}_{12}$

(notes - mélodies)

$$\begin{tikzcd} DO = (0,1) \arrow[dr, "\pi"'] & \\ & Do = 0 \end{tikzcd}$$

L'homométrie dans D_{12}

Le concept de lift

- Un **lift** est une application $l : \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12}) \longrightarrow \mathcal{P}(D_{12})$ telle que $\pi \circ l = id$, où π est la projection $D_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$ sur la première composante.

D_{12}
(triades - harmonie)

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\mathbb{Z}_{12}$
(notes - mélodies)

$$\begin{tikzcd}
DO = (0,1) \arrow[dr, "\pi"'] & & \begin{array}{c} DO = (0,1) \\ \text{ou } do = (0,-1) \end{array} \\
& Do = 0 \arrow[ur, "l"'] &
\end{tikzcd}$$

L'homométrie dans D_{12}

Le concept de lift

- Un **lift** est une application $l : \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12}) \longrightarrow \mathcal{P}(D_{12})$ telle que $\pi \circ l = id$, où π est la projection $D_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$ sur la première composante.

D_{12}
(triades - harmonie)

$\mathbb{Z}_{12}$
(notes - mélodies)

$$
\begin{tikzcd}
DO = (0,1) \arrow[dr, "\pi"] & & DO = (0,1) \text{ ou } do = (0,-1) \\
& Do = 0 \arrow[ur, "l"'] &
\end{tikzcd}
$$

- Peut-on lifter deux mélodies homométriques en deux ensembles de triades homométriques?

L'homométrie dans D_{12}

Résultat

Théorème

Soient A et B deux ensembles homométriques dans $\mathbb{Z}_{12}$ tels que :

$$\begin{cases} A = A_1 \cup A_2 \\ B = B_1 \cup B_2, \end{cases}$$

avec $\mathbf{iv}(A_1) = \mathbf{iv}(B_1)$ et $\mathbf{iv}(A_2) = \mathbf{iv}(B_2)$. On peut toujours lifter A et B en deux ensembles homométriques à droite dans D_{12}.

L'homométrie dans D_{12}

Résultat

Théorème

Soient A et B deux ensembles homométriques dans $\mathbb{Z}_{12}$ tels que :

$$\begin{cases} A = A_1 \cup A_2 \\ B = B_1 \cup B_2, \end{cases}$$

avec $\mathbf{iv}(A_1) = \mathbf{iv}(B_1)$ et $\mathbf{iv}(A_2) = \mathbf{iv}(B_2)$. On peut toujours lifter A et B en deux ensembles homométriques à droite dans D_{12}.

Exemple

$$A = \{0, 1, 4, 6\} = \underbrace{\{0, 6\}}_{A_1} \cup \underbrace{\{1, 4\}}_{A_2}$$

$$B = \{0, 1, 3, 7\} = \underbrace{\{1, 7\}}_{B_1} \cup \underbrace{\{0, 3\}}_{B_2}$$

L'homométrie dans D_{12}

Résultat

Théorème

Soient A et B deux ensembles homométriques dans $\mathbb{Z}_{12}$ tels que :

$$\begin{cases} A = A_1 \cup A_2 \\ B = B_1 \cup B_2, \end{cases}$$

avec $\mathbf{iv}(A_1) = \mathbf{iv}(B_1)$ et $\mathbf{iv}(A_2) = \mathbf{iv}(B_2)$. On peut toujours lifter A et B en deux ensembles homométriques à droite dans D_{12}.

Exemple

$$\begin{array}{l|l} A = \{0,1,4,6\} = \underbrace{\{0,6\}}_{A_1} \cup \underbrace{\{1,4\}}_{A_2} & \mathbf{A} = \langle (0,1),(1,-1),(4,-1),(6,1) \rangle \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \longrightarrow & I \\ B = \{0,1,3,7\} = \underbrace{\{1,7\}}_{B_1} \cup \underbrace{\{0,3\}}_{B_2} & \mathbf{B} = \langle (0,1),(1,-1),(3,1),(7,-1) \rangle \end{array}$$

L'homométrie dans D_{12}

Résultat

Théorème

Soient A et B deux ensembles homométriques dans $\mathbb{Z}_{12}$ tels que :

$$\begin{cases} A = A_1 \cup A_2 \\ B = B_1 \cup B_2, \end{cases}$$

avec $\mathbf{iv}(A_1) = \mathbf{iv}(B_1)$ et $\mathbf{iv}(A_2) = \mathbf{iv}(B_2)$. On peut toujours lifter A et B en deux ensembles homométriques à droite dans D_{12}.

Exemple

$$\left.\begin{array}{l} A = \{0,1,4,6\} = \underbrace{\{0,6\}}_{A_1} \cup \underbrace{\{1,4\}}_{A_2} \\[1em] B = \{0,1,3,7\} = \underbrace{\{1,7\}}_{B_1} \cup \underbrace{\{0,3\}}_{B_2} \end{array}\right| \xrightarrow{\quad} I \quad \begin{array}{l} \mathbf{A} = \langle (0,1),(1,-1),(4,-1),(6,1) \rangle \\[1em] \mathbf{B} = \langle (0,1),(1,-1),(3,1),(7,-1) \rangle \end{array}$$

Soit $\mathbf{A} = \langle DO, ré^\flat, mi, SOL^\flat \rangle$ et $\mathbf{B} = \langle DO, ré^\flat, MI^\flat, sol \rangle$.

L'homométrie dans D_{12}

Extensions-Corrolaire

- Nous pouvons généraliser la même procédure **pour tout entier naturel** n autre que 12.

L'homométrie dans D_{12}

Extensions-Corrolaire

- Nous pouvons généraliser la même procédure **pour tout entier naturel** n autre que 12.
- Toutes les mélodies homométriques dans $\mathbb{Z}_{12}$ peuvent être liftées à droite dans D_{12}.

L'homométrie dans D_{12}

Extensions-Corrolaire

- Nous pouvons généraliser la même procédure **pour tout entier naturel** n autre que 12.
- Toutes les mélodies homométriques dans $\mathbb{Z}_{12}$ peuvent être liftées à droite dans D_{12}.
- Nous pouvons généraliser l'homométrie sur les triades à un grand nombre d'autres types d'accords (de septième, non catalogués, etc.).

L'homométrie dans D_{12}

Extensions-Corrolaire

- Nous pouvons généraliser la même procédure **pour tout entier naturel** n autre que 12.
- Toutes les mélodies homométriques dans $\mathbb{Z}_{12}$ peuvent être liftées à droite dans D_{12}.
- Nous pouvons généraliser l'homométrie sur les triades à un grand nombre d'autres types d'accords (de septième, non catalogués, etc.).
- Nous pouvons généraliser la procédure (et certains résultats) utilisée avec le groupe diédral pour étudier l'homométrie **dans tout produit semi-direct**.

L'homométrie dans D_{12}

Extensions-Corrolaire

- Nous pouvons généraliser la même procédure **pour tout entier naturel** n autre que 12.
- Toutes les mélodies homométriques dans $\mathbb{Z}_{12}$ peuvent être liftées à droite dans D_{12}.
- Nous pouvons généraliser l'homométrie sur les triades à un grand nombre d'autres types d'accords (de septième, non catalogués, etc.).
- Nous pouvons généraliser la procédure (et certains résultats) utilisée avec le groupe diédral pour étudier l'homométrie **dans tout produit semi-direct**.
- Le groupe des instants et durées $(\mathbb{R}, +) \rtimes (\mathbb{R}^*_+, \times)$ introduit par Lewin $\longrightarrow$ rythmes homométriques.

Faire de la musique homométrique?

Matériaux

Faire de la musique homométrique?

Matériaux

- Deux rythmes homométriques :
  - Rythme 1 (R1) :

  - Rythme 2 (R2) :

Faire de la musique homométrique?

Matériaux

- Deux rythmes homométriques :
  - Rythme 1 (R1) :

  - Rythme 2 (R2) :

- Deux mélodies homométriques :
  $M1 = \{Do, Ré^\flat, Mi^\flat, Mi, La^\flat\}$ et $M2 = \{Do, Mi^\flat, Mi, Fa, La^\flat\}$.

Faire de la musique homométrique?

Matériaux

- Deux rythmes homométriques :
  - Rythme 1 (R1) :

  - Rythme 2 (R2) :

- Deux mélodies homométriques :
  $M1 = \{Do, Ré^\flat, Mi^\flat, Mi, La^\flat\}$ et $M2 = \{Do, Mi^\flat, Mi, Fa, La^\flat\}$.

- Deux enchaînements d'accords homométriques :

Faire de la musique homométrique?

Matériaux

- Deux rythmes homométriques :
  - Rythme 1 (R1) :

  - Rythme 2 (R2) :

- Deux mélodies homométriques :
  $M1 = \{Do, Ré^\flat, Mi^\flat, Mi, La^\flat\}$ et $M2 = \{Do, Mi^\flat, Mi, Fa, La^\flat\}$.

- Deux enchaînements d'accords homométriques :
  - Avec les triades :
    $T1 = \langle do, RE^\flat, MI^\flat, mi, la^\flat \rangle$ et $T2 = \langle do, MI^\flat, mi, FA, la^\flat \rangle$.

Faire de la musique homométrique?

Matériaux

- Deux rythmes homométriques :
  - Rythme 1 (R1) :

  - Rythme 2 (R2) :

- Deux mélodies homométriques :
  $M1 = \{Do, Ré^{\flat}, Mi^{\flat}, Mi, La^{\flat}\}$ et $M2 = \{Do, Mi^{\flat}, Mi, Fa, La^{\flat}\}$.

- Deux enchaînements d'accords homométriques :
  - Avec les triades :
    $T1 = \langle do, RE^{\flat}, MI^{\flat}, mi, la^{\flat}\rangle$ et $T2 = \langle do, MI^{\flat}, mi, FA, la^{\flat}\rangle$.
  - Accords A1 et A2 ($2^{de} m - 3^{ce} M$) avec mêmes toniques.

Une musique homométrique

Structure

Temps

<table>
<tr><td>Groove</td><td colspan="2">Groupes A1 & A2 + M1 & M2 à la voix</td><td colspan="2">Exposé du thème à partir de M1 & M2 + A1 & A2</td><td colspan="3">Break : arpèges de T1 & T2</td></tr>
<tr><td>3R1+R2</td><td>A1/M1</td><td>A2/M2</td><td>M1/A2</td><td>M2/A1</td><td>T1</td><td>T2</td><td>T1/T2</td></tr>
</table>

2 grooves 1 groove 1 groove 1 groove

Des distances entre accords de musique

Introduction

- L'idée est d'avoir un moyen concret d'évaluer si deux accords sont près ou loin l'un de l'autre, s'ils se ressemblent ou non.

Introduction

- L'idée est d'avoir un moyen concret d'évaluer si deux accords sont près ou loin l'un de l'autre, s'ils se ressemblent ou non.
- On représente un accord par une suite de nombre entre 0 et 11, en identifiant tous les renversements (permutations) $\Longrightarrow$ **l'ordre des notes dans l'accord n'importe pas**.

Introduction

- L'idée est d'avoir un moyen concret d'évaluer si deux accords sont près ou loin l'un de l'autre, s'ils se ressemblent ou non.

- On représente un accord par une suite de nombre entre 0 et 11, en identifiant tous les renversements (permutations) $\Longrightarrow$ **l'ordre des notes dans l'accord n'importe pas**.

- *Exemple* : L'accord $Sol^7 = \{Sol, Si, \text{Ré}, Fa\} = \{7, 11, 2, 5\} = \{11, 2, 5, 7\} = ...$

Introduction

- L'idée est d'avoir un moyen concret d'évaluer si deux accords sont près ou loin l'un de l'autre, s'ils se ressemblent ou non.

- On représente un accord par une suite de nombre entre 0 et 11, en identifiant tous les renversements (permutations) $\Longrightarrow$ **l'ordre des notes dans l'accord n'importe pas**.

- *Exemple* : L'accord
$Sol^7 = \{Sol, Si, Ré, Fa\} = \{7, 11, 2, 5\} = \{11, 2, 5, 7\} = ...$

- Une distance d_X sur un espace métrique X vérifie, pour x, y, et z dans X, les propriétés suivantes :

$d_X(x,y) \geq 0$	positivité
$d_X(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$	identité des indiscernables
$d_X(x,y) = d_X(y,x)$	symétrie
$d_X(x,z) = d_X(x,y) + d_X(y,z)$	inégalité triangulaire

Les espaces d'accords à n notes

- Pour une cardinalité fixée n (nombre de notes par accord) tous les accords peuvent être représentés dans un espace $\mathcal{A}_n$.

Les espaces d'accords à n notes

- Pour une cardinalité fixée n (nombre de notes par accord) tous les accords peuvent être représentés dans un espace $\mathcal{A}_n$.
  Exemple : $\mathcal{A}_3$ représente l'ensemble des accords à 3 notes.

Les espaces d'accords à n notes

- Pour une cardinalité fixée n (nombre de notes par accord) tous les accords peuvent être représentés dans un espace $\mathcal{A}_n$.
  Exemple : $\mathcal{A}_3$ représente l'ensemble des accords à 3 notes.
- Chaque $\mathcal{A}_n$ est muni d'une distance naturelle $d_{\mathcal{A}_n}$ qui mesure la taille de la conduite de voix minimale entre deux accords.

Les espaces d'accords à n notes

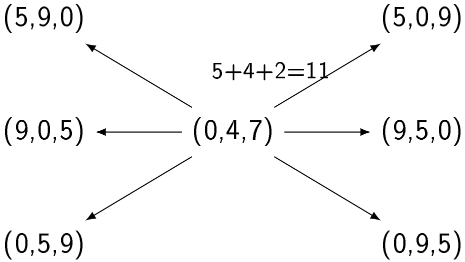
- Pour une cardinalité fixée n (nombre de notes par accord) tous les accords peuvent être représentés dans un espace $\mathcal{A}_n$.
  Exemple : $\mathcal{A}_3$ représente l'ensemble des accords à 3 notes.
- Chaque $\mathcal{A}_n$ est muni d'une distance naturelle $d_{\mathcal{A}_n}$ qui mesure la taille de la conduite de voix minimale entre deux accords.

- *Exemple* : Entre DO$= \{Do, Mi, Sol\} = \{0, 4, 7\}$ et FA$= \{Fa, La, Do\} = \{5, 9, 0\}$ dans $\mathcal{A}_3$:

$$\begin{tikzcd}
(5,9,0) & & (5,0,9) \\
(9,0,5) & (0,4,7) \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dr] & (9,5,0) \\
(0,5,9) & & (0,9,5)
\end{tikzcd}$$

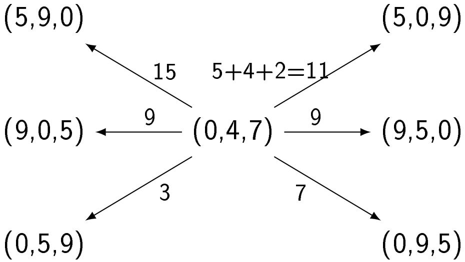
Les espaces d'accords à n notes

- Pour une cardinalité fixée n (nombre de notes par accord) tous les accords peuvent être représentés dans un espace $\mathcal{A}_n$.
  Exemple : $\mathcal{A}_3$ représente l'ensemble des accords à 3 notes.
- Chaque $\mathcal{A}_n$ est muni d'une distance naturelle $d_{\mathcal{A}_n}$ qui mesure la taille de la conduite de voix minimale entre deux accords.
- *Exemple* : Entre DO$= \{Do, Mi, Sol\} = \{0, 4, 7\}$ et FA$= \{Fa, La, Do\} = \{5, 9, 0\}$ dans $\mathcal{A}_3$:



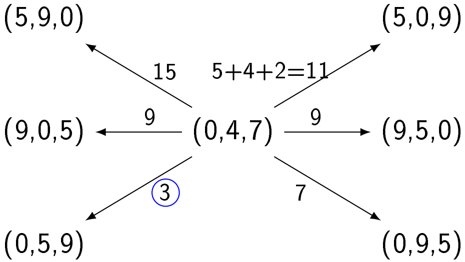
Les espaces d'accords à n notes

- Pour une cardinalité fixée n (nombre de notes par accord) tous les accords peuvent être représentés dans un espace $\mathcal{A}_n$.
  Exemple : $\mathcal{A}_3$ représente l'ensemble des accords à 3 notes.
- Chaque $\mathcal{A}_n$ est muni d'une distance naturelle $d_{\mathcal{A}_n}$ qui mesure la taille de la conduite de voix minimale entre deux accords.
- *Exemple* : Entre DO$= \{Do, Mi, Sol\} = \{0, 4, 7\}$ et FA$= \{Fa, La, Do\} = \{5, 9, 0\}$ dans $\mathcal{A}_3$:



Les espaces d'accords à n notes

- Pour une cardinalité fixée n (nombre de notes par accord) tous les accords peuvent être représentés dans un espace $\mathcal{A}_n$.
  Exemple : $\mathcal{A}_3$ représente l'ensemble des accords à 3 notes.
- Chaque $\mathcal{A}_n$ est muni d'une distance naturelle $d_{\mathcal{A}_n}$ qui mesure la taille de la conduite de voix minimale entre deux accords.
- *Exemple* : Entre DO$= \{Do, Mi, Sol\} = \{0, 4, 7\}$ et FA$= \{Fa, La, Do\} = \{5, 9, 0\}$ dans $\mathcal{A}_3$:



Questions [2]

- Peut-on définir une distance entre des accords n'ayant pas le même nombre de notes à partir de $d_{\mathcal{A}_n}$?

[2] Genuys, G.: "Measures of Distance between Chords of Different Cardinalities on Generalized Voice-Leading Spaces" (en cours de soumission), Journal of Mathematics and Music, (numéro spécial: Topological Models in Music)

Questions [2]

- Peut-on définir une distance entre des accords n'ayant pas le même nombre de notes à partir de $d_{\mathcal{A}_n}$?
- En appelant $\mathcal{A} = \cup_n \mathcal{A}_n$, existe-t-il une distance d sur $\mathcal{A}$ telle que :

  (i) $d_{|\mathcal{A}_n} = d_{\mathcal{A}_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

  (ii) $0 < d(U, V) < +\infty$ pour tout $(U, V) \in \mathcal{A}^2$;

  (iii) d vérifie les axiomes d'une distance;

  (iv) La topologie associée à d est celle de l'union $\sqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$:

  une boule ouverte dans $(\mathcal{A}, d)$ est l'union de boules ouvertes dans les $\mathcal{A}_n$ pour $n \in \mathbb{N}$?

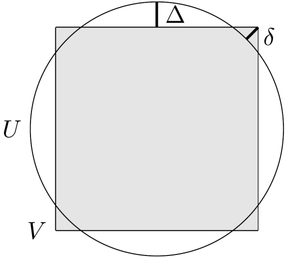
[2] Genuys, G.: "Measures of Distance between Chords of Different Cardinalities on Generalized Voice-Leading Spaces" (en cours de soumission), Journal of Mathematics and Music, (numéro spécial: Topological Models in Music)

La distance de Hausdorff

- Pour deux ensembles U et V :

$$d_H(U,V) = \max\{\sup_{u\in U}\inf_{v\in V} d(u,v), \sup_{v\in V}\inf_{u\in U} d(u,v)\}.$$

- *Exemple* :



$$d_H(U,V) = \max\{\Delta,\delta\} = \Delta$$

Deux mesures de distances

- La mesure de distance ω qui projette dans l'espace de l'accord ayant le moins de notes (qui s'obtient comme une distance de Hausdorff).

Deux mesures de distances

- La mesure de distance ω qui projette dans l'espace de l'accord ayant le moins de notes (qui s'obtient comme une distance de Hausdorff).
- La mesure de distance ν qui plonge dans l'espace de l'accord ayant le plus de notes.

Deux mesures de distances

- La mesure de distance ω qui projette dans l'espace de l'accord ayant le moins de notes (qui s'obtient comme une distance de Hausdorff).
- La mesure de distance ν qui plonge dans l'espace de l'accord ayant le plus de notes.
- *Exemple* : Entre DO$= \{0, 4, 7\}$ et $Sol^7 = \{7, 11, 2, 5\}$

ω	ν

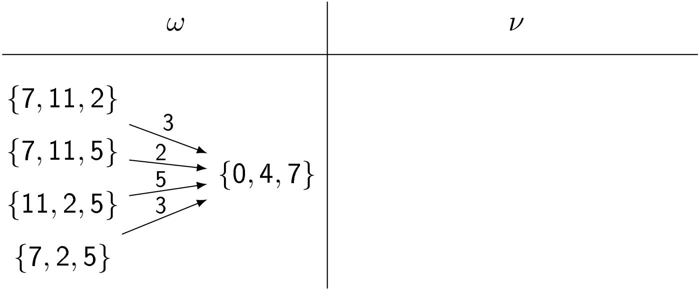
Deux mesures de distances

- La mesure de distance ω qui projette dans l'espace de l'accord ayant le moins de notes (qui s'obtient comme une distance de Hausdorff).
- La mesure de distance ν qui plonge dans l'espace de l'accord ayant le plus de notes.
- *Exemple* : Entre DO$= \{0, 4, 7\}$ et $Sol^7 = \{7, 11, 2, 5\}$

ω	ν
$\{7, 11, 2\}$	
$\{7, 11, 5\}$	
$\{11, 2, 5\}$	
$\{7, 2, 5\}$	

Deux mesures de distances

- La mesure de distance ω qui projette dans l'espace de l'accord ayant le moins de notes (qui s'obtient comme une distance de Hausdorff).
- La mesure de distance ν qui plonge dans l'espace de l'accord ayant le plus de notes.
- *Exemple* : Entre DO$= \{0,4,7\}$ et $Sol^7 = \{7,11,2,5\}$



Deux mesures de distances

- La mesure de distance ω qui projette dans l'espace de l'accord ayant le moins de notes (qui s'obtient comme une distance de Hausdorff).
- La mesure de distance ν qui plonge dans l'espace de l'accord ayant le plus de notes.
- *Exemple* : Entre DO$= \{0, 4, 7\}$ et $Sol^7 = \{7, 11, 2, 5\}$

ω	ν

$$\begin{tikzcd}
\{7,11,2\} \arrow[dr, "3"] & \\
\{7,11,5\} \arrow[r, "2"] & \{0,4,7\} \\
\{11,2,5\} \arrow[ur, "5"] & \\
\{7,2,5\} \arrow[uur, "3"'] & \text{max}
\end{tikzcd}$$

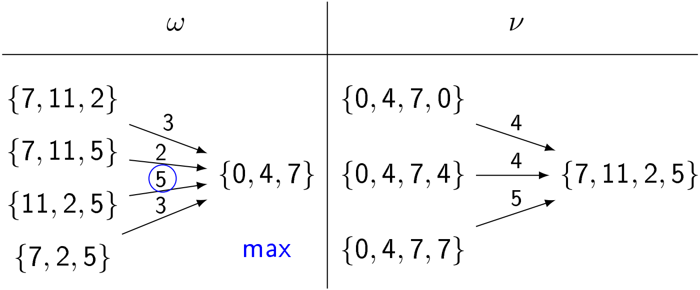
Deux mesures de distances

- La mesure de distance ω qui projette dans l'espace de l'accord ayant le moins de notes (qui s'obtient comme une distance de Hausdorff).
- La mesure de distance ν qui plonge dans l'espace de l'accord ayant le plus de notes.
- *Exemple* : Entre DO$= \{0, 4, 7\}$ et $Sol^7 = \{7, 11, 2, 5\}$

ω			ν
$\{7, 11, 2\}$	3		$\{0, 4, 7, 0\}$
$\{7, 11, 5\}$	2	$\{0, 4, 7\}$	$\{0, 4, 7, 4\}$
$\{11, 2, 5\}$	5		
$\{7, 2, 5\}$	3	max	$\{0, 4, 7, 7\}$

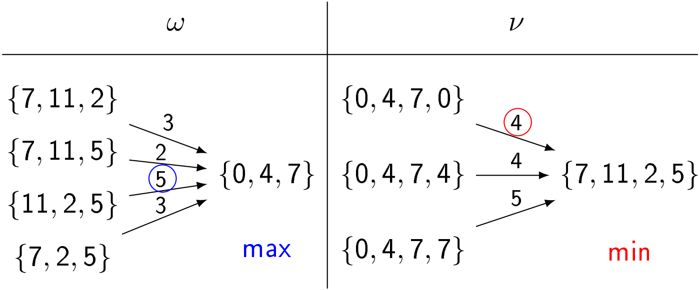
Deux mesures de distances

- La mesure de distance ω qui projette dans l'espace de l'accord ayant le moins de notes (qui s'obtient comme une distance de Hausdorff).
- La mesure de distance ν qui plonge dans l'espace de l'accord ayant le plus de notes.
- *Exemple* : Entre DO$= \{0, 4, 7\}$ et $Sol^7 = \{7, 11, 2, 5\}$



Deux mesures de distances

- La mesure de distance ω qui projette dans l'espace de l'accord ayant le moins de notes (qui s'obtient comme une distance de Hausdorff).
- La mesure de distance ν qui plonge dans l'espace de l'accord ayant le plus de notes.
- *Exemple* : Entre DO$= \{0,4,7\}$ et $Sol^7 = \{7,11,2,5\}$



Deux mesures de distances

- Les mesures ω et ν ne vérifient pas tous les axiomes de la distance, notamment l'inégalité triangulaire.

Deux mesures de distances

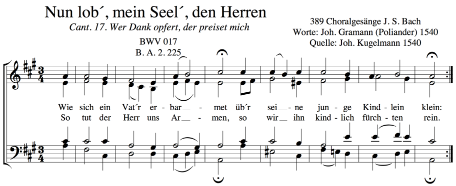
- Les mesures ω et ν ne vérifient pas tous les axiomes de la distance, notamment l'inégalité triangulaire.
- Elles possèdent cependant de bonnes propriétés topologiques.

Deux mesures de distances

- Les mesures ω et ν ne vérifient pas tous les axiomes de la distance, notamment l'inégalité triangulaire.
- Elles possèdent cependant de bonnes propriétés topologiques.
- Quelles applications musicales?

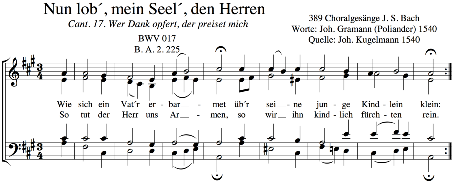
Applications Musicales

Graphes de distances pour ω modifiée



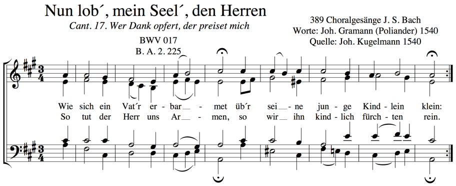
Applications Musicales

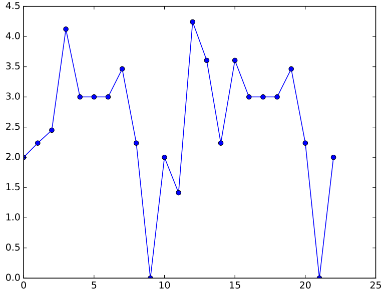
Graphes de distances pour ω modifiée



Applications Musicales

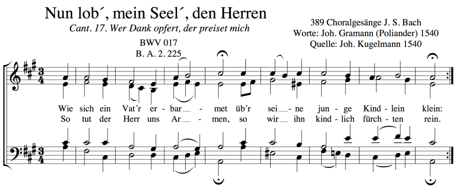
Graphes de distances pour ω modifiée

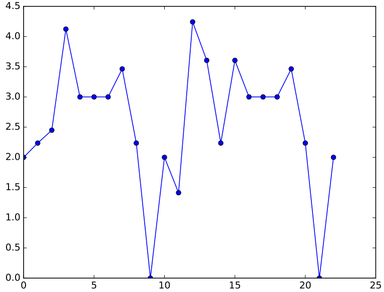


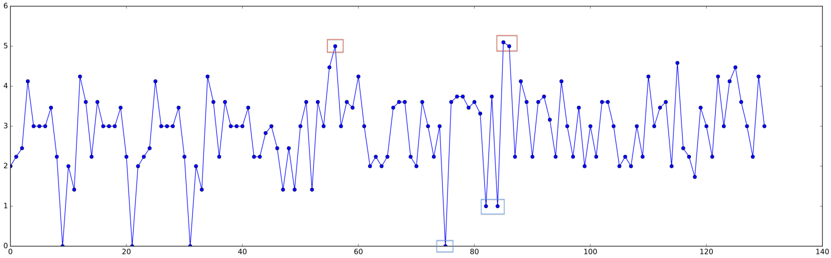


Applications Musicales

Graphes de distances pour ω modifiée

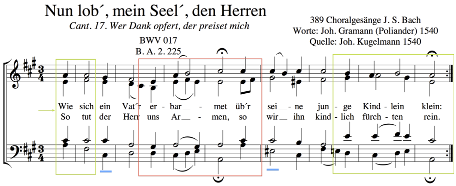


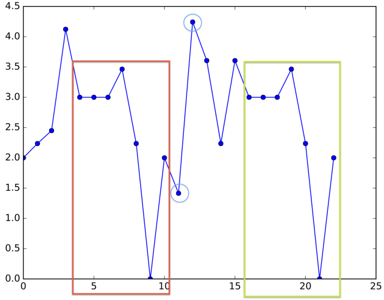


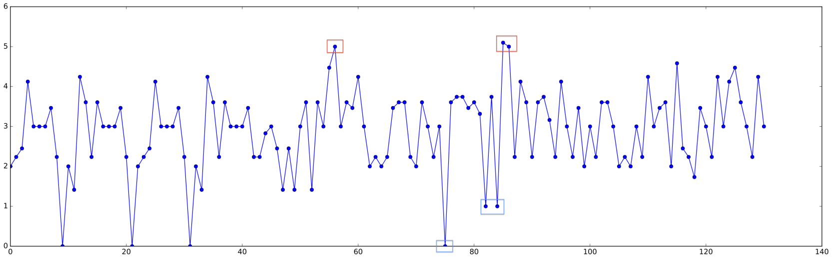


Applications Musicales

Graphes de distances pour ω modifiée







Conclusion - Perspectives

Conclusion - Perspectives

Homométrie non-commutative

- Etudier l'homométrie à gauche dans le groupe diédral.

Conclusion - Perspectives

Homométrie non-commutative

- Etudier l'homométrie à gauche dans le groupe diédral.
- Développer l'étude générale sur les produits semi-directs.

Conclusion - Perspectives

Homométrie non-commutative

- Etudier l'homométrie à gauche dans le groupe diédral.
- Développer l'étude générale sur les produits semi-directs.

Distances entre accords

- Résoudre le problème mathématique de la distance.

Conclusion - Perspectives

Homométrie non-commutative

- Etudier l'homométrie à gauche dans le groupe diédral.
- Développer l'étude générale sur les produits semi-directs.

Distances entre accords

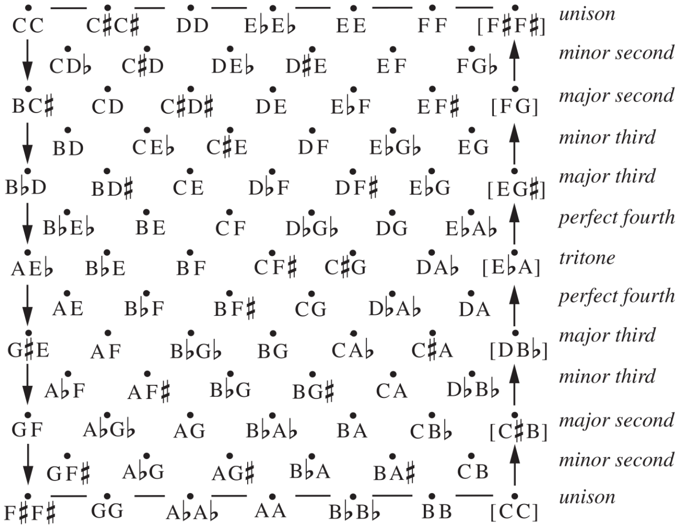
- Résoudre le problème mathématique de la distance.
- Tester les distances sur différents styles musicaux.

Merci de votre attention!

Cardinality	D_n	Homometric sets for the right/left action	Simultaneous right and left-homometric sets
$p=4$	$n=8$	2 pairs	0 pair
	$n=12$	3 pairs	0 pair
	$n=16$	4 pairs	0 pair
$p=5$	$n=8$	12 pairs	1 pair
	$n=10$	20 pairs	2 pairs
	$n=12$	8 pairs/2 triples	2 pairs
	$n=14$	21 pairs	0 pair
	$n=15$	15 pairs	3 pairs
	$n=16$	40 pairs	2 pairs
	$n=18$	30 pairs/3 triples	3 pairs
$p=6$	$n=8$	30 pairs/3 quadruples	9 pairs/1 quadruple
	$n=9$	54 pairs/3 triples	0 pair/1 triple
	$n=10$	70 pairs	4 pairs
	$n=12$	358 pairs	53 pairs
	$n=14$	252 pairs	14 pairs
	$n=15$	225 pairs	18 pairs
	$n=16$	500 pairs/6 quadruples	74 pairs/2 quadruples
	$n=18$	906 pairs/6 triples	49 pairs/2 triples
$p=7$	$n=8$	36 pairs	12 pairs
	$n=9$	63 pairs	5 pairs
	$n=10$	102 pairs/5 quintuples	20 pairs/2 quintuples
	$n=11$	55 pairs	0 pair
	$n=12$	317 pairs/11 triples/10 quadruples/ 2 sextuples	63 pairs/8 triples/1 quadruple/ 1 sextuple
	$n=13$	130 pairs	0 pair
	$n=14$	539 pairs	140 pairs
	$n=15$	405 pairs	36 pairs

Triple in D_{12}: $\{C, c, d, e^\flat, G^\flat\}\&\{C, c, D, g^\flat, B^\flat\}\&\{C, c, g^\flat, A^\flat, B^\flat\}$.

D_n	Homometric sets for the left action	Homometric sets for the right action
n=12	[0+,4+,8+,0-,2-] & [0+,4+,8+,2-,4-]	[0+,4+,8+,0-,2-] & [0+,4+,8+,2-,4-]
	[0+,4+,8+,1-,3-] & [0+,4+,8+,3-,5-]	[0+,4+,8+,1-,3-] & [0+,4+,8+,3-,5-]
	[0+,6+,0-,2-,4-] & [0+,2+,10+,0-,6-]	[0+,6+,0-,2-,4-] & [0+,2+,4+,0-,6-]
	[0+,6+,0-,2-,4-] & [0+,8+,10+,0-,6-]	[0+,6+,0-,2-,4-] & [0+,2+,10+,0-,6-]
	[0+,6+,0-,1-,5-] & [0+,7+,11+,0-,6-]	[0+,6+,0-,1-,5-] & [0+,1+,5+,0-,6-]
	[0+,6+,1-,3-,5-] & [0+,2+,10+,1-,7-]	[0+,6+,1-,3-,5-] & [0+,2+,4+,1-,7-]
	[0+,6+,1-,3-,5-] & [0+,8+,10+,1-,7-]	[0+,6+,1-,3-,5-] & [0+,2+,10+,1-,7-]
	[0+,6+,0-,4-,5-] & [0+,4+,11+,0-,6-]	[0+,6+,0-,4-,5-] & [0+,1+,8+,0-,6-]
	[0+,1+,8+,0-,6-] & [0+,7+,8+,0-,6-]	[0+,2+,4+,0-,6-] & [0+,2+,10+,0-,6-]
	[0+,2+,10+,0-,6-] & [0+,8+,10+,0-,6-]	[0+,4+,5+,0-,6-] & [0+,4+,11+,0-,6-]
	[0+,1+,8+,1-,7-] & [0+,7+,8+,1-,7-]	[0+,2+,4+,1-,7-] & [0+,2+,10+,1-,7-]
	[0+,2+,10+,1-,7-] & [0+,8+,10+,1-,7-]	[0+,4+,5+,1-,7-] & [0+,4+,11+,1-,7-]
	[0+,1+,8+,2-,8-] & [0+,7+,8+,2-,8-]	[0+,4+,5+,2-,8-] & [0+,4+,11+,2-,8-]
	[0+,1+,8+,3-,9-] & [0+,7+,8+,3-,9-]	[0+,4+,5+,3-,9-] & [0+,4+,11+,3-,9-]



Espace $\mathcal{A}_2$ des accords à 2 notes.