



Université de Strasbourg - UFR de mathématique et d'informatique

La Transformée de Fourier Discrète

Rapport de Stage de deuxième année de magistère

Charlotte Vulliez

Encadrement : Moreno Andreatta et Corentin Guichaoua

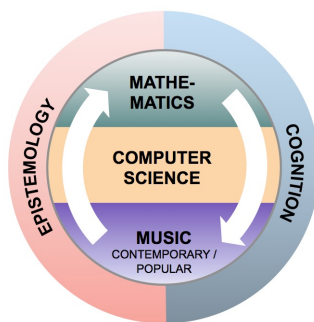
Année 2018/2019

Table des matières

1	Représentation mathématique des structures musicales	4
1.1	Représentation cyclique	4
1.2	Notions d'intervalle	6
1.2.1	Définitions	6
1.2.2	Fonction intervallique, Contenu intervallique	6
1.3	Le Tonnetz	8
1.3.1	Une deuxième forme de représentation	8
1.3.2	Plus qu'une représentation, un outil informatique	11
2	Transformée de Fourier Discrète	12
2.1	Définitions et propriétés générales	12
2.2	Représentation géométrique de la TFD	16
3	Applications de la TFD	18
3.1	Théorème de l'hexacorde	18
3.1.1	Démonstration à l'aide de la TFD	18
3.1.2	Autres démonstrations	19
3.1.3	Généralisation	19
3.1.4	Cas continu	19
3.2	Canons rythmiques	20
3.3	Gammes et structures bien réparties	22
3.3.1	Approche intuitive	22
3.3.2	Approche par la TFD	23
3.4	Tore des phases	25
4	Bilan	30

Introduction

Il est bien connu que les mathématiques et la musique sont des domaines liés. En effet, dès l'antiquité, au VI^e siècle, Pythagore considère la musique comme une science mathématique à part entière et est à l'origine de la compréhension des fréquences. En 1712, Leibniz dit « La musique est un exercice caché de l'arithmétique, l'esprit n'ayant pas conscience qu'il est en train de compter » [17]. Cependant, il est moins évident que la musique ait un véritable intérêt pour les mathématiciens ; c'est un phénomène récent qui s'impose de plus en plus et dont fait partie le projet SMIR (Structural Music Information Research), projet lancé par mon maître de stage M. Moreno Andreatta. Alliant algèbre, géométrie, topologie et théorie des catégories, il a pour but la compréhension de la structure musicale. L'objectif final est de transmettre ces résultats mathématiques obtenus sous forme d'un logiciel afin de permettre aux musicologues et compositeurs d'analyser la musique et de composer. C'est ce que représente le logo de ce projet ci-dessous :



J'ai effectué mon stage de deuxième année de magistère dans l'enceinte de l'IRMA (Institut de Recherche Mathématique Avancée), plus précisément au sein du bureau de recherche de M. Moreno Andreatta. Ma mission était de répertorier les nombreuses applications de la transformée de Fourier discrète (TFD) à l'analyse de structures musicales et d'exposer ainsi l'importance de cet outil, découvert il y a pourtant si longtemps mais dont l'usage est récent. L'étude des spectres et signaux sonores n'était donc pas l'objet de ce mémoire. Nous nous concentrerons uniquement sur l'étude des ensembles algébriques et y appliquerons la transformée de Fourier discrète.

Nous verrons dans un premier temps les formalismes des structures musicales représentés en mathématiques de plusieurs manières, puis nous introduirons notre outil principalement étudié ici, la TFD, ainsi que ses propriétés, et enfin nous étudierons plusieurs applications de la TFD à la musique : le théorème de l'hexacorde qui est le théorème le plus connu en mathémusique et qui fut démontré de maintes façons, les canons rythmiques présentant des problèmes encore non résolus, la notion de gammes bien réparties (GBR) qui est une des notions les plus intéressantes tant pour les mathématiciens que pour les musiciens, et le tore des phases, une autre représentation du tonnetz que nous présenterons aussi.

1 Représentation mathématique des structures musicales

1.1 Représentation cyclique

La gamme chromatique est composée de 12 notes réparties en intervalles chromatiques égaux selon le tempérament égal. La notation anglaise de ces notes est souvent utilisée et l'on dispose aussi d'une représentation mathématique de la façon suivante :

Notation Française	Notation Anglaise	Notation Numérique
Do	C	0
Do $\sharp$ = Ré $\flat$	C $\sharp$ = D $\flat$	1
Ré	D	2
Ré $\sharp$ = Mi $\flat$	D $\sharp$ = E $\flat$	3
Mi	E	4
Fa	F	5
Fa $\sharp$ = Sol $\flat$	F $\sharp$ = G $\flat$	6
Sol	G	7
Sol $\sharp$ = La $\flat$	G $\sharp$ = A $\flat$	8
La	A	9
La $\sharp$ = Si $\flat$	A $\sharp$ = B $\flat$	10
Si	B	11

TABLE 1 – Notations de la gamme chromatique

Notons que 2 notes séparées d'une octave (12 demi-tons) portent le même nom, elle sont alors associées au même nombre. Ainsi, pour analyser la musique, nous nous plaçons dans le groupe cyclique $\mathbb{Z}_{12}$. La cyclicité de ce groupe induit naturellement la représentation cyclique des structures musicales (notes, accords) qui fut introduite par Marin Mersenne en 1648 [9]. Remarquons que l'ensemble $\mathbb{Z}_{12}$ admet 4 générateurs : 1, 5, 7, 11. De ce fait, plusieurs représentations existent dont le cycle des quartes (5 demi-tons) correspondant aussi au cycle des quintes (7 demi-tons) suivant le sens de parcours du cycle. Nous pouvons les observer sur les figures suivantes :

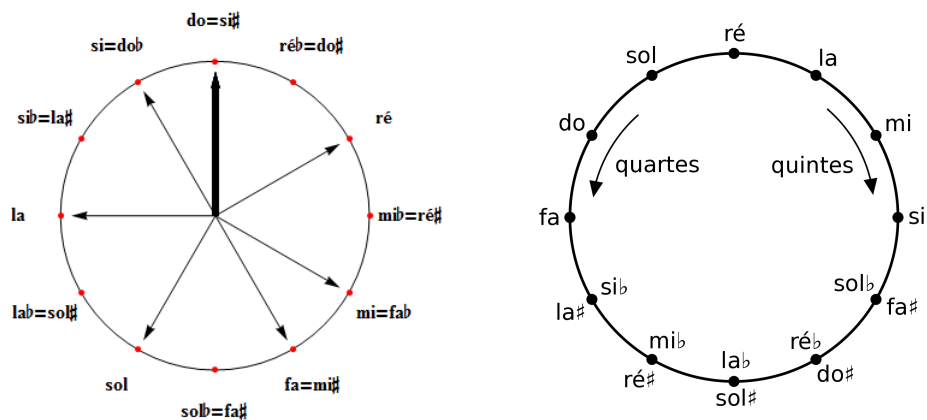


FIGURE 1.1 – Cycles de la gamme chromatique

Cette vision géométrique permet de remarquer plus facilement les symétries entre accords, représentés par des polygones. On dispose de 2 transformations essentielles : la transposition et l'inversion de notes. On se place dans le cercle du cycle de la gamme chromatique par demi-tons pour les étudier.

Définition 1.1. Soit S un ensemble de notes. On définit la transposition d'une note $x \in S$ de k demi-tons par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{12}, T_k(x) = x + k \pmod{12}.$$

Géométriquement, une transposition de k demi-tons correspond à une rotation d'un angle de $k\pi/6$.

On remarque des propriétés immédiates :

Proposition 1.2.

1. T_k est bijective,
2. $T_k T_l = T_{k+l}$,
3. $T_k T_{-k} = Id$

Définition 1.3. Soit S un ensemble de notes. On définit l'inverse d'une note $x \in S$ par rapport à la note correspondant à k demi-tons par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{12}, I_k(x) = -x + k \pmod{12}.$$

Géométriquement, une inversion par rapport à une note de k demi-tons correspond à une symétrie dans le cercle.

Remarque 1.4. L'inversion I_k possède 2 points fixes $k/2$ et $k/2 + 6$ lorsque k est pair.

On dispose ainsi de 12 transpositions et de 12 inversions, de la même façon que le groupe Dihédral $\mathbb{D}_{12}$. On note ce groupe musicalement T/I, à ne pas confondre avec un groupe quotient. On étudiera dans une autre section l'action de ce groupe sur l'ensemble des triades majeures et mineures.

1.2 Notions d'intervalle

1.2.1 Définitions

Nous avons introduit la notion d'intervalle entre 2 notes, correspondant à un certain nombre de demi-tons. Chaque intervalle possède un nom spécifique répertorié dans le tableau suivant :

Structure de l'intervalle	Nom associé
0 demi-ton	Unisson
1 demi-ton	Seconde mineure
2 demi-tons = 1 ton	Seconde majeure
3 demi-tons	Tierce mineure
4 demi-tons = 2 ton	Tierce majeure
5 demi-tons	Quarte
6 demi-tons = 3 ton	Quarte augmentée = Quinte diminuée
7 demi-tons	Quinte
8 demi-tons = 4 ton	Sixte mineure
9 demi-tons	Sixte majeure
10 demi-tons = 5 ton	Septième mineure
11 demi-tons	Septième majeure
12 demi-tons = 6 ton	Octave

TABLE 2 – Liste des noms d'intervalles

De plus, on parle de *triade* pour désigner un accord de 3 sons. Enfin, on qualifie des triades *majeures*, respectivement *mineures*, lorsque l'accord est composé d'une tierce majeure et d'une quinte, respectivement d'une tierce mineure et d'une quinte.

1.2.2 Fonction intervallique, Contenu intervallique

Plusieurs notions sont à introduire pour pouvoir analyser la musique :

Définition 1.5. Soit S, T deux ensembles de classes de hauteurs¹. La fonction intervallique ϕ de ces ensembles de notes est définie par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}_n, \phi_{S,T}(k) = \text{Card} \{(s, t) \in S \times T / t - s = k \mod (n)\}.$$

1. On parlera aussi bien de classes de hauteurs que de notes.

On note $\phi_S(k) = \text{Card}\{(s, t) \in S \times S / t - s = k \pmod{(n)}\}$.

Remarque 1.6. Cette fonction permet de nous indiquer le nombre d'intervalles comportant k demi-tons dans l'ensemble S considéré. On notera que $\phi_S(0) = \text{Card}(S)$.

Une des opérations les plus importantes dans l'analyse des structures musicales est le produit de convolution :

Définition 1.7. Soient $f, g : \mathbb{Z}_n \mapsto \mathbb{C}$. Le produit de convolution entre ces deux fonctions est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}_n, (f * g)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(x - k).$$

Remarque 1.8. Le produit de convolution est commutatif et associatif.

Une propriété de la fonction intervallique qui interviendra dans la démonstration du théorème de l'hexacorde en sous-section 3.1 et dans l'étude des canons rythmiques en sous-section 3.2 est la suivante :

Proposition 1.9. Soit A, B deux parties de $\mathbb{Z}_n$. Alors :

$$\phi_{A,B} = \mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B.$$

Remarque 1.10. La fonction $\mathbb{1}_A$ est appelée la fonction indicatrice (ou caractéristique) de l'ensemble $A \subset \mathbb{Z}_n$ et est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}_n, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{Z}_n$. Alors :

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B)(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \mathbb{1}_A(k) \mathbb{1}_B(x - k) \\ &= \sum_{k \in A} \mathbb{1}_B(x - k) \\ &= \sum_{\{k \in A, l \in B, x = k + l\}} 1 \\ &= \phi_{A,B}(x). \end{aligned}$$

□

Définition 1.11. Soit $f : \mathbb{Z}_n \mapsto \mathbb{C}$, on définit sa symétrisée f_σ par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}_n, f_\sigma(x) = f(-x).$$

Afin de comparer des ensembles de notes, l'outil majeur est le contenu intervallique d'un ensemble comportant la liste des 12 valeurs de la fonction intervallique associée.

Définition 1.12. On définit aussi le contenu intervallique d'un ensemble de classes de hauteurs S par :

$$IC_S = [\phi_S(0), \phi_S(1), \dots, \phi_S(11)].$$

Remarque 1.13. Le contenu intervallique d'un ensemble de classes de hauteurs peut aussi être défini par les valeurs de la fonction intervallique associée ϕ pour k allant de 0 à 6. En effet, d'après la remarque 1.8, le produit de convolution est commutatif. Donc en appliquant la propriété 3.2 et la définition 1.11, on en déduit que pour tout ensemble de notes S :

$$\begin{aligned}\phi_S(1) &= \phi_S(11), \\ \phi_S(2) &= \phi_S(10), \\ \phi_S(3) &= \phi_S(9), \\ \phi_S(4) &= \phi_S(8), \\ \phi_S(5) &= \phi_S(7).\end{aligned}$$

1.3 Le Tonnetz

1.3.1 Une deuxième forme de représentation

En opposition à la représentation cyclique, une autre représentation géométrique des accords fut introduite au XVIII^e siècle par le mathématicien et physicien suisse Leonhard Euler : le Tonnetz. Il propose de considérer les notes et les tonalités comme des points d'un espace bidimensionnel [19]. On peut le voir comme un pavage du plan par des triangles équilatéraux, les sommets correspondant aux notes de la gamme, les arêtes aux intervalles et les triangles aux accords de 3 sons.

Le tonnetz le plus répandu est le T [3, 4, 5] engendré par 3 axes représentant les intervalles de tierce mineure (3 demi-tons), tierce majeure (4 demi-tons) et quarte (5 demi-tons) : voir la figure 1.2. On peut observer sur la figure 1.3 que les triangles pointant vers la droite correspondent alors aux accords mineurs, et ceux vers la gauche aux accords majeurs.

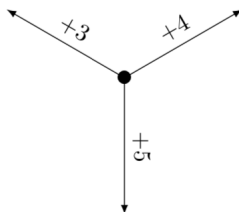


FIGURE 1.2 – Axes 3,4,5

On peut passer d'un accord à un autre à l'aide de 3 transformations de base LPR (Leading-note, Parallèle, Relative). La relation R permet de basculer

d'un accord parfait majeur à son relatif mineur en augmentant la quinte d'un demi-ton et réciproquement, la fondamentale est alors diminuée ou augmentée d'une tierce mineure. La relation P transforme un accord de 3 notes en son parallèle en diminuant ou augmentant la tierce de cet accord, la fondamentale reste inchangée. La relation L modifie d'un demi-ton la fondamentale de l'accord parfait majeur ou mineur. Le groupe de ces transformations est appelé le groupe néoriemannien [18]. Ces relations correspondent à des symétries sur le tonnetz, comme on peut le voir sur la figure 1.3.

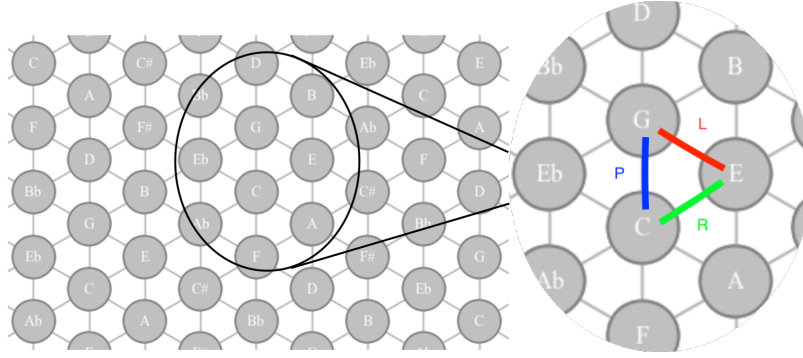


FIGURE 1.3 – Tonnetz $T[3, 4, 5]$ et ses relations LPR

Une autre manière de voir le Tonnetz est de considérer l'action de groupe de $\mathbb{D}_{12}$ sur l'ensemble S composé des triades majeures et mineures. En effet, le groupe diédral $\mathbb{D}_{12}$ d'ordre 24 est le groupe des symétries du dodécagone, engendré par deux éléments s et ρ :

$$T/I = \mathbb{D}_{12} = \{(s, \rho) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{Z}_{12} / \rho^{12} = \text{id}, s^2 = \text{id}, s\rho s^{-1}\rho = \text{id}\}.$$

On définit alors cette action de groupe de la façon suivante.

Définition 1.14. L'action du groupe diédral d'ordre 24 sur l'ensemble S est définie par :

$$\forall (s, \rho) \in T/I, \forall x = \{x_0, x_1, x_2\} \in S, (s, \rho) \cdot x = \{sx_0 + \rho, sx_1 + \rho, sx_2 + \rho\}.$$

Remarque 1.15. On dit qu'un groupe G agit de manière simplement transitive sur un ensemble X lorsque :

$$\forall x, y \in X, \exists ! g \in G, y = g \cdot x.$$

Théorème 1.16. L'action du groupe T/I sur l'ensemble

$$S = \{\text{triades majeures et mineures}\}$$

est simplement transitive. Autrement dit, l'ensemble S forme une unique orbite.

Démonstration.

- Montrons dans un premier temps que l'action est transitive, i.e. $\forall x, y \in S, \exists (s, \rho) \in T/I, y = (s, \rho) \cdot x$. Remarquons premièrement que l'action sur l'ensemble des accords majeurs est transitive. En effet, une triade majeure peut s'écrire sous la forme $\{x_0, x_0 + 4, x_0 + 7\}$ où x_0 est la fondamentale. Ainsi, par une simple translation T_k , on peut obtenir un autre accord majeur $\{y_0, y_0 + 4, y_0 + 7\}$ où $y_0 = x_0 + k$. Par un raisonnement analogue, comme une triade mineure s'écrit sous la forme $\{x_0, x_0 + 3, x_0 + 7\}$, on obtient aussi que l'action du groupe T/I sur l'ensemble des accords mineurs est transitive. Enfin, dans le cas de 2 accords dont un majeur et un mineur, nous pouvons nous ramener, par simples translations, au cas des 2 accords de do majeur et do mineur : $\{0, 4, 7\}$ et $\{0, 3, 7\}$. Il suffit donc de voir que l'inversion I_7 envoie l'accord de do majeur sur l'accord de do mineur. Ainsi, on a bien montré que chaque accord de S pouvait être envoyé sur tout autre accord de S grâce au groupe T/I .
- Montrons maintenant que l'action est libre, cela revient à montrer que le stabilisateur de tout élément de S est réduit à l'élément neutre $(1, 0)$ où $\text{Stab}_x := \{(s, \rho) \in T/I, (s, \rho) \cdot x = x\}$. Soit $x = \{x_0, x_1, x_2\} \in S$. Par l'absurde, supposons qu'il existe un élément $(s, \rho) \neq (1, 0)$ appartenant au stabilisateur. Alors :

$$\begin{cases} sx_0 + \rho &= x_0 \pmod{12} \\ sx_1 + \rho &= x_1 \pmod{12} \\ sx_2 + \rho &= x_2 \pmod{12} \end{cases}$$

Supposons que $s = 1$. Alors $\rho = 0 \pmod{12}$, ce qui est impossible car $(s, \rho) \neq (1, 0)$. Donc $s = 11$ et on a :

$$\begin{cases} 10x_0 + \rho &= 0 \pmod{12} \\ 10x_1 + \rho &= 0 \pmod{12} \\ 10x_2 + \rho &= 0 \pmod{12} \end{cases}$$

Or x est un accord majeur ou mineur, donc

$$x_2 - x_0 = 7.$$

Ainsi, $10(x_2 - x_0) = 70 = 0 \pmod{12}$, ce qui est impossible. Donc on a bien montré que l'action était libre.

- L'action est donc transitive et libre, donc elle est simplement transitive. $\square$

1.3.2 Plus qu'une représentation, un outil informatique

« The tonnetz - one key - many representations » est un site web, développé par Corentin Guichaoua, disponible à l'adresse suivante : <https://guichaoua.gitlab.io/web-hexachord>. Cette interface permet de représenter n'importe quel fichier MIDI (Musical Instrument Digital Interface) à l'aide des 12 Tonnetz représentés et classifiés dans le rapport de stage de Paul Lascabettes [16]. Chaque note est représentée par un cercle dans lequel est inscrit le nom de la note, chaque accord de 2 notes est un segment et chaque triade correspond à un triangle. De plus, il est possible de basculer en représentation duale en cliquant sur le bouton « Dual » ; ainsi chaque note est un hexagone, et un cercle est un accord majeur ou mineur dont la tonalité correspond au nom de la note inscrit. Egalement, en plus de ces 24 représentations, le cycle chromatique et le cycle des quartes/quintes sont affichés. Enfin, si le fichier MIDI comprend un piano seul, nous pouvons suivre la mélodie sur le clavier situé en bas de la page web. Remarquons que nous pouvons analyser le fichier MIDI de notre choix mais il est également possible d'enregistrer notre propre mélodie, soit en connectant un clavier à l'ordinateur, soit en jouant directement à partir du clavier de l'ordinateur.

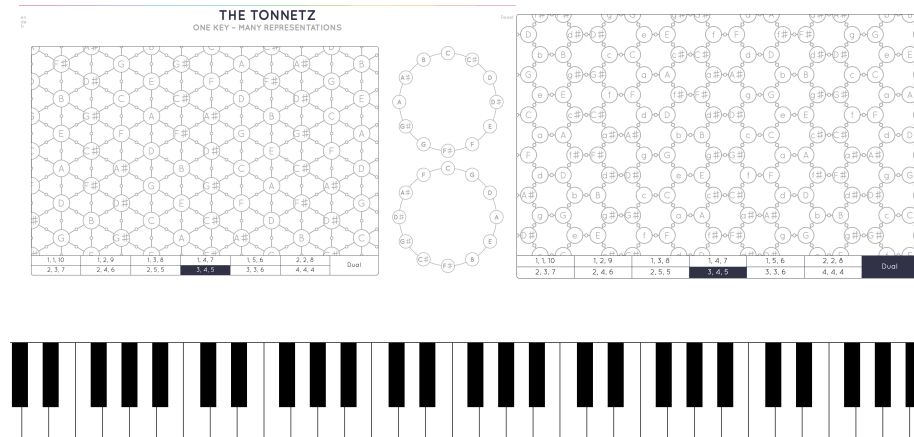


FIGURE 1.4 – Interface web Tonnetz

2 Transformée de Fourier Discrète

Dans cette section, nous allons analyser l'efficacité de cet outil précieux pour la recherche en théorie de la musique, la Transformée de Fourier Discrète. Bien connue en tant qu'approximation de la transformée de Fourier continue et très utilisée dans l'étude des signaux sonores, elle fut introduite en 1959 par David Lewin, complétée par Ian Quinn en 2005 et développée par Emmanuel Amiot par la suite dans le domaine des structures algébriques de la musique [4]. Cette fonction permet, à partir d'un ensemble de notes, de nous fournir une liste de nombres complexes comportant des informations sur cet ensemble ; ces nombres sont appelés les coefficients de Fourier. Nous allons voir que les modules de ces coefficients ainsi que leurs arguments permettent de classer des ensembles de notes ou de rythmes. De plus, les racines de cette fonction jouent un rôle majeur dans l'étude des canons rythmiques. Enfin, la proportion des coefficients décrit la périodicité de notre ensemble de notes.

2.1 Définitions et propriétés générales

Définition 2.1. La transformée de Fourier discrète (TFD) d'une fonction $f : \mathbb{Z}_n \mapsto \mathbb{C}$ est la fonction $\hat{f} : \mathbb{Z}_n \mapsto \mathbb{C}$, également notée $\mathcal{F}(f)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}_n, (\mathcal{F}(f))(x) = \hat{f}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \exp(-2i\pi kx/n).$$

Théorème 2.2. La transformée de Fourier discrète est un automorphisme linéaire de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$ dont la fonction réciproque, notée $\mathcal{F}^{-1}$, est donnée par : $\forall x \in \mathbb{C}, \forall f : \mathbb{Z}_n \mapsto \mathbb{C}$,

$$\left(\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})\right)(x) = \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \hat{f}(k) \exp(+2i\pi kx/n).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{C}$. Soit $f : \mathbb{Z}_n \mapsto \mathbb{C}$. Alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \hat{f}(k) \exp(+2i\pi kx/n) = \frac{1}{n} \sum_{l \in \mathbb{Z}_n} f(l) \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \exp(2i\pi (x-l)k/n)}_{= \begin{cases} n & \text{si } l = x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}} = f(x).$$

□

Remarquons tout de suite que le k -ième coefficient de Fourier, selon le théorème 2.2, permet de mesurer à quel point la fonction considérée est « concentrée » autour de la fonction $x \mapsto \exp(+2i\pi kx/n)$ et donc $\frac{12}{k}$ -périodique. C'est un des premiers avantages de la transformée de Fourier dans le but d'analyser un ensemble de classes de hauteurs : nous pouvons mesurer sa périodicité.

Comme nous étudions des ensembles de notes, on appliquera la TFD à un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_n$ et on introduit ainsi la définition suivante :

Définition 2.3. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_n$. On définit sa TFD par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}_n, \mathcal{F}_A(x) = \widehat{\mathbb{1}_A}(x) = \sum_{k \in A} \exp(-2i\pi kx/n).$$

Remarque 2.4. Par la suite, nous noterons souvent

$$a_0 = \widehat{\mathbb{1}_A}(0), \dots, a_{n-1} = \widehat{\mathbb{1}_A}(n-1).$$

Proposition 2.5. $\forall A \subset \mathbb{Z}_n, \forall k \in \mathbb{Z}_n$,

$$a_{n-k} = \overline{a_k}$$

où $\bar{z}$ est le conjugué d'un nombre complexe z , et a_k est la notation introduite dans la remarque précédente.

Démonstration. Soit $A \subset \mathbb{Z}_n$. Soit $k \in \mathbb{Z}_n$. Alors

$$\begin{aligned} a_{n-k} &= \widehat{\mathbb{1}_A}(n-k) = \sum_{l \in A} \exp(-2i\pi l(n-k)/n) \\ &= \sum_{l \in A} \underbrace{\exp(-2i\pi l)}_{=1} \exp(+2i\pi lk/n) = \overline{a_k}. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.6. $\forall A \subset \mathbb{Z}_n, \forall k \in \mathbb{Z}_n$,

$$|a_k| \leq \text{Card}(A) = a_0.$$

Démonstration. Soit $A \subset \mathbb{Z}_n, k \in \mathbb{Z}_n$. Alors

$$\begin{aligned} |a_k| &= \left| \sum_{l \in A} \exp(-2i\pi lk/n) \right| \leq \sum_{l \in A} \underbrace{|\exp(-2i\pi lk/n)|}_{=1 \forall l \in A} = \sum_{l \in A} \exp(0) \\ &\leq a_0 = \text{Card}(A). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.7. Soit $A \subset \mathbb{Z}_n$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_n \setminus A}(k) = -\mathcal{F}_A(k).$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{Z}_n$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_n \setminus A}(k) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_n \setminus A} \exp(-2i\pi kx/n) \\ &= \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \exp(-2i\pi kx/n)}_{=0 \text{ pour } k \neq 0} - \sum_{k \in A} \exp(-2i\pi kx/n) = -\mathcal{F}_A(k). \end{aligned}$$

□

Exemple 2.8.

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{12} \setminus \{0\}, \mathcal{F}_{\{2,3,5,8\}}(k) = -\mathcal{F}_{\{0,1,4,6,7,9,10,11\}}(k).$$

Proposition 2.9. Les modules des coefficients de Fourier de tout ensemble de notes sont invariants par translation et inversion.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{Z}_{12}$.

- Considérons l'ensemble de notes $A = \{x_0, \dots, x_{s-1}\}$ translaté de t demi-tons : $A + t = \{x_0 + t \bmod 12, \dots, x_s + t \bmod 12\}$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{A+t}(k) &= \sum_{x \in A+t} \exp(-2i\pi kx/12) \\ &= \sum_{x \in A} \exp(-2i\pi kt/12) \exp(-2i\pi kx/12) \\ &= \exp(-2i\pi kt/12) \mathcal{F}_A(k)\end{aligned}$$

Donc $|\mathcal{F}_{A+t}(k)| = |\mathcal{F}_A(k)|$.

- Considérons le même ensemble A inversé par rapport à Do : $-A = \{-x_0, \dots, -x_{s-1}\}$. Alors :

$$\mathcal{F}_{-A}(k) = \sum_{x \in -A} \exp(-2i\pi kx/12) = \sum_{x \in A} \exp(+2i\pi kx/12) = \overline{\mathcal{F}_A(k)}.$$

Donc $|\mathcal{F}_{-A}(k)| = |\mathcal{F}_A(k)|$. □

Exemple 2.10. Soit $k \in \mathbb{Z}_{12}$. On a

$$|\mathcal{F}_{\{1,2,5\}}(k)| = |\mathcal{F}_{\{3,4,7\}}(k)|.$$

Définition 2.11. On dit que deux ensembles A et B sont en Z-relation lorsque

$$IC_A = IC_B.$$

On note $A \stackrel{\mathbb{Z}}{\sim} B$ si A et B sont en Z-relation.

Théorème 2.12. Soient A, B , deux ensembles de classes de hauteurs. Alors :

$$A \stackrel{\mathbb{Z}}{\sim} B \iff |\mathcal{F}_A| = |\mathcal{F}_B|.$$

Démonstration. □

$$\begin{aligned}IC_A = IC_B &\iff \forall k \in \mathbb{Z}_{12}, \phi_A(k) = \phi_B(k) \\ &\iff \forall k \in \mathbb{Z}_{12}, \widehat{\phi_A}(k) = \widehat{\phi_B}(k) \\ &\iff |\mathcal{F}_A| = |\mathcal{F}_B|.\end{aligned}$$

Le principe de la démonstration du théorème de l'hexacorde étudié en sous-section 3.1 repose sur ce théorème.

Introduisons désormais une propriété clé dans l'analyse des structures musicales : la TFD transforme un produit de convolution en un produit usuel. Ceci permettra de résoudre plus simplement de nombreux résultats.

Proposition 2.13. Soient $f, g : \mathbb{Z}_n \mapsto \mathbb{C}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{Z}_n, \widehat{(f * g)}(x) = \widehat{f}(x) \times \widehat{g}(x).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{Z}_n$,

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} (f * g)(k) \exp(-2i\pi kx/n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} f(l) g(k-l) \exp(-2i\pi lx/n) \exp(-2i\pi (k-l)x/n) \\ &= \left(\sum_{l=0}^{n-1} f(l) \exp(-2i\pi lx/n) \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} g(j) \exp(-2i\pi jx/n) \right) \\ &= f(x) \widehat{g}(x). \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $j = k - l \in \mathbb{Z}_n$. $\square$

Remarque 2.14. La TFD d'une fonction définie sur $\mathbb{Z}_n$ étant un vecteur de longueur n , la notation produit $\times$ utilisée dans la proposition 2.13 ainsi que dans la suite de ce mémoire, est définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), \forall y = (y_1, \dots, y_n), \quad x \times y = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n).$$

Théorème 2.15. La TFD est l'unique automorphisme linéaire $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$, à permutations des coefficients près et à multiplication par un scalaire près, transformant un produit de convolution en un produit usuel.

Démonstration. Soit G un automorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$ tel que $\forall f, g : \mathbb{Z}_n \mapsto \mathbb{C}$,

$$G \circ (f * g) = (G \circ f) \times (G \circ g).$$

Alors en particulier pour $f = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})$, et $g = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{g})$, on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{f} \times \widehat{g} &= \widehat{f * g} \\ \iff \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f} \times \widehat{g}) &= f * g \\ \iff G \circ \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f} \times \widehat{g}) &= G \circ (f * g) \\ &= (G \circ f) \times (G \circ g) \\ &= G \circ \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) \times G \circ \mathcal{F}^{-1}(\widehat{g}) \end{aligned} .$$

Donc $G \circ \mathcal{F}^{-1}$ est un morphisme multiplicatif et un automorphisme linéaire de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$. Considérons la base canonique de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n} \simeq \mathbb{C}^n : (e_1, \dots, e_n)$ où

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad e_j = (0, \dots, 0, \underset{j-i\text{ème}}{\uparrow} 1, 0, \dots, 0).$$

Remarquons que

$$\forall j \neq k, \quad e_j \times e_k = (0, \dots, 0), \quad \text{et} \quad e_j \times e_j = e_j^2 = e_j.$$

Ainsi,

$$G \circ \mathcal{F}^{-1}(e_j) = G \circ \mathcal{F}^{-1}(e_j^2) = (G \circ \mathcal{F}^{-1}(e_j))^2.$$

Donc

$$G \circ \mathcal{F}^{-1}(e_j) \in \{0, 1\}^n.$$

De même,

$$G \circ \mathcal{F}^{-1}(e_j) \times G \circ \mathcal{F}^{-1}(e_k) = G \circ \mathcal{F}^{-1}((0, \dots, 0)) = (0, \dots, 0)$$

par propriété d'un morphisme multiplicatif. Donc

$$G \circ \mathcal{F}^{-1}(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

où $\sigma \in \mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$. Finalement, on obtient :

$$\forall f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}, G \circ f = G \circ \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} \circ f = \left((\mathcal{F} \circ f)_{\sigma(0)}, \dots, (\mathcal{F} \circ f)_{\sigma(n-1)} \right).$$

Autrement dit,

$$G = \mathcal{F},$$

à permutations près. $\square$

C'est une des raisons pour laquelle la transformée de Fourier est si importante : elle est la seule fonction à transformer un produit de convolution en un produit usuel, plus simple à étudier.

2.2 Représentation géométrique de la TFD

Considérons un ensemble de s notes $A = \{x_0, x_1, \dots, x_{s-1}\} \subset \mathbb{Z}_{12}$. La transformée de Fourier discrète de cet ensemble est, selon la définition 2.3, l'ensemble des 12 coefficients de Fourier définis par :

$$a_k = \sum_{x \in A} \exp(-2i\pi kx/12)$$

selon la définition 2.3.

Rappelons que d'après la formule d'Euler, la fonction $x \mapsto \exp(ix)$ est la fonction qui décrit le cercle unité. Or, un ensemble de notes A pouvant être représenté par un ensemble de points sur le cycle de la gamme chromatique, lorsque l'on fait la somme des termes $\exp(-2i\pi kx/12)$, nous pouvons saisir l'intuition géométrique suivante :

Géométriquement, chaque coefficient de Fourier a_k s'interprète en repérant le barycentre B_k du multi-ensemble²

$$C_k = \{\exp(-2i\pi kx/12) \mid k \in \mathbb{Z}_{12}\}$$

dans le plan complexe à un facteur $a_0 = \text{Card}(A) = s$ près. L'ensemble C_k se calcule simplement de la façon suivante :

$$C_k = \{k \times x \mod 12 \text{ sur le cycle de la gamme chromatique} \mid x \in A\}.$$

D'où :

$$a_k = \text{Card}(C_k) \times \|\overrightarrow{\text{OB}_k}\|$$

où O est l'origine du cycle de la gamme chromatique.

2. Un multi-ensemble est un ensemble pouvant comporter plusieurs fois la même valeur.

Exemple 2.16. Soit $A = \{0, 3, 8\}$. Nous pouvons observer ses coefficients de Fourier a_k pour $k \in \{1, \dots, 6\}$ sous forme de barycentres de polygones sur les figures ci-dessous, où chaque triangle représente l'ensemble C_k pour chaque k donné et relativement à l'ensemble A considéré ici, et où le point Q correspond au barycentre B_k du triangle (parfois aplati) :

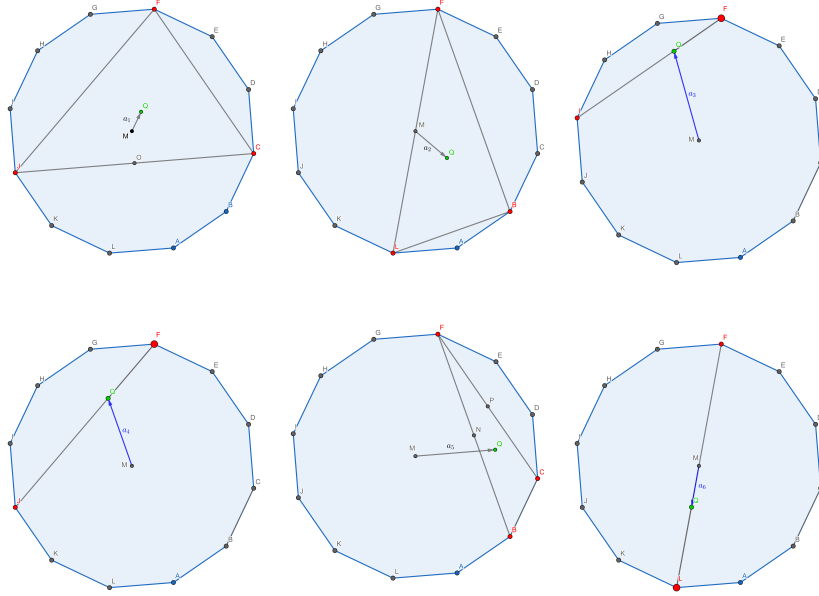


FIGURE 2.1 – Coefficients $a_1, \dots, a_6$ de $\{0, 3, 8\}$

Remarquons que les coefficients a_k pour $k \in \{7, \dots, 12\}$ ne sont que les symétriques des coefficients représentés ci-dessous selon la propriété 2.5. Notons aussi que les coefficients représentés sont abusivement les coefficients de Fourier à une constante multiplicative $a_0 = \text{Card}(A) = 3$.

3 Applications de la TFD

3.1 Théorème de l'hexacorde

Le théorème de l'hexacorde fut découvert expérimentalement par Milton Babbitt en 1955 et démontré dans les années 80 grâce à une idée de David Lewin [12]. Il s'exprime ainsi :

Théorème 3.1. Soit $\mathcal{H}$ un hexacorde et $\mathcal{H}^c := \mathbb{Z}_{12} \setminus \mathcal{H}$ son complémentaire. Alors

$$IC_{\mathcal{H}} = IC_{\mathcal{H}^c}.$$

Plusieurs démonstrations existent mais nous allons voir qu'une des plus élégantes repose sur la transformée de Fourier.

3.1.1 Démonstration à l'aide de la TFD

Proposition 3.2. Soit $\mathcal{H}$ un hexacorde (i.e. un ensemble de 6 notes). Alors $\forall k \in \mathbb{Z}_{12}$:

$$\phi_{\mathcal{H}}(k) = (\mathbb{1}_{\mathcal{H}} * (\mathbb{1}_{\mathcal{H}})_{\sigma})(k).$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{Z}_{12}$,

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_{\mathcal{H}} * (\mathbb{1}_{\mathcal{H}})_{\sigma})(k) &= \sum_{s=0}^{11} \mathbb{1}_{\mathcal{H}}(s) \mathbb{1}_{\mathcal{H}}(-(k-s)) = \sum_{s \in \mathcal{H}} \mathbb{1}_{\mathcal{H}}(s-k) \\ &= \sum_{(s,t) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, s-t=k} 1 = \phi_{\mathcal{H}}(k). \end{aligned}$$

□

Lemme 3.3. Soit $\mathcal{H}$ un hexacorde. Alors $\forall k \in \mathbb{Z}_{12}$:

$$\widehat{\phi}_{\mathcal{H}}(k) = \left| \widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{H}}}(k) \right|^2 = |\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(k)|^2.$$

Démonstration. D'après les propositions 3.2 et 2.13, on a : $\forall k \in \mathbb{Z}_{12}$,

$$\widehat{\phi}_{\mathcal{H}}(k) = \widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{H}}}(k) \widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{H}}}(-k) = \widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{H}}}(k) \overline{\widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{H}}}(k)} = \left| \widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{H}}}(k) \right|^2.$$

□

Lemme 3.4. Soit $\mathcal{H}$ un hexacorde. Alors $\forall x \neq 0$, $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = -\mathcal{F}_{\mathcal{H}^c}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(0) = \mathcal{F}_{\mathcal{H}^c}(0) = 6$.

Démonstration. Soit $x \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathcal{H}} + \mathcal{F}_{\mathcal{H}^c})(x) &= \sum_{k \in \mathcal{H}} \exp(-i\pi kx/6) + \sum_{k \in \mathcal{H}^c} \exp(-i\pi kx/6) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \exp(-i\pi kx/6) = \frac{1 - \exp(-2i\pi x)}{1 - \exp(-i\pi x/6)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $x = 0$, alors

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(0) = \sum_{k \in \mathcal{H}} 1 = \text{Card}(\mathcal{H}) = 6 = \text{Card}(\mathcal{H}^c) = \sum_{k \in \mathcal{H}^c} 1 = \mathcal{F}_{\mathcal{H}^c}(0).$$

□

Nous pouvons désormais démontrer le théorème de Babbitt simplement.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{Z}_{12}$. Alors

$$\widehat{\phi}_{\mathcal{H}}(k) = |\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(k)|^2 = |\mathcal{F}_{\mathcal{H}^c}(k)|^2 = \widehat{\phi}_{\mathcal{H}^c}(k).$$

Ainsi, en appliquant la transformée de Fourier inverse, on obtient : $\phi_{\mathcal{H}}(k) = \phi_{\mathcal{H}^c}(k)$. D'où

$$IC_{\mathcal{H}} = IC_{\mathcal{H}^c}.$$

□

3.1.2 Autres démonstrations

Il existe plusieurs démonstrations de ce théorème. Fox et Chemillier proposent deux démonstrations très générales basées sur les permutations tandis que Lewin utilise la théorie des ensembles. Blau démontre directement le théorème en s'appuyant sur des permutations de notes. Enfin, McCartin exprime ce théorème comme un corollaire des théorème de notes communes et théorème des accords complémentaires. Pour plus de détails concernant les sous-sections 3.1.3 et 3.1.4, nous pouvons nous référer au mémoire de Corentin Bayette [12].

3.1.3 Généralisation

La TFD étant définie sur $\mathbb{Z}_n$, il paraît naturel de généraliser ce résultat pour des ensembles de notes dans $\mathbb{Z}_n$. Une preuve analogue est immédiate pour des valeurs de n entier pair quelconque ; on considère dans ce cas des ensembles de $\frac{n}{2}$ notes.

De plus, il existe également une généralisation à des sous-ensembles quelconques S et T de $\mathbb{Z}_n : \forall k \in \mathbb{Z}_n$,

$$\phi_{S,T}(k) = \phi_{S^c,T^c}(k) - n + \text{Card}(S) + \text{Card}(T)$$

3.1.4 Cas continu

Une analogie peut être faite dans le cas continu. On généralise un ensemble d'intervalles à un groupe localement compact G et on introduit la « mesure de Haar » μ_H invariante par translation d'un élément $g \in G$. On étend également la définition d'intervalle à la notion de distance intervallique respectant les axiomes d'une distance usuelle.

La généralisation au cas continu de la définition du « contenu intervallique » d'une partie $A \subset G$ de mesure de Haar finie est la fonction qui renvoie, pour chaque élément $g \in G$, la mesure de l'ensemble des points à la fois dans A et à distance intervallique g de A .

Pour plus de détails, nous pourrions nous référer au mémoire de Corentin Bayette [12].

3.2 Canons rythmiques

Un canon rythmique est un canon traditionnel (superpositions décalées dans le temps d'une phrase musicale) où l'on ignore les hauteurs, timbres et autres paramètres du son ; on se focalise seulement sur les rythmes. Le précurseur de cette étude spécifique est Dan Tudor Vuza en 1985 dans [19]. De plus, notre étude se limitera aux canons rythmiques mosaïques où l'on exige une unique note par instant. Cela s'interprète mathématiquement par une somme directe. Ce problème de pavage est en lien direct avec le pavage de $\mathbb{R}^d$ étudié dans la conjecture de Fuglede en 1974 [2].

Définition 3.5. Soit $A, B \subset \mathbb{Z}$. Un canon rythmique est un couple (A, B) tel que $A \oplus B = \mathbb{Z}$.

Un canon rythmique de période $n \in \mathbb{N}^*$ est un couple (A, B) tel que

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_n.$$

A est appelé le motif du canon, et B est la séquence d'entrées.

On dit aussi que A et B pavent $\mathbb{Z}_n$.

Exemple 3.6. $\{0, 4, 8\}$ et $\{0, 1, 2, 3\}$ pavent $\mathbb{Z}_{12}$.

Cette définition se caractérise par le produit de convolution des fonctions caractéristiques des ensembles A et B .

Proposition 3.7. Soit $A, B \subset \mathbb{Z}$. Alors

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_n \iff \mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_n}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{Z}$. D'après la proposition 1.9, on a :

$$(\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B)(x) = \phi_{A,B}(x) = \sum_{\{k \in A, l \in B, x=l+k\}} 1.$$

Or, $A \oplus B = \mathbb{Z}_n \iff \{k \in A, l \in B, x = l + k\} = \mathbb{Z}_n$. D'où

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_n \iff \mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_n}.$$

□

Exemple 3.8. Reprenons l'exemple précédent. Soit $x \in \mathbb{Z}_{12}$, on a en effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\{0,4,8\}} * \mathbb{1}_{\{0,1,2,3\}}(x) &= \sum_{k=0}^{11} \mathbb{1}_{\{0,4,8\}}(k) \mathbb{1}_{\{0,1,2,3\}}(x-k) \\ &= \sum_{k \in \{0,4,8\}, x \in k + \{0,1,2,3\}} 1 = \sum_{x \in \mathbb{Z}_{12}} 1 = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_{12}}(x). \end{aligned}$$

Une conséquence immédiate et fondamentale de cette propriété est le théorème suivant :

Théorème 3.9. Soit $A, B \subset \mathbb{Z}$. Alors

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_n \iff \widehat{\mathbb{1}_A} \widehat{\mathbb{1}_B} = \widehat{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_n}} = n\delta$$

où δ est la masse de Dirac en 0.

Démonstration. Supposons que $A \oplus B = \mathbb{Z}_n$.

On applique la propriété 2.13 à la caractérisation d'un canon rythmique énoncée ci-dessus et on obtient directement l'égalité voulue.

Réciproquement, il suffit d'appliquer la transformée de Fourier inverse. $\square$

On peut aussi reformuler ce théorème sous forme d'un produit de polynômes.

Définition 3.10. Soit $A \subset \mathbb{Z}_n$. Le polynôme caractéristique du sous-ensemble A est défini par :

$$A(X) = \sum_{k \in A} X^k.$$

De ce fait, la transformée de Fourier de A devient : $\forall x \in \mathbb{Z}_n$,

$$\widehat{1_A}(x) = A(\exp(-2i\pi x/n)).$$

D'où un corollaire du théorème 3.9 :

Corollaire 3.11. Soit $A, B \subset \mathbb{Z}$. Alors :

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_n \iff A(X) \times B(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} \pmod{(X^n - 1)}.$$

Démonstration. Le sens indirect ($\implies$) est trivial : il suffit d'évaluer chaque membre de l'équation en $X = \exp(-2i\pi x/n)$ en notant que

$$\zeta := \exp(-2i\pi k/n)$$

est la racine primitive n -ième de l'unité et d'appliquer le théorème 3.9.

Réciproquement, supposons que $A \oplus B = \mathbb{Z}_n$. Alors le théorème 3.9 nous fournit l'égalité voulue en $X = \zeta^x$ pour chaque $x \in \mathbb{Z}_n$. Donc

$$A(X) \times B(X) - P(X) = \prod_{k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}} (X - \zeta^k) \times Q(X) \pmod{(X^n - 1)}$$

où l'on note $P(X) = 1 + X + \dots + X^{n-1}$ et Q un polynôme quelconque. $A \times B - P$ est donc un polynôme de degré $n - 1$ ayant n racines distinctes ; c'est donc le polynôme nul. D'où $A \times B = P$. $\square$

Ainsi, afin de savoir si un couple (A, B) est un canon rythmique de période n , il suffit d'étudier les zéros des transformées de Fourier de leurs fonctions caractéristiques. Cela motive la définition qui suit.

Définition 3.12. Soit $A \subset \mathbb{Z}$. L'ensemble des zéros de la TFD de A est :

$$Z(A) := \left\{ x \in \mathbb{Z}_n / \widehat{1_A}(x) = 0 \right\}.$$

Du théorème ci-dessus et de cette définition, il vient :

Corollaire 3.13. Soit $A, B \subset \mathbb{Z}$. Alors

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_n \iff Z(A) \cup Z(B) = \mathbb{Z}_n \setminus \{0\} \text{ et } \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = n.$$

Démonstration. C'est une simple reformulation du théorème 3.9 où les deux conditions de l'implication réciproque ($\Longleftrightarrow$) traduisent la condition $\widehat{\mathbb{1}_A} \widehat{\mathbb{1}_B} = n \mathbb{1}_{\{x=0\}}$. $\square$

Exemple 3.14. Soit $A = \{0, 2, 5, 7\}$ et $B = \{0, 4, 8\}$. Alors $A \oplus B = \mathbb{Z}_{12}$. Donc A et B pavent $\mathbb{Z}_{12}$. Vérifions l'équivalence :

$$Z(A) = \{3, 6, 9\}, Z(B) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\},$$

donc $Z(A) \cup Z(B) = \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ et

$$\text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 4 \times 3 = 12.$$

Théorème 3.15. Soit $A, A', B \subset \mathbb{Z}$. Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \oplus B = \mathbb{Z}_n \\ IC_{A'} = IC_A \end{array} \right\} \implies A' \oplus B = \mathbb{Z}_n.$$

Démonstration. Supposons que $A \oplus B = \mathbb{Z}_n$. Alors

$$\widehat{\mathbb{1}_A} \widehat{\mathbb{1}_B} = \widehat{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_n}}.$$

Or,

$$IC_{A'} = IC_A.$$

Donc $\forall k \in \mathbb{Z}_n, \phi_A(k) = \phi_{A'}(k)$, d'où $\forall k \in \mathbb{Z}_n, \widehat{\phi_A}(k) = \widehat{\phi_{A'}}(k)$. On applique la proposition 1.9 pour obtenir $\widehat{\mathbb{1}_A}^2 = \widehat{\mathbb{1}_{A'}}^2$, d'où

$$\widehat{\mathbb{1}_A} = \widehat{\mathbb{1}_{A'}}.$$

Ainsi, $\widehat{\mathbb{1}_{A'}} \widehat{\mathbb{1}_B} = \widehat{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_n}}$ et finalement :

$$A' \oplus B = \mathbb{Z}_n.$$

$\square$

Exemple 3.16. Soit $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1\}$. Alors A et B pavent $\mathbb{Z}_{12}$. A étant un hexacorde, on sait d'après le théorème de l'hexacorde étudié en section 3.1 que pour $A' = \mathbb{Z}_{12} \setminus A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ on a $IC_A = IC_{A'}$. Or A' et B pavent aussi $\mathbb{Z}_{12}$. Le théorème est ainsi vérifié.

3.3 Gammes et structures bien réparties

3.3.1 Approche intuitive

Cette notion de « Gamme bien répartie » (GBR) ou « Maximally even set » fut introduite en 1991 par le musicologue John Clough et le mathématicien Jack Douthett [13]. Cela consiste à choisir d notes parmi n réparties les plus également possible. Le souci réside donc dans la bonne définition des termes « bien réparties ». Intuitivement, on souhaite maximiser la somme des intervalles

entre chaque note afin que chaque notes consécutives soient séparées, le plus possible, du même nombre de demi-tons. Il est plus facile de comprendre cela géométriquement à l'aide d'une représentation cyclique : les polygones réguliers à d cotés dans un cycle de n notes sont les meilleures GBR de d points parmi n : on les note $GBR_{n,d}$.

Exemple 3.17. Voici 2 exemples de GBR [13].

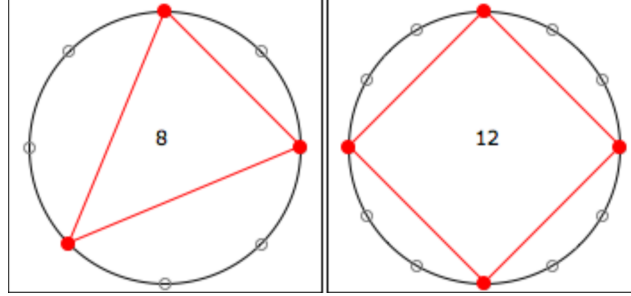


FIGURE 3.1 – $GBR_{8,3}$ et $GBR_{12,4}$

Il existe alors 4 types de GBR, dépendant de la quantité $\text{pgcd}(d, n)$. Le premier type, noté $GBR_{n,d}I$, est obtenu lorsque $\text{pgcd}(d, n) = 1$. Le second type, noté $GBR_{n,d}II_a$, correspond au cas où $\text{pgcd}(d, n) = d$, i.e. $d \mid n$; le troisième type est noté $GBR_{n,d}II_b$ et est le complémentaire du type II_a au sens où c'est le cas où $1 < \text{pgcd}(d, n) = n - d < d$. Enfin, le dernier cas où $1 < \text{pgcd}(n, d) < d$ et $\text{pgcd}(n, d) \neq n - d$ est noté $GBR_{n,d}III$.

3.3.2 Approche par la TFD

Cette sous-section reprend les démonstrations de manière un peu plus détaillée de l'article [3].

On a vu que la notion des gammes bien réparties pouvait se comprendre géométriquement mais cela ne nous donne pas une définition rigoureuse de ce qu'est réellement une GBR. Nous allons donc voir qu'il est aussi possible de définir la notion des gammes bien réparties à l'aide de la TFD.

Définition 3.18. Soit $A \subset \mathbb{Z}_n$ de cardinal d . On dit que A est une gamme bien répartie si $\forall B \subset \mathbb{Z}_n, \text{Card}(B) = d$,

$$|\mathcal{F}_A(d)| \geq |\mathcal{F}_B(d)|.$$

En effet, cette définition est motivée par la propriété 2.6 qui indique que chaque module d'un coefficient de Fourier, donc en particulier le d -ième, est inférieur à d , et le théorème suivant permettant de caractériser une gamme comme étant bien répartie si et seulement si le module de son d -ième coefficient de Fourier est égal à d .

Théorème 3.19. Soit $A \subset \mathbb{Z}_n$ de cardinal d . Alors A est un polygone régulier (i.e. A est de la forme $\{x_0, x_0 + \frac{n}{d}, x_0 + 2\frac{n}{d}, \dots, x_0 + (d-1)\frac{n}{d}\}$ où $x_0 \in \mathbb{Z}_n$) si et seulement si $|\mathcal{F}_A(d)| = d$.

Démonstration.

— Supposons dans un premier temps que A soit un polygone régulier. Par rotation, nous pouvons nous ramener au cas où $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_A(d)| &= \left| \sum_{x \in A} \exp(-2i\pi xd/n) \right| = \left| \sum_{l=0}^{d-1} \exp(-2i\pi l(n/d)d/n) \right| \\ &= \left| \sum_{l=0}^{d-1} \underbrace{\exp(-2i\pi l)}_{=1} \right| = d \end{aligned}$$

— Réciproquement, supposons que $|\mathcal{F}_A(d)| = d = \text{Card}(A)$. Or

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_A(d)| &= \left| \sum_{x \in A} \exp(-2i\pi xd/n) \right| \leq \sum_{x \in A} \underbrace{|\exp(-2i\pi xd/n)|}_{=1} \\ &\leq \text{Card}(A) = d \end{aligned}$$

avec égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si

$$\forall x, y \in A, -2i\pi xd/n \equiv -2i\pi yd/n \pmod{2\pi},$$

i.e. si et seulement si $\forall x, y \in A, (x - y)d/n$ est un entier modulo n . Soit $x_0 \in A$. Alors on doit avoir :

$$\forall x \in A, (x - x_0)d/n \in \mathbb{Z}_n.$$

Or $\text{Card}(A) = d$. Donc on a d valeurs entières distinctes $(x - x_0)d/n \in \mathbb{Z}_n$. D'où n/d divise chaque $x - x_0$ et donc aussi leur pgcd, que l'on notera p :

$$n/d \text{ divise } p.$$

De plus, par définition, p divise chaque $x - x_0, x \in A \subset \mathbb{Z}_n$. Donc p divise d valeurs distinctes toutes dans $\mathbb{Z}_n$. Donc nécessairement

$$p \leq n/d.$$

Ainsi, on obtient $p = n/d$, et finalement n/d divise chaque $x - x_0, x \in A$. D'où :

$$\forall x \in A, x = x_0 + kn/d, k \in \mathbb{Z}_d.$$

A est ainsi un polygone régulier (de la forme escomptée). □

Proposition 3.20. Le complémentaire d'une GBR est une GBR.

Démonstration. Soit $A \subset \mathbb{Z}_n$ de cardinal $d \neq n$. D'après les théorèmes 2.7 et 2.5, on a :

$$|\mathcal{F}_A(d)| = |-\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_n \setminus A}(d)| = |\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_n \setminus A}(d)| = \left| \overline{\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_n \setminus A}(n-d)} \right| = |\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_n \setminus A}(n-d)|.$$

Soit $B \subset \mathbb{Z}_n$ de cardinal d . Alors

$$|\mathcal{F}_A(d)| > |\mathcal{F}_B(d)| \iff |\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_n \setminus A}(n-d)| > |\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_n \setminus B}(n-d)| = |\mathcal{F}_C(n-d)|$$

où $C = \mathbb{Z}_n \setminus B$ est une partie de cardinal $n-d$ de $\mathbb{Z}_n$. Donc A est un GBR si et seulement si $\mathbb{Z}_n \setminus A$ l'est. $\square$

Exemple 3.21. Pour $n = 12$ et $d = 7$:

La gamme diatonique (do, re, mi, fa, sol, la, si) est une GBR.

La GBR complémentaire est la gamme pentatonique (do♯, re♯, fa♯, sol♯, la♯).

3.4 Tore des phases

Dans cette sous-section, nous allons nous intéresser, non plus aux modules des coefficients de Fourier, mais à leurs phases, i.e. les angles des coefficients. En effet, nous allons analyser les coefficients de Fourier des triades majeures ou mineures, et d'après le théorème suivant, les modules ne varient pas d'une triade à une autre (majeure ou mineure).

Théorème 3.22. Tous les accords parfaits majeurs ou mineurs partagent les mêmes coefficients de Fourier en modules.

Démonstration. D'après la propriété 2.9, deux accords dans la même orbite sous l'action du groupe T/I (diffèrent donc d'une transposition et/ou inversion) partagent les mêmes coefficients de Fourier. Or, d'après le théorème 1.16, toutes les triades majeures ou mineures appartiennent à la même orbite sous l'action du groupe T/I , d'où le résultat. $\square$

Nous avons développé un code python implémentant des fonctions permettant de :

- calculer la transformée de Fourier d'un ensemble de notes A
- calculer le module de chaque coefficient de Fourier

```

from cmath import *
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# A représente un ensemble de classes de hauteurs
# n = 12 sera la valeur prise en général

def TFD(A,k,n):
    s=0
    for a in A:
        s+=exp(-2*complex(0,1)*k*pi*a/n)
    return s

def module(z):
    return(sqrt((z.real)**2+(z.imag)**2).real)

```

Algorithme 1 Programme de la TFD

En appliquant ce programme à l'accord parfait de Lab majeur $A = \{0, 3, 8\}$, on obtient les valeurs des modules de ses coefficients de Fourier qui sont, d'après la proposition 3.22, les mêmes pour toute autre triade, ce que l'on peut aussi vérifier à l'aide du code ci-dessus. Le code permettant d'afficher les valeurs du tableau 3 est le suivant :

```

for k in range(12):
    print(module(TFD([0,3,8],k,12)))

```

Algorithme 2 Application à $\{0, 3, 8\}$

$ a_0 $	3
$ a_1 $	0.51764
$ a_2 $	1.0
$ a_3 $	2.23607
$ a_4 $	1.73205
$ a_5 $	1.93185
$ a_6 $	1.0
$ a_7 $	1.93185
$ a_8 $	1.73205
$ a_9 $	2.23607
$ a_{10} $	1.0
$ a_{11} $	0.51764

TABLE 3 – Modules des coefficients de Fourier d’une triade

On remarque, conformément à la proposition 2.5, la symétrie des coefficients par rapport au coefficient a_6 , mise à part le coefficient $a_0 = \text{Card}\{\text{triade}\} = 3$. De plus, les coefficients les plus importants sont a_3 et a_5 . Cela signifie qu’une triade majeure/mineure comporte plus de tierces et quintes qu’un accord chromatique ou diatonique, ce qui se comprend aisément par définition d’un accord parfait.

Remarque 3.23. Notons que l’on ne considère ici que les accords majeurs et mineurs, et non tous les accords quelconques de 3 sons. En effet, en appliquant le code ci-dessus à la triade $A = \{0, 1, 5\}$, nous obtenons des valeurs complètement différentes des valeurs du tableau 2, mise à part le coefficient $a_0 = 3$ bien évidemment.

Intéressons-nous donc désormais aux phases des coefficients de Fourier d’une triade majeure ou mineure. Pour observer les trajectoires des phases d’un coefficient a_k , il suffit de se placer dans le cercle de rayon $r = |a_k|$. On considère de ce fait 6 cercles, de rayons $|a_0|, |a_2|, \dots, |a_6|$. En effet, la phase de a_0 est nulle et la propriété 2.5 indique la redondance des coefficients de a_7 jusqu’à a_{11} . Nous considérons donc un produit de 6 cercles, appelé un tore de dimension 6. Afin de pouvoir observer les trajectoires, il est plus simple de se placer sur un tore en 2 dimensions. On choisit de considérer le tore défini par les coefficients a_3 et a_5 car l’on peut vérifier dans l’écrit [6] que les 24 triades majeures/mineures présentent des couples $(\arg(a_3), \arg(a_5))$ tous différents.

Définition 3.24. Soit A un ensemble de notes dont les coefficients de Fourier sont notés a_k pour $k \in \mathbb{Z}_{12}$. On définit le 3-5-Tore associé dans le plan complexe par les équations

$$\begin{cases} |a_3| = 2.236 \\ |a_5| = 1.932 \end{cases} ,$$

paramétré par

$$(\arg(a_3), \arg(a_5)) .$$

Graphiquement, la représentation est la suivante :

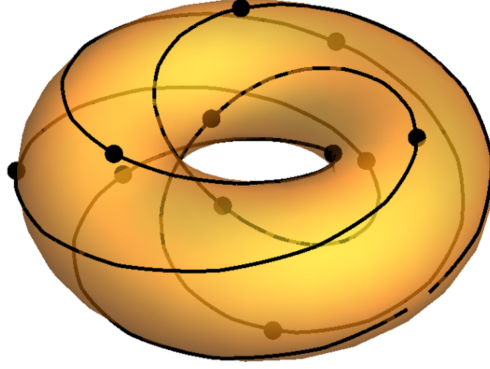


FIGURE 3.2 – 3-5-Tore

La courbe continue que l'on observe sur le Tore est l'orbite des triades majeures/mineures mentionnée dans le théorème 1.16. Remarquons cependant que cette représentation est en fait identique à la représentation plane suivante qui paraît plus facile à étudier :

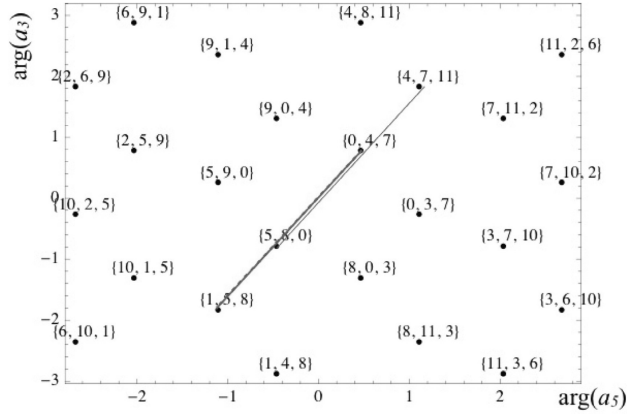


FIGURE 3.3 – 3-5-Tore déplié

En effet, la figure 3.2 est simplement obtenue en identifiant les côtés opposés de la figure 3.3. De plus, nous constatons que cette illustration ressemble fortement à celle du Tonnetz 1.3. Cela n'est pas étonnant car les arguments des coefficients de Fourier d'indices 3 et 5 sont plus proches entre 2 triades ayant

une différence d'une seule note plutôt qu'entre 2 triades n'ayant pas ou 1 seule note en commun. Or, le fait de basculer d'un accord à un autre en modifiant un seul élément est une des 3 relations LPR qui forment le Tonnetz $T[3, 4, 5]$, d'où la configuration semblable. Pour plus de détails, nous pouvons nous référer à l'article [6] d'Emmanuel Amiot.

4 Bilan

En conclusion, malgré que la Transformée de Fourier dans le cas continu soit bien plus connue dans le domaine d'étude des signaux, son application dans le cas discret à des ensembles algébriques est tout aussi remarquable. En effet, cela permet dans un premier temps d'analyser la périodicité d'un ensemble de notes donné et sa représentation géométrique est très intuitive. De plus, l'étude des modules de ses coefficients permet de renseigner le contenu intervallique d'un ensemble de classes de hauteurs et de caractériser rigoureusement la notion des gammes bien réparties. Les phases de ses coefficients permettent aussi de représenter le tonnetz, un outil incontournable dans l'analyse musicale.

De surcroît, l'une des caractéristiques les plus importantes de la TFD est sa capacité à transformer un produit de convolution en un produit usuel bien plus aisé d'utilisation, une propriété qui s'avéra être une astuce clé dans la démonstration du théorème de l'hexacorde et qui peut encore montrer toute son importance dans l'étude des différences finies. En effet, c'est une idée récente et non aboutie pour l'instant mais il est certain que faire un produit de convolution par $(0, \dots, 0, -1, 1, 0, \dots, 0)$ permet de faire la « dérivée » d'une suite de notes. Ainsi, nous sommes encore loin de connaître les nombreuses applications de la TFD, un outil dont nous nous rendons compte de sa puissance au fil du temps.

La TFD aide aussi dans l'étude des canons rythmiques, un problème de pavage directement lié à la conjecture de Fuglede exprimée en 1974 : « Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue positive finie est un ensemble spectral si et seulement si il pave $\mathbb{R}^d$ par translations » [2]. C'est un problème mathématique qui reste ouvert et l'on comprend aisément que la musique, et plus précisément la transformée de Fourier discrète, permet de résoudre des problèmes mathématiques, aboutissement tout à fait remarquable : la musique permet d'approfondir des résultats mathématiques.

Références

- [1] Emmanuel Amiot, « Discrete Fourier Transform and Bach's Good Temperament », *Society for Music Theory*, Vol 15, No. 2, 2008.
- [2] Emmanuel Amiot et Eric W. Weisstein, « Fuglede's Conjecture », dans « MathWorld, A Wolfram Web Resource » (<http://mathworld.wolfram.com/FugledesConjecture.html>).
- [3] Emmanuel Amiot, « Gammes bien réparties et transformée de Fourier discrète », *Mathématiques & Sciences humaines*, OpenEdition journals, EHESS, No. 178, p. 95–118, 2007.
- [4] Emmanuel Amiot, *Music Through Fourier Space*, Springer, Strasbourg, 2016.
- [5] Emmanuel Amiot, « Structures, Algorithms and Algebraic Tools for Rhythmic Canons », *Perspectives of New Music*, Vol 49, No. 2, p. 93-142, 2011.
- [6] Emmanuel Amiot, « The Torii of Phases », Proceedings MCM Conference 2013, Montreal, QC, Canada, Springer, p. 19-25, 2013.
- [7] Emmanuel Amiot, « Une preuve élégante du théorème de Babbitt par transformée de Fourier discrète », *Quadrature*, No. 61, 2006.
- [8] Moreno Andreatta, "From Music to Mathematics and Backwards : Introducing Algebra, Topology and Category Theory into Computational Musicology », in Michele Emmer and Marco Abate (eds.), *Imagine Math 6 - Mathematics and Culture*, XXth Anniversary, Springer, 2018, pp. 77-88.
- [9] Moreno Andreatta, « Math'n pop : symétries et cycles hamiltoniens en chanson », *Tangente, Mathématique, de l'esthétique à l'éthique*, n° 51, p. 92-97, 2014
- [10] Moreno Andreatta, Dan T. Vuza, « On some properties of periodic sequences in Anatalo Vieru's modal theory », *Tatra Mountains Mathematical Publications*, No. 23, p. 1-15, 2001.
- [11] Moreno Andreatta, « Une introduction musicologique à la recherche "mathémusicale" : aspects théoriques et enjeux épistémologiques », *Circuit*, Vol. 24, No. 2, 14 juillet 2013.
- [12] Corentin Bayette, *Théorème de l'Hexacorde*, Mémoire de Master 1, Université de Strasbourg, 2018.
- [13] Pierre Beauguitte, *Transformée de Fourier discrète et structures musicales*, Mémoire de Master 2, Université de Pierre et Marie Curie, 2011.
- [14] Hélianthe Caure, *Outils algébriques pour l'étude des canons rythmiques mosaïques et du pavage modulo p*, Mémoire de Master 2, Université Pierre et Marie Curie, juillet 2013.
- [15] Alissa S. Crans, Thomas M. Fiore, Ramon Satyendra, « Musical Actions of Dihedral Groups », *The American Mathematical Monthly*, Vol. 116, No. 6, p. 479-495, 2009.

- [16] Paul Lascabettes, *Homologie Persistante Appliquée à la Reconnaissance de Genres Musicaux*, Mémoire de Master 1, Ecole normale supérieure Paris Saclay, Strasbourg, 2018.
- [17] Gottfried Wilhelm Leibniz, Lettre à Ch. Goldbach, 1712.
- [18] Nicolas Meeùs, « Théorie des vecteurs harmoniques et théorie néo-riemannienne », Proceedings of the International Conference on Music Analysis, Dublin, 23 juin 2005. En ligne à l'adresse : <http://nicolas.meeus.free.fr/NMVecteurs/VHDublin.pdf>
- [19] Dan T. Vuza, « Sur le rythme périodique », *Revue Roumaine de Linguistique-Cahiers de Linguistique Théorique et Appliquée*, Vol. 22, No. 1, p. 173–188, 1985.