Morphologie Mathématique, Analyse des Concepts Formels et Musicologie Computationnelle

Pierre Mascarade

ENS Lyon

June 19, 2017

Sommaire

1. Motivation
2. Pré-requis théoriques
   - Algèbre des objets musicaux
   - FCA
3. Travail méthodologique réalisé
   - Contribution au projet SageMath
   - Éléments caractéristiques d'un treillis
   - Opérateurs Morphologique sur treillis de concept
4. Contribution à la reconnaissance du style
   - Congruence de Treillis de concept
   - Treillis-Quotient modulo Congruence
   - Algorithme de reconnaissance des formes harmoniques

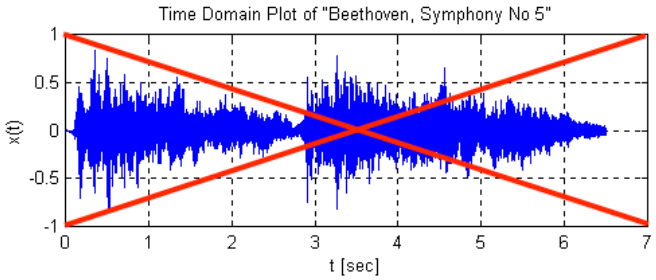
Sommaire

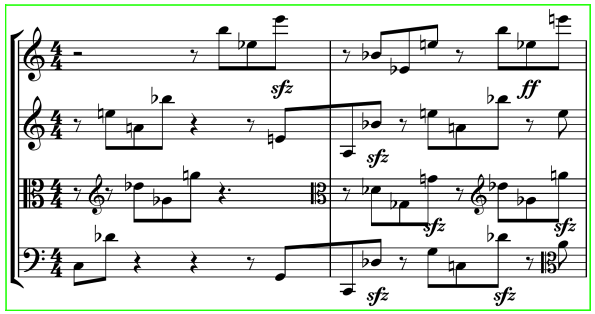
1. Motivation
2. Pré-requis théoriques
3. Travail méthodologique réalisé
4. Contribution à la reconnaissance du style

Motivation

Problématique: Reconnaissance / classification du style

- Reconnaissance des formes et des progressions harmoniques
- Analyse de la partition et non du signal





Solution: Représentation symbolique des structures musicales

- *Extensional Standard Language of Music*
- *Algèbre Abstraite*

Enjeu théorique $\longrightarrow$ étudier les relations entre:

- Morphologie Mathématique
- Théorie des Treillis
- Analyse des Concepts Formels (FCA)

$\Longrightarrow$ *intérêt* musicologique?

Sommaire

1. Motivation
2. Pré-requis théoriques
   - Algèbre des objets musicaux
   - FCA
3. Travail méthodologique réalisé
4. Contribution à la reconnaissance du style

Definition (*Système Harmonique*)

Un triplet $\mathbb{T} = (T, \delta, \mathrm{I})$ est appelé système harmonique algébrique, si T est un ensemble, $\mathrm{I} = (I, +, -, 0)$ un Groupe Abelien, et $\delta : T \times T \to I$ une map telle que pour tous $t_1, t_2, t_3 \in T$ les équations suivantes soient vraies:

$$\delta(t_1, t_2) + \delta(t_2, t_3) = \delta(t_1, t_3) \quad \text{et} \quad \delta(t_1, t_2) = 0 \text{ iff } t_1 = t_2. \tag{1}$$

On considérera les systèmes harmoniques de la forme $T_{\mathcal{O}} = (\mathbb{Z}_{\mathcal{O}}, \delta_{\mathcal{O}}, \mathbb{Z}_{\mathcal{O}}) \longrightarrow O$-tet.

- $\mathbb{Z}$ est le *groupe additif* des entiers relatifs
- $\mathcal{O} \in \mathbb{Z}_+ \longrightarrow$ *octave*:
  - cardinalité du Groupe I,
  - nombre de tons présents dans notre système
- $\mathbb{Z}_{\mathcal{O}}$ est l'*anneau quotient* des entiers *modulo* $\mathcal{O}$

Example (Systèmes Harmoniques)

$\mathcal{O} = 5 \longrightarrow$ système **pentatonique** (do-ré-mi-sol-la)
$\mathcal{O} = 7 \longrightarrow$ système **diatonique** (do-ré-mi-fa-sol-la-si)
$\mathcal{O} = 12 \longrightarrow$ système **dodécaphonique** (do-do♯-ré-ré♯-mi-fa-fa♯-sol-sol♯-la-la♯-si).

On appellera les *sous-ensembles* de $\mathbb{Z}_{\mathcal{O}}$ les **harmonies** $H \in \mathbb{Z}_{\mathcal{O}}$ du O-tet.

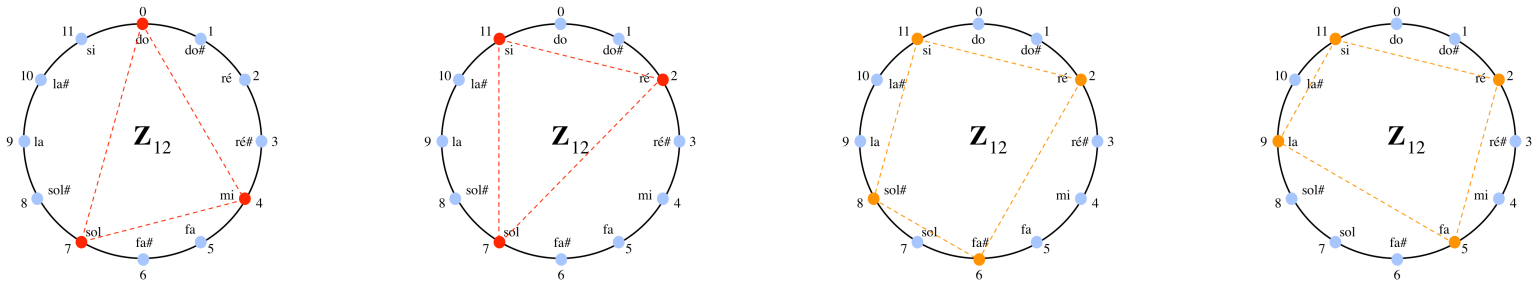
Réduction des harmonies à leur structure modulo transposition

- classification en fonction de la *structure intervallique* et du *nombre de tons*
- Deux harmonies ont le *même motif* dans le cas où elles sont reliées par une **transposition**

Cette classification engendre une relation d'équivalence:

$$\Psi_{\prime} := \{(H_1, H_2) \mid \exists i \ : H_1 = H_2 + i, H_1 \subseteq \mathbb{Z}_{\mathcal{O}}, H_2 \subseteq \mathbb{Z}_{\mathcal{O}}\} \tag{2}$$

Les classes d'équivalence $[H]_{\Psi}$ sont appelées formes harmoniques



Forme harmonique des *accords parfaits majeurs* $\longrightarrow$ [0 4 7]
Forme harmonique des *accords de 7ème de Dominante* $\longrightarrow$ [0 2 5 8]

ircam Centre Pompidou

Definition (*Contexte Formel*)

Soit G un ensemble d'éléments appelés objets, M un ensemble d'éléments appelés attributs et $I \subseteq G \times M$ une relation binaire entre les objets et les attributs, une paire $(g, m) \in I$ signifie *l'objet g possède l'attribut m*.
Alors le triplet $\mathbb{K}(G, M, I)$ définit un *contexte formel*

Definition (*Concept Formel*)

Soit $\mathbb{K} = (G, M, I)$ un contexte formel, $X \subseteq G$, $Y \subseteq M$ et

$$\alpha(X) := \{m \in M \mid \forall g \in A : g\, I\, m\} \tag{3}$$

$$\beta(Y) := \{g \in G \mid \forall m \in B : g\, I\, m\}. \tag{4}$$

La paire (X, Y) est un concept formel iff $\alpha(X) = Y$ et $\beta(Y) = X$.
X $\rightarrow$ extent, Y $\rightarrow$ intent L'ensemble de tous les concepts formels du contexte:

$$\mathfrak{B}(G, M, I) := \{(X, Y) \mid \alpha(X) = Y, \beta(Y) = X\}$$

ircam Centre Pompidou

Definition (Ordonnancement des concepts)

$$(A, B) \leq (C, D) :\Longleftrightarrow A \subseteq C \text{ et } B \supseteq D$$

Theorem (Théorème Fondamentale de la FCA)

$\mathbb{C}(\mathbb{K}) := (\mathfrak{B}(G, M, I), \leq)$ *est un Treillis complet de Galois.*

Theorem (*Infimum et Supremum* dans un Treillis de Concept)

Soit $\mathbb{C}$ *un treillis de concept,* infimum (**meet**) *et* supremum (**join**) *d'une famille de concepts formels* $(X_t, Y_t)_{t \in T}$ *sont donnés respectivement par:*

$$\bigwedge_{t \in T} (X_t, Y_t) = \left(\bigcap_{t \in T} X_t, \alpha(\beta(\bigcup_{t \in T} Y_t)) \right), \tag{5}$$

$$\bigvee_{t \in T} (X_t, Y_t) = \left(\beta(\alpha(\bigcup_{t \in T} X_t)), \bigcap_{t \in T} Y_t \right) \tag{6}$$

Contexte multi-valué: 4-tet

Contexte multi-valué

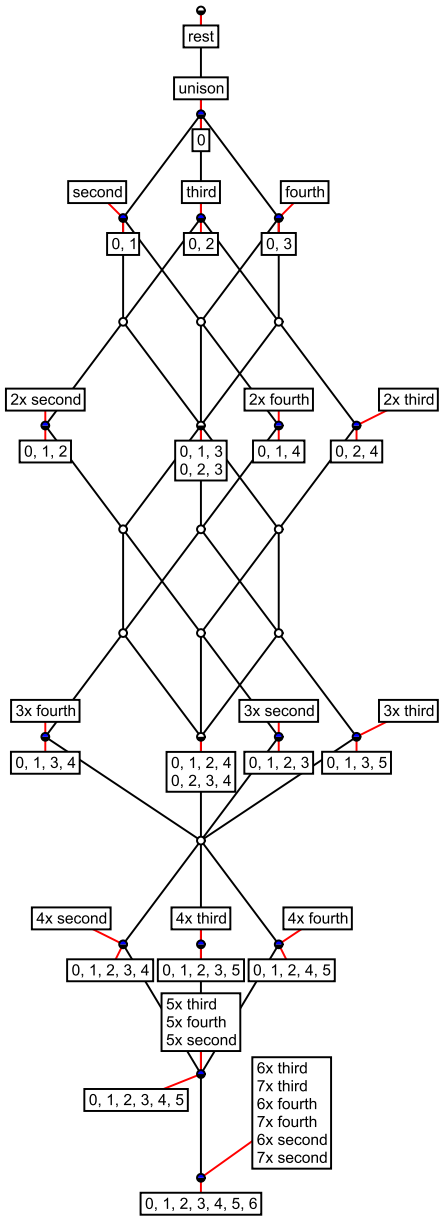
	unison	second	third
Pause			
0	1		
0, 1	2	1	
0, 2	2		1
0, 1, 2	3	2	1
0, 1, 2, 3	4	4	2

Contexte multi-valué redimensionné

	unison				second				third	
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
pause										
0	×									
0, 1	×	×			×					
0, 2	×	×							×	
0, 1, 2	×	×	×		×	×			×	
0, 1, 2, 3	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

Treillis de concept: 7-tet

	unison	second	2× second	3× second	4× second	5× second	6× second	7× second	third	2× third	3× third	4× third	5× third	6× third	7× third	fourth	2× fourth	3× fourth	4× fourth	5× fourth	6× fourth	7× fourth
rest																						
0	×																					
0, 1	×	×																				
0, 2	×								×													
0, 1, 2	×	×	×						×													
0, 3	×															×						
0, 1, 3	×	×							×							×						
0, 2, 3	×	×							×							×						
0, 1, 2, 3	×	×	×	×					×	×						×						
0, 1, 4	×	×														×	×					
0, 2, 4	×								×	×						×						
0, 1, 2, 4	×	×	×						×	×						×	×					
0, 1, 3, 4	×	×	×						×							×	×	×				
0, 2, 3, 4	×	×	×						×	×						×	×					
0, 1, 2, 3, 4	×	×	×	×	×				×	×	×					×	×	×				
0, 1, 3, 5	×	×							×	×	×					×	×					
0, 1, 2, 3, 5	×	×	×	×					×	×	×	×				×	×	×				
0, 1, 2, 4, 5	×	×	×	×					×	×	×					×	×	×	×			
0, 1, 2, 3, 4, 5	×	×	×	×	×	×			×	×	×	×	×			×	×	×	×	×		
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×



Sommaire

1. Motivation
2. Pré-requis théoriques
3. Travail méthodologique réalisé
   - Contribution au projet SageMath
   - Éléments caractéristiques d'un treillis
   - Opérateurs Morphologique sur treillis de concept
4. Contribution à la reconnaissance du style

Contribution au projet SageMath

ircam Centre Pompidou

Problème

- Musicologie computationnelle $\longrightarrow$ **nécessité** d'une approche algorithmique
- Actuellement **aucuns outils** algorithmiques *FCA / MorphoMath*
- Visualisation des données $\longrightarrow$ recherches impliquant des compositeurs *non-mathématiciens*

SageMath : logiciel libre généraliste et communautaire de calcul mathématique orienté structures algébriques

Solution: Bibliothèque SageMath

- Développement d'une bibliothèque d'algorithmes de calcul algébrique et de visualisation de données orientée *MorphoMath-FCA-Treillis* pour *SageMath*.
- Soumission du code à la *review* sur SageMath develop.

Éléments caractéristiques d'un treillis

ircam Centre Pompidou

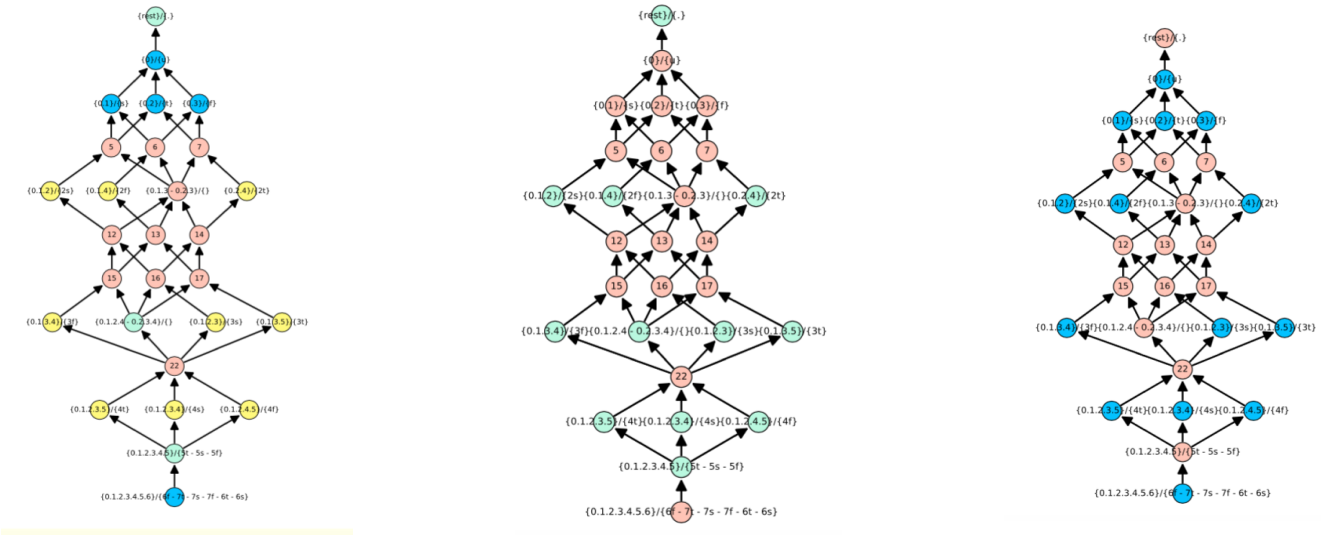
Definition (Éléments join-irréductibles et meet-irréductibles)

Un élément a d'un treillis $\mathbb{C}$ est join-irréductible si
(i) $a \neq 0_{\mathbb{C}}$
(ii) $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, a = b \vee c \Rightarrow a = b$ ou $a = c$.
L'ensemble de tous les éléments join-irreductibles de $\mathbb{C}$ est dénoté par $\mathcal{J}(\mathbb{C})$.

Meet-irréductible défini par dualité, resp. $\mathcal{M}(\mathbb{C})$.
De plus,

$$\forall a \in \mathbb{C},\ a = \bigvee \{b \in \mathcal{J}(\mathbb{C}) \mid b \preceq a\} = \bigwedge \{b \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \mid a \preceq b\}.$$

Labellisation $\longrightarrow p_{\mathbb{C}}$ et $q_{\mathbb{C}}$:



ircam Centre Pompidou

Opérateur Morphologiques sur Treillis de concept

- MorphoMath: *element structurant* $\longrightarrow$ notion de voisinage sur le *powerset* d'un ensemble du contexte
- Théorie des Treillis: directement depuis une distance sur le treillis

On peut définir une *métrique* de treillis à partir de $\omega()$ - fonction à valuation réelle sur $(\mathbb{C}, \preceq)$ -

- $\forall a \in \mathbb{C},\ \omega_G(a) = |G| - |e(a)|$
- $\forall a \in \mathbb{C},\ \omega_M(a) = |i(a)|$
- $\forall a \in \mathbb{C},\ \omega_I(a) = |I(a)|$
- $\forall a \in \mathbb{C},\ \omega_F(a) = |F(a)|$
- $$\omega_f(a) = \sum_{b \preceq a} f(b)$$
  $$\omega^f(a) = \sum_{a \preceq b} f(b)$$
- $f(a) =$
  $$\begin{cases} |\ i_1 | i_2\ |\ \forall (i_1, i_2) \in \phi(p_{\mathbb{C}}^{-1}(a)) & \text{si } p_{\mathbb{C}}^{-1}(a) \text{ existe} \\ \min\limits_{\forall (i_1, i_2) \in \phi(g_{min})} |\ i_1 | i_2\ | & \text{sinon} \end{cases}$$
- $f(a) =$
  $$\begin{cases} \sum_j i_j\ \forall i \in \phi(p_{\mathbb{C}}^{-1}(a)) & \text{si } p_{\mathbb{C}}^{-1}(a) \text{ existe} \\ \min\limits_{\forall i \in \phi(g_{min})} \sum\limits_j i_j & \text{sinon} \end{cases}$$

ircam Centre Pompidou

Definition (Dilatation et Érosion)

Un opérateur $\delta\colon (L, \preceq) \to (L', \preceq')$ est une dilatation si: (i) il *préserve le plus petit élément* du treillis (ii) il commute avec le *supremum*:

$$\forall (x_i) \in L,\ \delta(\vee_i x_i) = \vee'_i \delta(x_i)$$

L'érosion ε est définie par dualité.

Opérateur sur $\mathbb{C}$ depuis élément structurant sur $\mathcal{P}(G)$

$$\forall g \in G,\ b(g) = \{g_1 \in G \mid d(g, g_1) \leq n\}$$

$$\delta_{b^n}(X) = \{g \in G \mid b^n(g) \cap X \neq \emptyset\},$$
$$\varepsilon_{b^n}(X) = \{g \in G \mid b^n(g) \subseteq X\}$$

$$\forall a \in \mathbb{C},\ \delta(a) = (\beta\alpha(\delta_{b^n}(e(a))), \alpha(\delta_{b^n}(\beta(i(a)))))$$
$$\forall a \in \mathbb{C},\ \varepsilon(a) = (\beta\alpha(\varepsilon_{b^n}(e(a))), \alpha(\varepsilon_{b^n}(\beta(i(a)))))$$

Opérateur depuis distance sur $(\mathbb{C}, \preceq)$

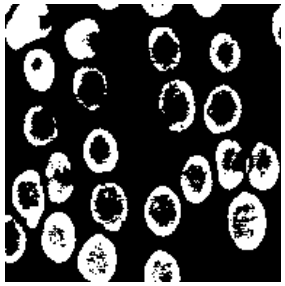
$$\forall a \in \mathcal{J}(\mathbb{C}),\ \delta'(a) = \bigvee\{b \in \mathbb{C} \mid d(a, b) \leq n\}$$
$$\forall a \in \mathcal{M}(\mathbb{C}),\ \varepsilon'(a) = \bigwedge\{b \in \mathbb{C} \mid d(a, b) \leq n\}$$

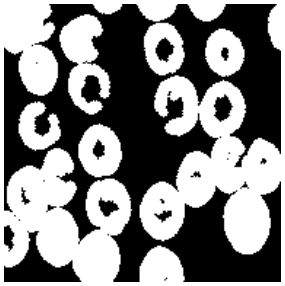
$$\forall a \in \mathbb{C},\ \delta_d(a) = \bigvee_{b \in \mathcal{J}(a)} \delta'(b)$$

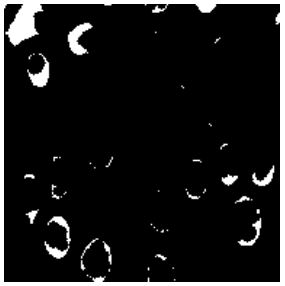
$$\forall a \in \mathbb{C},\ \varepsilon_d(a) = \bigwedge_{b \in \mathcal{M}(a)} \varepsilon'(b)$$

Exemples de Dilatation/Érosion

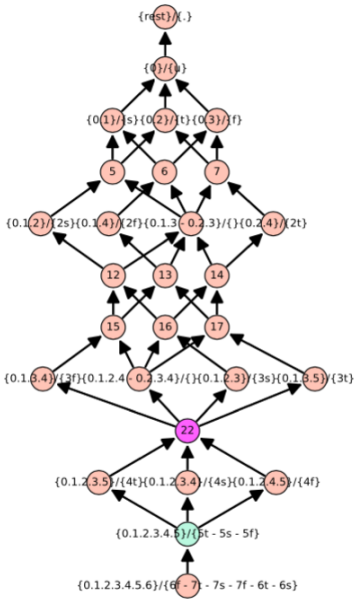
Dilatation / Érosion sur le *poset* $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$



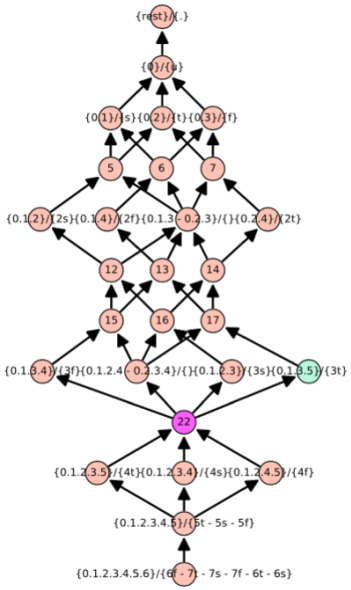




Dilatation / Érosion sur $(\mathbb{C}(7\text{-tet}), \preceq)$ avec *métrique* induite par $\omega_G(a) = |G| - |e(a)|$



$$\delta_d(a) = \bigvee_{b \in \mathcal{J}(a)} \delta'(b)$$



$$\varepsilon_d(a) = \bigwedge_{b \in \mathcal{M}(a)} \varepsilon'(b)$$

Sommaire

1. Motivation
2. Pré-requis théoriques
3. Travail méthodologique réalisé
4. Contribution à la reconnaissance du style
   - Congruence de Treillis de concept
   - Treillis-Quotient modulo Congruence
   - Algorithme de reconnaissance des formes harmoniques

Definition (Congruence de treillis)

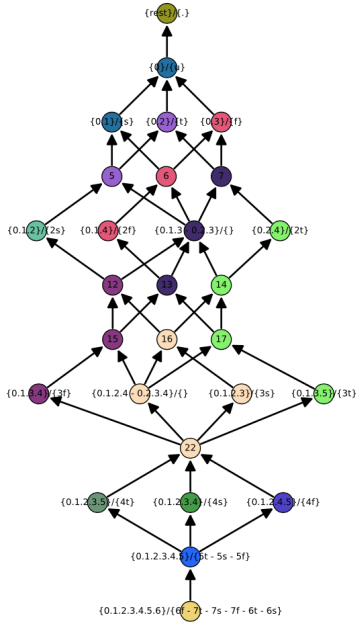
Une relation d'équivalence θ sur un treillis $(L, \preceq)$ est une congruence si elle est **compatible avec le join et le meet**, c-à-d si $\forall a, b, c, d \in L$:

$$a \equiv b \ (mod\ \theta) \text{ et } c \equiv d \ (mod\ \theta)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$a \vee c \equiv b \vee d \ (mod\ \theta) \text{ et } a \wedge c \equiv b \wedge d \ (mod\ \theta)$$

Congruence engendrée par $\{[0, 2, 4], [0, 1, 3, 5]\}$



- Congruence θ sur $L \longrightarrow$ partition du treillis L en ensembles non-vides disjoints nommés **blocks**:

$$[a]_\theta := \{x \in L \mid x \equiv a \ (mod\ \theta)\}$$

- Les bocks engendrés par θ sont des sous-treillis

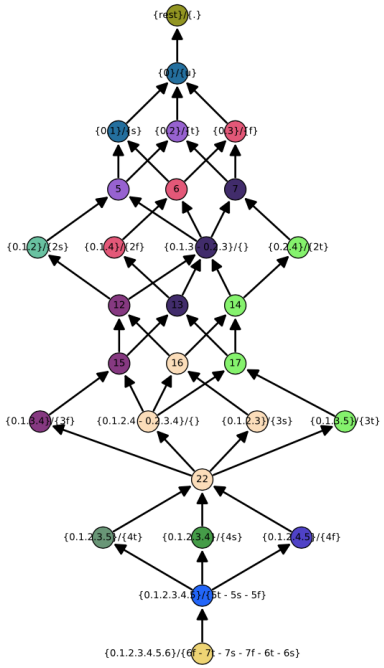
Definition (Treillis Quotient (mod θ))

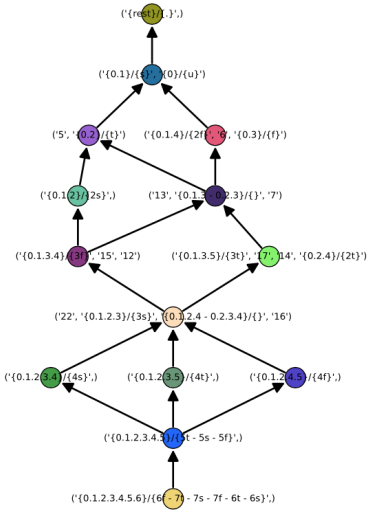
Soit θ une relation d'équivalence sur un treillis L, on pourra définir les opérations $\vee$ et $\wedge$ sur l'ensemble $L/\theta = \{[a]_\theta \mid a \in L\}$ de blocks du treillis de la façon naturelle suivante:

$$[a]_\theta \vee [b]_\theta := [a \vee b]_\theta \text{ et } [a]_\theta \wedge [b]_\theta := [a \wedge b]_\theta$$

$\vee$ et $\wedge$ sont bien définis sur L/θ lorsque θ est une congruence. Lorsque θ est une congruence on appellera $(L/\theta, \vee, \wedge)$ le treillis-quotient de L modulo θ

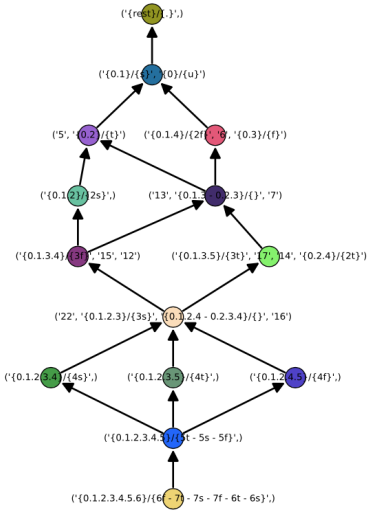
Si $f : L \to K$ est un homomorphisme de treillis $\longrightarrow \theta$ sur L associée à f est le $\ker f$.

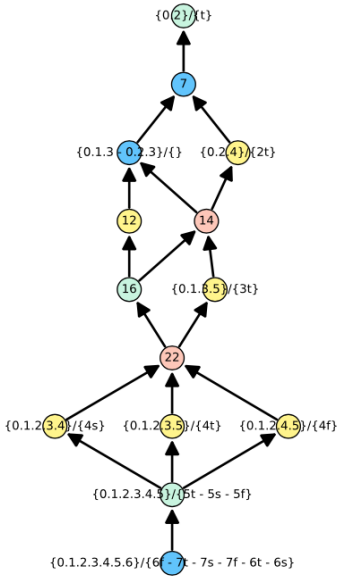


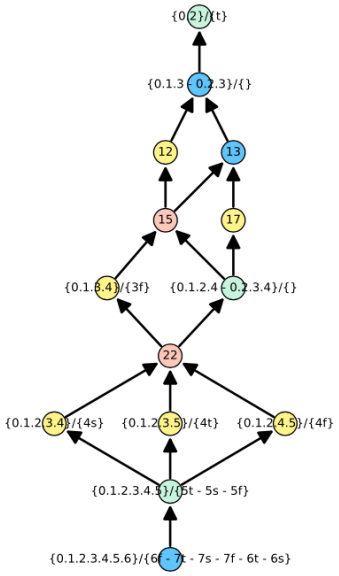


Sous-treillis isomorphes au Treillis-Quotient modulo Congruence

- *Résume* la partition de l'espace harmonique dans un **objet structuré** préservant la structure conceptuelle du système harmonique
- Sous-systèmes harmoniques de $\mathbb{C}$(7-tet) compatibles avec la structure de $(\mathbb{C}(\text{7-tet})/\theta_\star, \vee, \wedge)$
- Utilité pour la composition musicale et l'analyse
- Objets soumis à de nouvelles recherches à l'IRCAM pour explorer en profondeur leur conséquences harmoniques.







Descripteurs harmonico-morphologiques

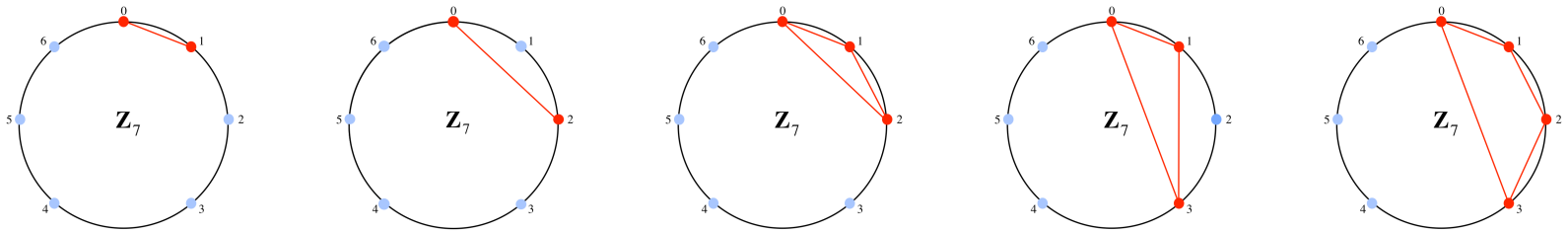
- $\mathfrak{M}$: *phrase musicale* ou *le passage de l'oeuvre* à décrire.
- $\mathfrak{M}$-tet ou $\mathbb{T}_{\mathfrak{M}}$: système harmonique associé à $\mathfrak{M}$
- $\mathbb{C}(\mathfrak{M})$ le treillis de concept associé au contexte formel de $\mathfrak{M}$-tet
- $H^{\mathfrak{M}}$ est l'ensemble des formes harmoniques présentes dans $\mathfrak{M}$
- ω est une valuation valide sur $\mathbb{C}(\mathfrak{M})$
- $\mathbb{M}_\omega$ est la métrique associée à ω sur $\mathbb{C}(\mathfrak{M})$
- (δ, ε) est un couple d'opérateurs morphologiques de treillis sur $\mathbb{C}(\mathfrak{M})$ et utilisant la métrique $\mathbb{M}_\omega$
- n est la distance de voisinage conceptuel à considérer lors des opérations morphologiques

Algorithm 1 Descripteurs harmonico-morphologiques

1: **function** DESCRIPTEURS HARMONICO-MORPHOLOGIQUES($\mathbb{C}(\mathfrak{M})$, $H^{\mathfrak{M}}$, (δ, ε), n)
2: Calculer l'ensemble des concept formel $H^{\mathfrak{M}}_{\mathbb{C}}$ associé aux formes harmoniques présentes dans $H^{\mathfrak{M}}$
3: Calculer la congruence θ sur $\mathbb{C}(\mathfrak{M})$ engendrée par $H^{\mathfrak{M}}_{\mathbb{C}}$
4: Calculer la dilatation $\delta(H^{\mathfrak{M}}_{\mathbb{C}})$ et l'érosion $\varepsilon(H^{\mathfrak{M}}_{\mathbb{C}})$ de l'ensemble des concepts formels $H^{\mathfrak{M}}_{\mathbb{C}}$ dans un voisinage de taille n
5: Calculer la congruence θ_δ sur L engendrée par $\delta(H^{\mathfrak{M}}_{\mathbb{C}})$
6: Calculer la congruence θ_ε sur L engendrée par $\varepsilon(H^{\mathfrak{M}}_{\mathbb{C}})$
7: Calculer les treillis-quotient $\mathbb{C}(\mathfrak{M})/\theta$, $\mathbb{C}(\mathfrak{M})/\theta_\delta$ et $\mathbb{C}(\mathfrak{M})/\theta_\varepsilon$ respectivement modulo θ, θ_δ et θ_ε depuis L
8: **return** $(\mathbb{C}(\mathfrak{M})/\theta, \mathbb{C}(\mathfrak{M})/\theta_\delta, \mathbb{C}(\mathfrak{M})/\theta_\varepsilon)$

Exemple de descripteurs harmonico-morphologiques chez Ligeti

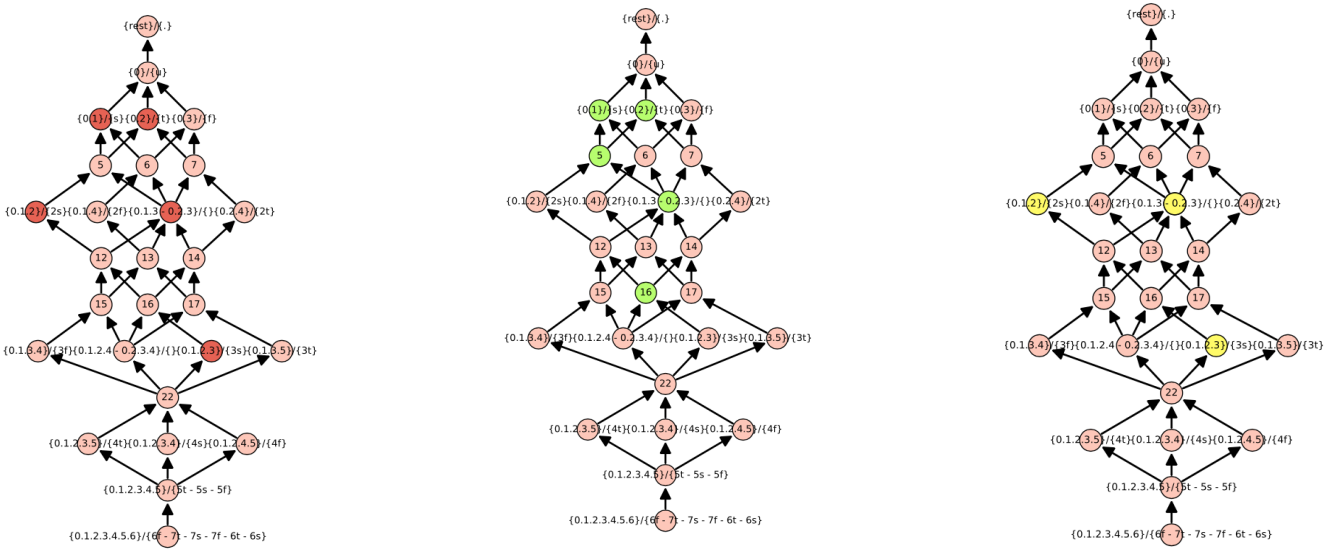
Forme harmoniques les plus utilisées du **Quatuor à Cordes II**, *mvt.I: Allegro Nervoso mm.23-39* de **Gyrogy Ligeti**



Dilatation: $\forall a \in \mathbb{C}: \ a \longmapsto \bigvee_{b \in \mathcal{J}(a)} \delta'(b)$

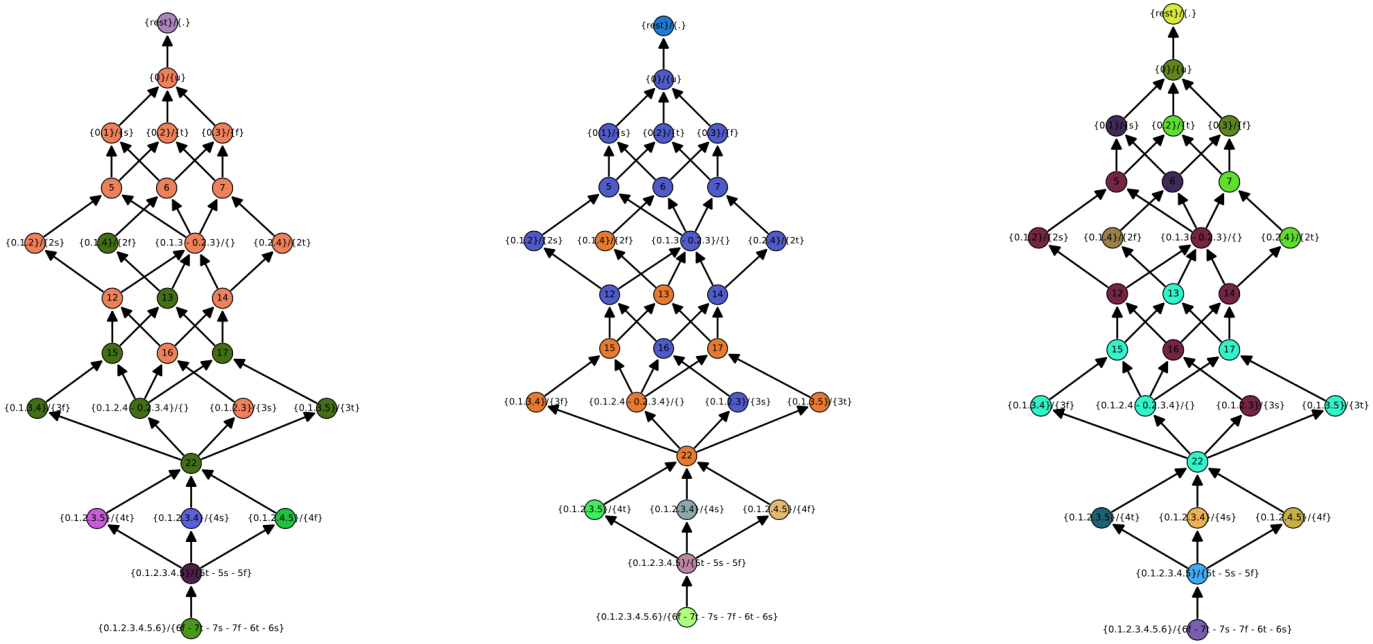
Érosion: $\forall a \in \mathbb{C}: \ a \longmapsto \bigwedge_{b \in \mathcal{M}(a)} \varepsilon'(b)$

Valuation: $\forall a \in \mathbb{C}, \ \omega_F(a) = |F(a)|$

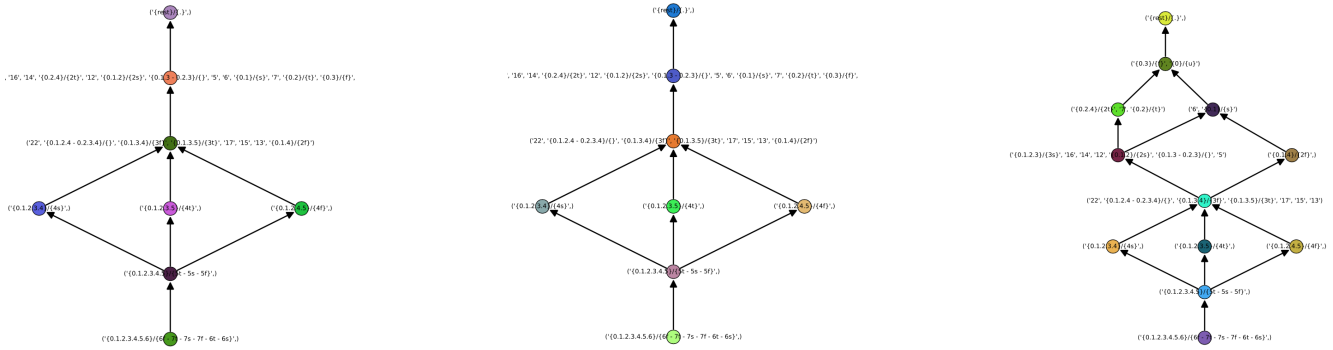


Exemple de descripteurs harmonico-morphologiques chez Ligeti

Congruence θ - θ_δ - θ_ε sur $\mathbb{C}$(7-tet) engendrées par: $H_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{M}}$ - $\delta(H_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{M}})$ - $\varepsilon(H_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{M}})$



Treillis-quotients: neutre $\mathbb{C}(\mathfrak{M})/\theta$ - dilatation $\mathbb{C}(\mathfrak{M})/\theta_\delta$ - érosion $\mathbb{C}(\mathfrak{M})/\theta_\varepsilon$.



Intérêt et innovation des descripteurs

ircam Centre Pompidou

Innovation:

- Objets algébriques nouveaux dans le domaine de la musicologie computationnelle
- Descripteurs orientés musique atonale/contemporaine (très peu de descripteurs adaptés)
- Descripteurs harmoniques compatible avec l'analyse symbolique automatique
- Treillis $\longrightarrow$ objet structuré
- Treillis-Quotient $\longrightarrow$ objet compact (même info qu'une congruence)

- Méthode paramétrable (granularité temporelle, valuation, opérateurs morpho, syst. harmo)
- *Descripteur sup.* et *descripteur inf.* $\longrightarrow$ intervalle de "*similitude*" harmonique
- Informations discriminantes relatives à l'extrait d'oeuvre analysé:
  - *Motifs* de sous-système harmo de $\mathbb{T}_{\mathfrak{M}}$.
  - *Résumé structurel* de la partition de $\mathbb{T}_{\mathfrak{M}}$

Test de corrélation harmonico-morphologique

- $\mathfrak{M}_{ref}$: *phrase musicale* servant de référence lors de la comparaison
- $\mathfrak{M}_{test}$: *phrase musicale* à comparer à $\mathfrak{M}_{ref}$.

Recherches des $\mathfrak{M}_{test}$ qui présentent des similitudes structurelles d'un point de vue harmonique avec $\mathfrak{M}_{ref}$.

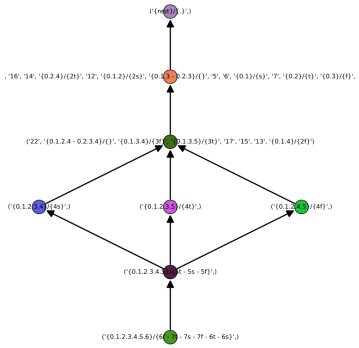
Algorithm 2 Test de corrélation harmonico-morphologique

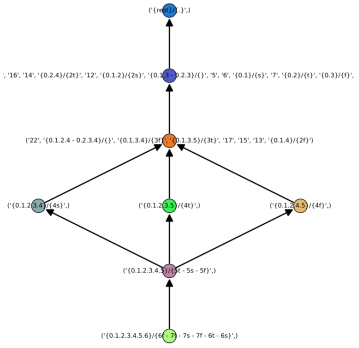
1: **function** TEST DE CORRÉLATION HARMONICO-MORPHOLOGIQUE($\mathbb{C}(\mathfrak{M})$, $H^{\mathfrak{M}_{ref}}$, $H^{\mathfrak{M}_{test}}$, (δ, ε), n)
2: $((\mathbb{C}(\mathfrak{M})/\theta)_{ref}, (\mathbb{C}(\mathfrak{M})/\theta_\delta)_{ref}, (\mathbb{C}(\mathfrak{M})/\theta_\varepsilon)_{ref})$ = descripteurs harmonico-morpho($\mathbb{C}(\mathfrak{M})$, $H^{\mathfrak{M}_{ref}}$, (δ, ε), n)
3: Calculer l'ensemble des concepts formels $H_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{M}_{test}}$ associé aux formes harmoniques présentes dans $H^{\mathfrak{M}_{test}}$
4: Calculer la Congruence θ_{test} sur $\mathbb{C}(\mathfrak{M})$ engendrée par $H_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{M}_{test}}$
5: Calculer le treillis-quotient $\mathbb{C}(\mathfrak{M})/\theta_{test}$ modulo θ_{test} depuis $\mathbb{C}(\mathfrak{M})$
6: **return** Si $\mathbb{C}(\mathfrak{M})/\theta_{test} \simeq$ à un des trois descripteurs de $\mathfrak{M}_{ref} \iff \mathfrak{M}_{ref}$ et $\mathfrak{M}_{test}$ sont **harmonico-morphologiquement corrélés**.

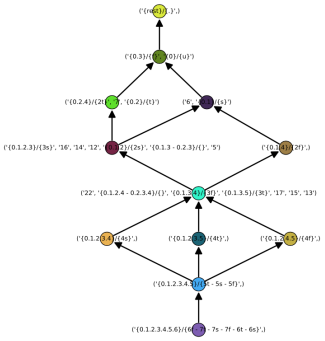
- *Corrélation harmonico-morphologique* $\longrightarrow$ corrélation des espaces harmoniques parcourus par les deux passages de l'oeuvre au sens du $\mathfrak{M}$-tet
- Méthode généralisable à l'analyse d'oeuvres différentes

Exemple de descripteurs harmonico-morphologiques chez Ligeti

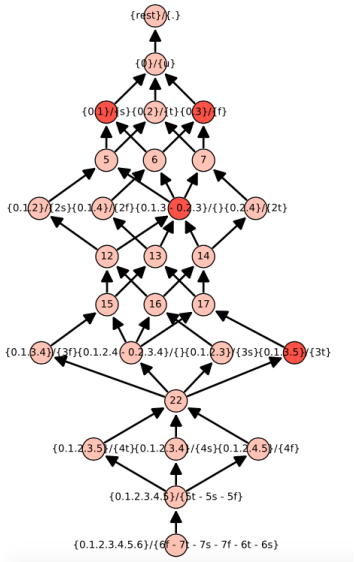
Descripteurs harmonico-morphologiques de $\mathfrak{M}_{ref}$:.

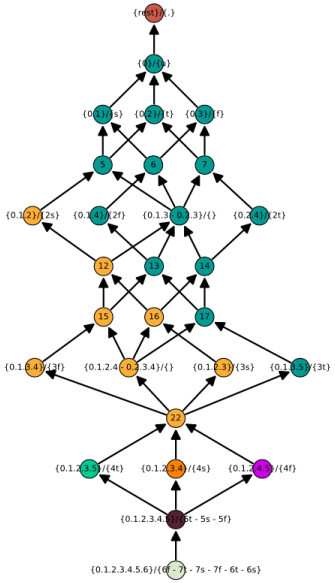


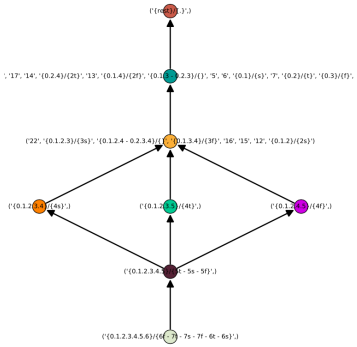
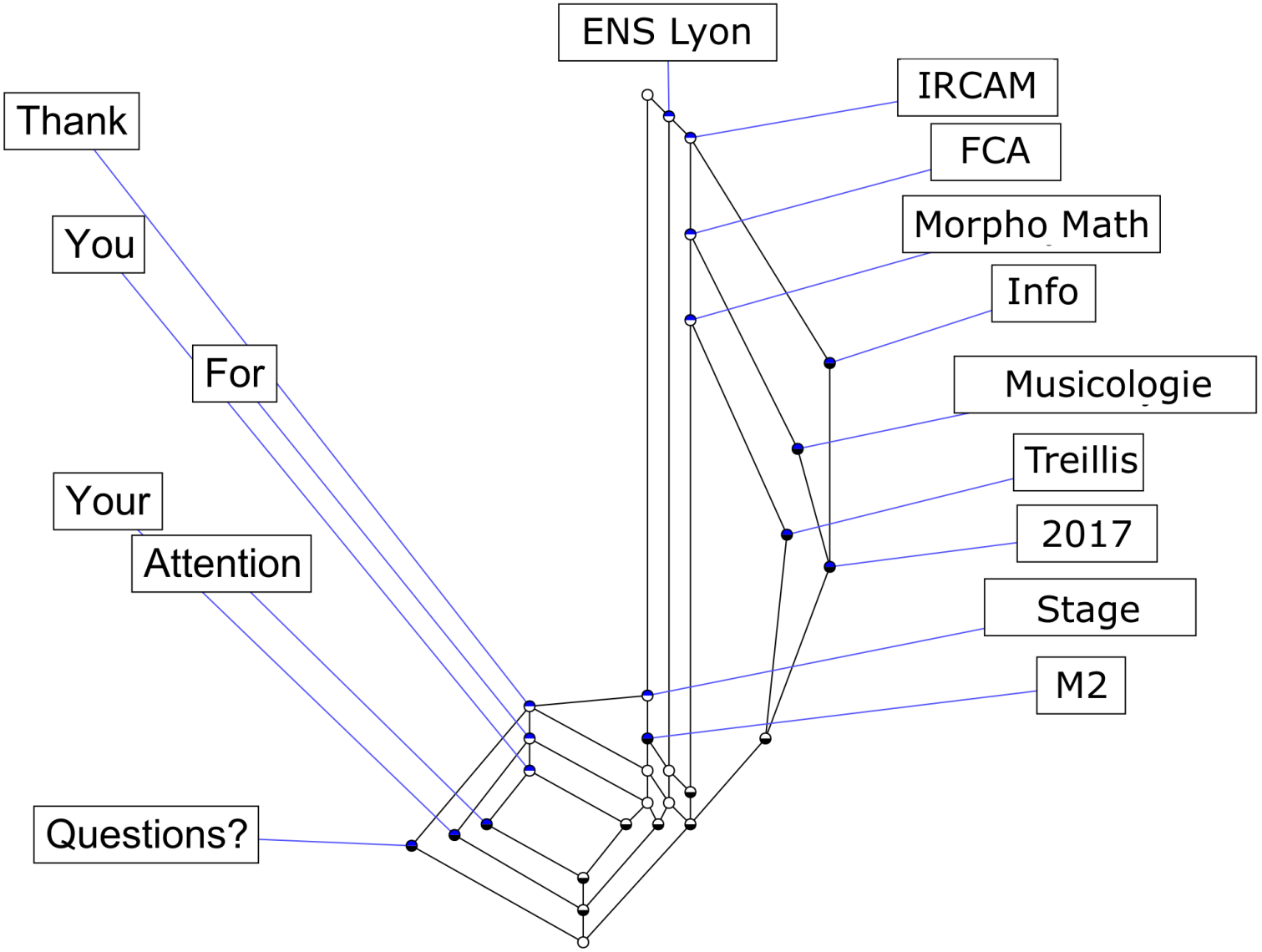




Descripteur de $\mathfrak{M}_{test} \longrightarrow$: **Quatuor à Cordes II**, *mvt.II: Molto Calmo mm.49-56* de **Gyrogy Ligeti**







Treillis Final