

UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2  
MASTER 2 MATHÉMATIQUES STATISTIQUES ET  
APPLICATIONS

Mémoire de stage  
21 août 2014

# Matroïdes et graphes dans la théorie musicale

Guillaume Baixas

## Encadrants

Jorge Ramirez Alfonsin  
UM2

Moreno Andreatta  
IRCAM

## Remerciements

Merci tout d'abord à Moreno Andreatta et Jorge Ramirez d'avoir accepté de m'encadrer sur un sujet à cheval sur leurs deux spécialités respectives, et de m'avoir suivi tout au long de l'été.

Merci à Emmanuel Amiot, de m'avoir encouragé, de m'avoir également soutenu, et de m'avoir donné l'idée et l'envie de m'engager sur des sujets mêlant mathématiques et musique.

Merci enfin à Louis Bigo, d'avoir accepté de répondre à mes interrogations et de s'être intéressé à mon travail.

# Table des matières

Remerciements . . . . .	1
<b>1 Introduction</b>	<b>4</b>
1.1 Historique . . . . .	4
1.2 Éléments de théorie musicale . . . . .	5
1.2.1 Tempérament égal . . . . .	5
1.2.2 Intervalle et accords . . . . .	5
1.2.3 Opérations musicales . . . . .	6
<b>2 Théorie des graphes</b>	<b>9</b>
2.1 Graphes . . . . .	9
2.1.1 Notions de base . . . . .	9
2.1.2 Graphes particuliers . . . . .	12
2.2 Propriétés des graphes . . . . .	12
2.2.1 Quelques définitions . . . . .	13
2.2.2 Quelques propriétés des graphes planaires . . . . .	15
<b>3 Théorie des Matroïdes</b>	<b>17</b>
3.1 Définitions et propriétés . . . . .	17
3.1.1 Définition par les indépendants . . . . .	17
3.1.2 Définition par les circuits . . . . .	18
3.1.3 Définition par les bases . . . . .	20
3.1.4 Définition par le rang . . . . .	21
3.1.5 Connexité . . . . .	22
3.2 Mineurs . . . . .	23
3.2.1 La suppression . . . . .	23
3.2.2 la contraction . . . . .	24
3.2.3 Propriétés de la contraction et de la suppression . . . . .	25
3.2.4 Matroïde dual . . . . .	26
3.3 Polynôme de Tutte . . . . .	27
<b>4 Complexes simpliciaux et complexes d'accords</b>	<b>31</b>
4.1 Complexes simpliciaux . . . . .	31
4.1.1 Complexes cellulaires . . . . .	31
4.1.2 Complexes simpliciaux . . . . .	32

4.1.3	Collection topologique . . . . .	33
4.1.4	Morphisme de collection topologique . . . . .	33
4.1.5	Pliage de collections topologiques . . . . .	34
4.2	Complexe d'accords . . . . .	34
4.2.1	Construction . . . . .	34
4.2.2	Classes d'accords . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Théorie des graphes et matroïdes sur les complexes d'accords</b>	<b>38</b>
5.1	Matroïde sur un complexe simplicial . . . . .	38
5.1.1	Construction . . . . .	38
5.2	Théorie des graphes sur les 1-squelettes . . . . .	40
5.2.1	Connexité des complexes d'accords . . . . .	40
5.2.2	Aspect planaire des 1-squelettes de complexes d'accords	42
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>49</b>
6.1	Travail effectué . . . . .	49
6.2	Perspectives . . . . .	49

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Historique

Depuis la Grèce antique, la théorie musicale est liée aux mathématiques. L'un des premiers à avoir décrit la construction des différentes notes de musique est Pythagore, remarquant les relations de longueur entre la longueur d'une corde et le son qu'elle émet lorsqu'elle vibre. Ainsi, il détermine les rapports entre une note, sa quarte, sa quinte, et son octave. En effet, si l'on prend une corde tendue, elle émet une note (par exemple un do). Si on la pince aux trois quarts, réduisant ainsi d'un quart la taille de la corde, elle émettra le son d'un fa, c'est-à-dire la quarte du do. Si maintenant, on la pince aux deux tiers, elle émettra un sol, la quinte du do. Si enfin, on la pince à la moitié, elle émettra un do à l'octave supérieure. Cet aspect là est en fait lié à la fréquence de la note, si on pince la corde à la moitié, on multiplie la fréquence par deux, aux  $2/3$  on multiplie par  $3/2$  et ainsi de suite. L'octave donne ainsi une relation d'équivalence. On retrouve ensuite une idée de graphe chez Euler, avec le *Speculum Musicum*, dans lequel il place les notes de musique sur une grille, selon des intervalles (figure 1.1). C'est une grille  $3 \times 4$  dans laquelle lorsqu'on se déplace vers la droite, on prend la quinte de la note précédente, et lorsqu'on fait un déplacement vers le bas, c'est la tierce majeure de la note de départ que l'on obtient.

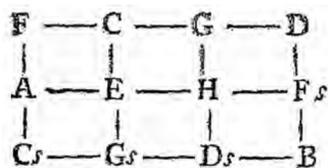


FIGURE 1.1 – Le Tonnetz

Après ceci, d'autres modèles sont également apparus, comme par exemple le

récent modèle Planet-4D, créé par Gilles Baroin, utilisant la théorie des graphes, entre autres.

Dans ce mémoire, nous allons principalement utiliser la théorie des graphes, des complexes simpliciaux et introduire la notion de matroïde.

## 1.2 Éléments de théorie musicale

### 1.2.1 Tempérament égal

Lors de la construction décrite par Pythagore, on se rend compte que l'ensemble des notes ainsi créé est infini. En effet, construisons des notes par quintes successives. Supposons que l'ensemble des notes soit fini par cette construction. Alors, il existe  $n$  et  $m$  tels que  $2^n = 3/2^m$ , ce qui est impossible.

Pourtant, la musique occidentale telle que nous la pratiquons et la connaissons maintenant ne comporte que douze notes distinctes à octave près. C'est en fait une autre construction, décrite par le mathématicien Simon Stevin, qui répartit les notes dans une octave de la façon suivante :

Soit une note  $n$  correspondant à une fréquence  $f$  que l'on prendra pour référence. Alors l'ensemble des douze notes se construit en multipliant  $f$  par  $r = \sqrt[12]{2}$ . Alors, toutes les octaves d'une note de fréquence  $2^{m/12}f$  avec  $m \leq 12$  s'expriment de façon  $2^p 2^{m/12}f$  et ceci correspond exactement à la construction de la même note (en prenant le même  $m$ ) en partant de la note  $n$   $p$  octaves au dessus. Une note représente alors dans ce contexte une classe de hauteur. De plus, on pourra également les noter de 0 à 11

Ici, l'idée importante est surtout que l'ensemble des notes est désormais fini. Certaines des notions que nous manipulerons par la suite pourront s'utiliser indifféremment du nombre de notes tant que celui-ci reste fini.

### 1.2.2 Intervalle et accords

**Définition 1.2.1.** *Un intervalle est défini comme l'écart entre deux classes de hauteurs. On les désignera le plus souvent ici par la différence entre 2 notes. Par exemple, une quinte c'est 7 demi-tons, donc 7. C'est l'écart entre un do (0) et un sol (7) ou un ré (2) et un la (9).*

Munis de l'addition, les intervalles forment un groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}_{12}$ . En effet, si on ajoute une tierce mineure et une tierce majeure, respectivement 3 et 4, on obtient 7, soit une quinte. Et si on ajoute une quinte et une quarte, on obtient une octave, qui est l'intervalle entre deux notes de la même classe de hauteurs.

**Définition 1.2.2.** *Un accord est un ensemble de notes jouées simultanément.*

Par exemple, un accord de do mineur sera représenté par l'ensemble  $\{0, 3, 7\}$  de classes de hauteurs. On peut alors regarder la structure intervallique de l'accord, qui nous renseigne sur les intervalles successifs présents dans l'accord. On la note  $[i_1, i_2, \dots, i_k]$ ,  $k$  étant le nombre de notes de l'accord et les  $i_j$  étant l'intervalle permettant de passer de la  $j$ -ième note à la  $j + 1$ -ième, et  $i_k$  représente l'intervalle de la  $k$ -ième à la première. Pour l'accord de do mineur, cela s'écrit  $[3, 4, 5]$ . On notera d'ailleurs que la somme des coefficients  $i_j$  donne systématiquement 12 (ou dans le cas général le nombre de classes de hauteurs considérées).

### 1.2.3 Opérations musicales

**Définition 1.2.3.** *Une transposition est une opération appliquée sur un accord consistant à faire monter ou descendre toutes les notes de l'accord d'un intervalle  $a$ . Elle correspond à une action du groupe des intervalles sur l'ensemble des classes de hauteurs.*

En effet, prenons toujours l'accord de do mineur  $\{0, 3, 7\}$  et transposons-le d'un triton, qui vaut 6 demi-tons. Alors l'accord transposé sera  $\{6, 9, 1\}$ . La même addition étant appliquée à tous les éléments de l'accord, cette opération conserve la structure intervallique de l'accord, n'étant composée que de différences entre les éléments de l'ensemble.

**Définition 1.2.4.** *Une inversion consiste à inverser l'ordre des intervalles de l'accord suivant la note de départ. On conserve alors tous les intervalles de l'accord, mais sa structure intervallique est inversée.*

Regardons toujours l'exemple du do mineur que nous allons inverser suivant  $0$ . Sa structure intervallique devient  $[5, 4, 3]$ , ce qui donne l'accord  $\{0, 5, 9\}$ .

Il faut noter que ces deux transformations ont une signification géométrique. En effet, si l'on place les classes de hauteurs sur un cercle ainsi que l'accord, cela donne un triangle inscrit dans le cercle (figure 1.2).

Maintenant, traçons l'accord de do mineur inversé. On observe qu'il est le symétrique de l'accord de départ par rapport à l'axe passant par  $0$  et  $6$ , c'est-à-dire le diamètre du cercle passant par la classe de hauteur  $0$  (figure 1.3).

La transposition d'intervalle  $a$  est elle une rotation d'angle  $-a\pi/6$ . (figure 1.4)

A la différence des deux précédentes opérations, on peut parler d'une troisième qui ne conserve aucune propriété de la structure intervallique.

**Définition 1.2.5.** *Une multiplication des classes de hauteurs d'un accord consiste à multiplier toutes les classes de hauteurs par un  $p$  appartenant à  $\mathbb{Z}_N$ ,  $N$  étant le cardinal des classes de hauteurs considérées.*

Afin que l'opération soit bijective, on ne peut prendre qu'un  $p$  inversible. Dans  $\mathbb{Z}_{12}$ , cela correspond à prendre  $1, 5, 7$  ou  $11$ , avec  $1$  donnant l'identité et  $11$  l'inversion. A titre d'exemple, regardons la multiplication par  $5$  d'un accord à 4 notes  $\{0, 4, 7, 11\}$  (figure 1.5)

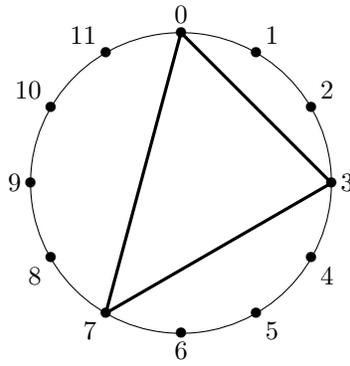


FIGURE 1.2 – Accord de do mineur

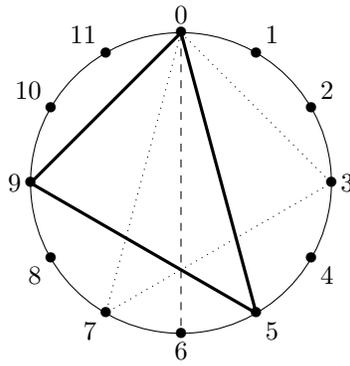


FIGURE 1.3 – Accord de do mineur inversé

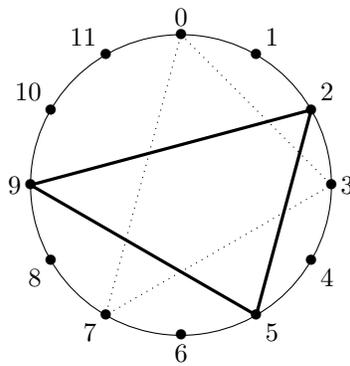


FIGURE 1.4 – Accord de do mineur transposé à +2

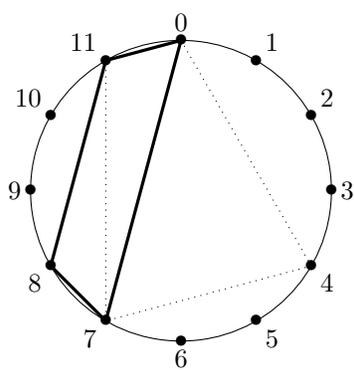


FIGURE 1.5 – Accord de do septième majeur après multiplication par 5

## Chapitre 2

# Théorie des graphes

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques éléments de la théorie des graphes, qui vont être utiles par la suite, notamment pour illustrer les matroïdes et comprendre en quoi ils sont utiles.

### 2.1 Graphes

#### 2.1.1 Notions de base

Un graphe est un objet mathématique permettant l'étude de problèmes de mathématiques discrètes. Le premier exemple connu est donné par Euler en 1759 dans *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* avec le problème des sept ponts de Königsberg, qui consiste à déterminer l'existence d'un chemin fermé passant par chacun des sept ponts de la ville une et une seule fois. Tout graphe permettant l'existence d'un tel chemin est appelé un graphe Eulérien.

**Définition 2.1.1.** *Un graphe  $G = (V, E)$  est la donnée d'un ensemble  $V$  dont les éléments sont les sommets du graphe et d'un ensemble  $A$  dont les éléments sont appelés arêtes.*

A titre d'exemple, regardons le graphe donné par le problème des sept ponts (figure 2.1)

Diverses propriétés des graphes peuvent être étudiées. Par exemple, la connexité.

**Définition 2.1.2.** *Un graphe est connexe si et seulement si on peut relier tout couple de sommets par une suite d'arêtes.*

On remarque qu'un graphe connexe disposant de  $n$  sommets contient nécessairement au moins  $n - 1$  arêtes. En effet, s'il en contient  $m < n - 1$ , alors il est possible de relier les  $m + 1$  premiers sommets (à réindexation près), puis aucune arête n'est disponible pour relier ce sous-graphe à un autre sommet.

Donnons maintenant quelques définitions sur les arêtes et les graphes réunissant quelques conditions particulières.

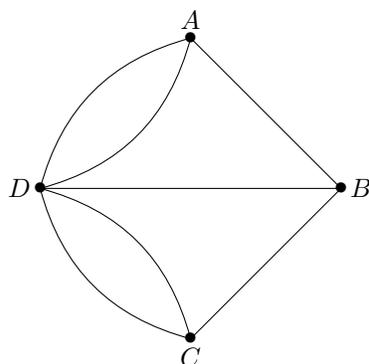


FIGURE 2.1 – Graphe représentant le problème des sept ponts

**Définition 2.1.3.** *Une boucle est une arête reliant un sommet avec lui-même (figure 2.2)*

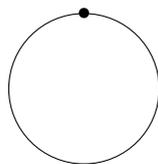


FIGURE 2.2 – Une boucle

**Définition 2.1.4.** *Une chaîne est une suite d'arêtes consécutives passant au maximum une fois par chaque arête. C'est-à-dire que chaque arête part du sommet atteint par l'arête précédente (figure 2.3).*

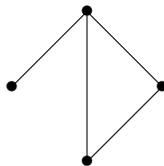


FIGURE 2.3 – Une chaîne

**Définition 2.1.5.** *Un cycle est une chaîne dont le premier et le dernier sommet sont confondus.*

On peut noter que le plus petit cycle possible est la boucle (figure 2.4).

**Définition 2.1.6.** *Un arbre est un graphe connexe ne contenant aucun cycle.*

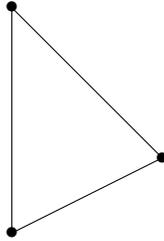


FIGURE 2.4 – Un cycle

On dit d'un arbre reliant tous les sommets d'un graphe qu'il est un arbre couvrant. Le plus petit arbre existant est constitué d'une seule arête, celle-ci n'étant pas une boucle (figure 2.5)



FIGURE 2.5 – Arbre couvrant dans un graphe

**Définition 2.1.7.** *Un graphe dont toutes les parties connexes sont des arbres est appelé une forêt (figure 2.6)*

Dans le cadre des graphes non connexes, la notion de graphe couvrant se généralise à celle de forêt couvrante, celle contenant un arbre couvrant par partie connexe du graphe.



FIGURE 2.6 – Une forêt

**Définition 2.1.8.** *Un isthme est une arête contenue dans tous les arbres couvrants (respectivement toutes les forêts couvrantes) du graphe (figure 2.7).*

La suppression d'un isthme dans un graphe augmente systématiquement le nombre de parties connexes de un.



FIGURE 2.7 – Graphe contenant un isthme

### 2.1.2 Graphes particuliers

Nous allons introduire deux catégories de graphes particuliers : les graphes complets et les graphes biparti complets. Celles-ci nous seront utiles par la suite.

**Définition 2.1.9.** *On appelle graphe complet un graphe dont tous les sommets sont reliés deux à deux. On les note  $K_n$ ,  $n$  étant le nombre de sommets du graphes. (figure 2.8)*

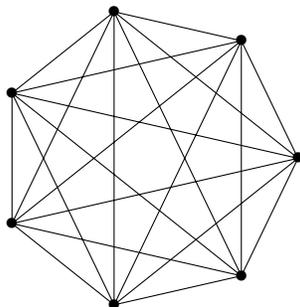


FIGURE 2.8 –  $K_7$

**Définition 2.1.10.** *Un graphe biparti est un graphe dont il existe une partition de l'ensemble de ses sommets  $A \cup B$  telle que toute arête relie un sommet de  $A$  et un sommet de  $B$ .*

Il existe également une notion de graphe complet pour les graphes biparti.

**Définition 2.1.11.** *Un graphe biparti complet est un graphe biparti  $G = (V, E)$  avec  $V = A \cup B$  et  $A \cap B = \emptyset$  tel que tout sommet de  $A$  est relié à un sommet de  $B$ . On le note  $K_{n,m}$  avec  $n = |A|$  et  $m = |B|$  (figure 2.9)*

## 2.2 Propriétés des graphes

Maintenant que nous avons quelques notions de théorie des graphes, nous pouvons étudier certaines propriétés intéressantes des graphes. Par exemple, on

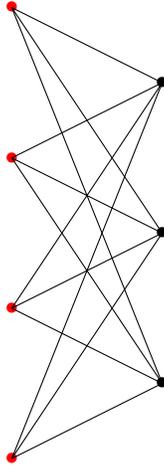


FIGURE 2.9 –  $K_{3,4}$

peut se poser des questions concernant l'existence d'un chemin passant par une seule fois par chaque sommet d'un graphe, ou, comme Euler, par toutes les arêtes tout en revenant au point de départ.

De même, parfois, on peut représenter certains graphes sur un plan sans qu'aucune arête ne se croise, parfois non. La question naturelle est donc quand est-il possible de représenter le graphe dans un plan. Ces notions sont déjà définies en théorie des graphes. Pour les aborder convenablement, il est nécessaire de définir quelques autres propriétés des graphes, comme le degré d'un sommet et d'un graphe ou la subdivision d'un graphe.

### 2.2.1 Quelques définitions

**Définition 2.2.1.** *Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes reliées à ce sommet. Les boucles sont comptés deux fois.*

Par exemple, dans  $K_7$ , le degré de chaque sommet est égal à 6. C'est une notion utile, notamment pour les graphes Eulériens.

**Définition 2.2.2.** *Un graphe Eulérien est un graphe dans lequel il existe un chemin passant par toutes les arêtes une seule et unique fois.*

Il existe une façon simple de caractériser les graphes Eulérien, conjecturée par Euler et démontrée par Hierholzer.

**Théorème 2.2.1.** *Un graphe connexe est Eulérien si et seulement si le degré de chaque sommet est pair.[1]*

Comme le degré de tout sommet dans  $K_n$  est  $n - 1$ , pour tout  $p$ ,  $K_{2p+1}$  est Eulérien.

**Définition 2.2.3.** *Un graphe planaire est un graphe qui est représentable sur un plan sans qu'aucune arête ne se croise (figures 2.10 et 2.11).*

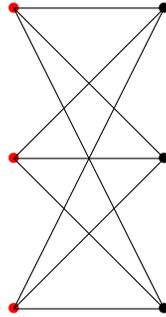


FIGURE 2.10 –  $K_{3,3}$ , un graphe non planaire

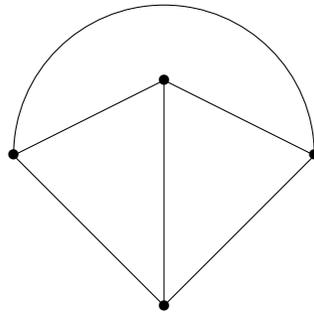


FIGURE 2.11 –  $K_4$ , un graphe planaire

On remarque ici que malgré une façon intuitive non planaire de représenter  $K_4$ , il est tout de même planaire. Le fait qu'un graphe soit planaire ou non est une question remontant au moins à 1917 avec l'énigme des trois maisons dans *Amusements in mathematics* de Henry Dudeney. L'énigme se formule ainsi : on a trois maisons que l'on doit raccorder à l'eau, l'électricité et au gaz. Est-il possible de les relier ainsi sans croiser aucun tuyaux ?

La réponse est non.

En effet, le problème se modélise par le graphe  $K_{3,3}$ , qui n'est pas planaire.

**Définition 2.2.4.** *Une subdivision d'un graphe  $G = (V, E)$  est ce graphe auquel on a rajouté des sommets sur les arêtes (figure 2.12)*

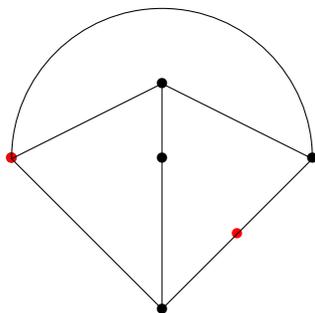


FIGURE 2.12 – une subdivision de  $K_4$

### 2.2.2 Quelques propriétés des graphes planaires

Dans ce mémoire, nous allons beaucoup étudier l'aspect planaire de certains graphes. C'est pourquoi nous allons donner ici quelques propriétés supplémentaires relatives aux graphes planaires, afin de mieux les caractériser.

**Définition 2.2.5.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe planaire. Alors celui-ci définit une partition du plan en régions.*

A partir de cette notion, nous avons la formule d'Euler appliquée aux graphes planaire :

**Théorème 2.2.2.** *Soit  $G$  un graphe planaire connexe disposant de  $p$  sommets,  $q$  arêtes et  $r$  régions. Alors*

$$p - q + r = 2$$

[2]

**Corollaire 2.2.1.** *Soit  $G$  un graphe planaire connexe, alors*

$$q \leq 3p - 6$$

*Preuve.* Supposons que le graphe soit maximal, c'est-à-dire qu'on ne puisse plus rajouter d'arête tout en conservant le graphe planaire. Alors toute région est délimitée par 3 arêtes. Chaque arête délimitant deux régions,  $3r = 2q$ . Alors, la formule d'Euler s'écrit

$$p - q + 2q/3 = 2$$

ce qui donne

$$q \leq 3p - 6$$

**Théorème 2.2.3.** *Soit  $G$  un graphe planaire. Alors il existe un sommet du graphe étant de degré au plus 5.*

*Preuve.* Soit  $G$  un graphe planaire et supposons que tout sommet est de degré au moins 6.

Alors on a  $2q \geq 6p$  et  $2q \leq 6p - 12$ , ce qui est impossible.

Cela signifie que tout graphe de degré minimal 6 n'est pas planaire.

Précédemment, nous avons affirmé que  $K_{3,3}$  n'est pas planaire. Montrons-le.

*Preuve.*  $K_{3,3}$  est un graphe biparti, ce qui rend impossible l'existence de triangle dans le graphe. Cela signifie que chaque région est délimitée par au minimum 4 arêtes. Supposons le planaire. Alors  $4r \leq 2q = 18$  Ce qui donne  $r \leq 4$ . Alors

$$\begin{aligned} p - q + r &\leq p - q + 4 \\ 2 &\leq 6 - 9 + 4 = 1 \end{aligned}$$

ce qui est impossible. Donc  $K_{3,3}$  n'est pas planaire.

De même,  $K_5$  n'est pas planaire. En effet, il dispose de 15 arêtes pour 5 sommets. Or  $15 \geq 3p - 6 = 9$ .

Ces deux exemples sont très importants dans la caractérisation des graphes planaires.

**Théorème 2.2.4.** *Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient pas de subdivision de  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ . [3]*

En fait, ce théorème devient plus fort dès lors que l'on utilise les matroïdes. En effet, une nouvelle notion intervient, celle de mineur, qui est plus facile à obtenir que la subdivision.

## Chapitre 3

# Théorie des Matroïdes

### 3.1 Définitions et propriétés

Un matroïde est un objet défini à partir d'un ensemble fini  $E$  et de quelques propriétés des parties de  $E$ . On peut le définir de plusieurs façons différentes, toutes équivalentes. Nous donnerons les définitions par les indépendants, les bases, les circuits et le rang. Un matroïde peut, sous certaines conditions, se représenter sous forme de matrice, auquel cas, les notions d'indépendance et de base pour le matroïde coïncident avec celles d'indépendance et de base pour la famille de vecteurs constituée des vecteurs colonnes de la matrice. L'objet en lui-même paraît abstrait, mais ses propriétés se traduisent simplement par analogie avec des objets mieux connus comme les matrices ou les graphes. L'intérêt des matroïdes est qu'il permet de modéliser plus facilement un problème en disposant de plus d'outils, tout en restant cohérent avec la formulation initiale.

#### 3.1.1 Définition par les indépendants

**Définition 3.1.1.** *Un matroïde est la donnée d'un couple  $(E, \mathcal{I})$  avec  $E$  un ensemble fini et  $\mathcal{I}$  l'ensemble des parties indépendantes de  $E$ , vérifiant les axiomes suivants :*

- i)  $\emptyset \in \mathcal{I}$
- ii) Soient  $I \in \mathcal{I}$  et  $I' \subseteq I$ , alors  $I' \in \mathcal{I}$
- iii) Soient  $I$  et  $I'$  tels que  $|I'| > |I|$  alors il existe  $e \in I' - I$  tel que  $I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

On appelle alors tout sous-ensemble non indépendant un dépendant de  $E$ .

Prenons une matrice quelconque. Celle-ci définit une famille de vecteurs colonnes, dont on peut prendre les sous-familles libres. Alors montrons que celle-ci définit un matroïde, en prenant comme indépendants les sous-familles libres de vecteurs.

*Preuve.* Premièrement, l'ensemble vide est bien une sous-famille de vecteurs indépendante.

Deuxièmement, prenons une sous-famille libre. Alors toute sous-famille incluse dans celle-ci est également libre.

Troisièmement, prenons A et B deux sous familles libres avec  $|B| > |A|$ . Alors, si  $A \subset B$ ,  $\exists e \in B - A$  tel que  $A \cup \{e\} \in \mathfrak{I}$ . Sinon,  $\exists e \in B - A$  tel que  $e \notin \text{Vect}(A)$  et  $A \cup \{e\}$  est libre donc appartient à  $\mathfrak{I}$ .

Maintenant que nous avons une première définition de ce qu'est un matroïde, nous pouvons donner deux définitions de matroïdes particuliers.

**Définition 3.1.2.** *Soit E une famille finie de vecteurs et  $\mathfrak{I}$  l'ensemble des sous-familles libres de E. Alors  $(E, \mathfrak{I})$  définit un matroïde vectoriel.*

Un matroïde obtenu par une matrice sur un corps  $\mathbb{K}$  est appelée représentable sur  $\mathbb{K}$

De même, les indépendants ont un équivalent pour les graphes. En effet, les indépendants sont tous les ensembles d'arêtes n'incluant aucun cycle, soit les forêts et les arbres.

**Définition 3.1.3.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $\mathfrak{I}$  l'ensemble des parties de E ne contenant aucun cycle. Alors  $(E, \mathfrak{I})$  définit un matroïde graphique. On le note  $M(G)$ .*

Il est intéressant de noter que par le biais de la matrice d'incidence du graphe G, le matroïde ainsi défini est également matriciel. En fait, il est binaire, car on peut le représenter par une matrice sur le corps  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

### 3.1.2 Définition par les circuits

Maintenant que nous avons une première définition des matroïdes, nous allons en donner une seconde, équivalente. Pour ce faire, définissons d'abord ce qu'est un circuit.

**Définition 3.1.4.** *Soit E un ensemble fini. Alors on appelle circuit un sous-ensemble de E dépendant minimal pour l'inclusion, c'est-à-dire que pour tout e appartenant à C,  $C - \{e\}$  est indépendant. Ainsi, si l'on a tous les circuits d'un matroïde, on peut en déduire  $\mathbb{I}$  comme étant l'ensemble des parties de E ne contenant pas de circuit.*

La notion se traduit facilement sur les graphes. Ce sont en fait tous les cycles simples, c'est-à-dire ceux pour lesquels enlever une arête quelconque revient à les transformer en arbres (figure 3.1). Un circuit de taille 1 est appelé une boucle.

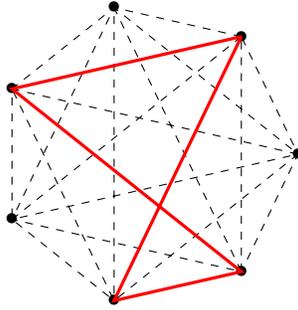


FIGURE 3.1 – Un circuit dans  $K_7$

De la même façon, regardons ce que donnerait un circuit pour un matroïde vectoriel (figure 3.2).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

FIGURE 3.2 – Matrice d'un circuit

Cette matrice est bien un circuit d'un matroïde. En effet, elle est dépendante, cependant retirer n'importe quelle colonne de la matrice la rend inversible, donc la transforme en un indépendant du matroïde. On peut d'ailleurs remarquer que cette matrice peut se représenter sous forme de graphe (figure 3.3). La représentabilité sous forme de matrice et de graphe n'est pas pour autant équivalente, il existe en effet, des matroïdes graphiques qui ne sont pas vectoriel sur certains corps et des matroïdes vectoriels qui ne sont pas graphiques.

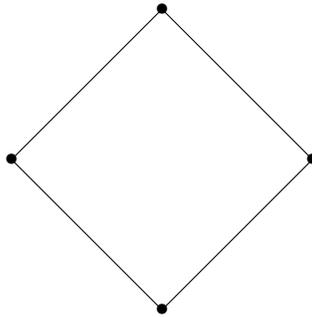


FIGURE 3.3 – Représentation du matroïde issu de la matrice 3.2 sous forme de graphe

Ainsi, si l'on a tous les circuits d'un matroïde, on peut en déduire  $\mathcal{I}$  comme étant l'ensemble des parties de  $E$  ne contenant pas de circuit. Maintenant, nous pouvons donner une seconde définition des matroïdes.

**Définition 3.1.5.** *Un matroïde est la donnée d'un couple  $(E, \mathcal{C})$  avec  $E$  un ensemble fini et  $\mathcal{C}$  l'ensemble des circuits de  $E$ , vérifiant les axiomes suivants :*

- i)  $\emptyset \notin \mathcal{C}$
- ii) Soient  $C \in \mathcal{C}$  et  $C' \subseteq C$ , alors  $C' = \emptyset$
- iii) Soient  $C$  et  $C' \in \mathcal{C}$ ,  $C \neq C'$  et  $e \in C \cap C'$ , alors il existe  $C'' \in \mathcal{C}$  tel que  $C'' \subseteq (C \cup C') \setminus \{e\}$

### 3.1.3 Définition par les bases

De la même façon que l'indépendance, la notion de base se prolonge sur les matroïdes. En fait, elle permet l'obtention d'une troisième définition des matroïdes, équivalentes aux deux précédentes.

**Définition 3.1.6.** *Soit  $(E, \mathcal{I})$  un ensemble fini et  $B$  un indépendant maximal pour l'inclusion (c'est-à-dire que si on lui rajoute une arête quelconque, il devient dépendant). Alors  $B$  est une base du matroïde.*

De la même façon que pour les circuits, on peut déduire  $\mathcal{I}$  comme étant tous les sous-ensembles d'une base. Ainsi, cela donne une troisième définition d'un matroïde.

**Définition 3.1.7.** *Un matroïde est la donnée d'un couple  $(E, \mathcal{B})$ , avec  $E$  un ensemble fini et  $\mathcal{B}$  l'ensemble des bases de  $E$ , vérifiant les axiomes suivants :*

- i)  $\mathcal{B} \neq \emptyset$
- ii) Soient  $B$  et  $B' \in \mathcal{B}$  et  $x \in B \setminus B'$ , alors  $\exists y \in B' \setminus B$  tel que  $(B - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$

Les bases d'un matroïde sont toujours de même cardinal. En effet, si tel n'est pas le cas, il existe une base de cardinal plus grand qu'une autre. Ces deux vérifiant les axiomes des indépendants, on peut prendre un élément de la première pour l'ajouter à la seconde et celle-ci reste indépendante, ce qui est en contradiction avec la précédente définition.

La notion de base pour une famille de vecteurs est assez intuitive. Pour un matroïde graphique, il correspond, dans le cas d'un graphe connexe, à un arbre couvrant. Sinon c'est une forêt couvrante (figure 3.4).

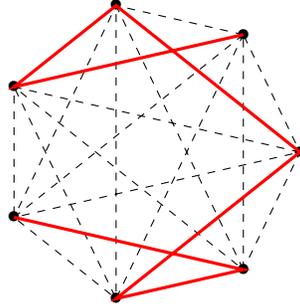


FIGURE 3.4 – Une base dans  $K_7$

Comme on le voit ici, ajouter une arête transformerait toujours la base en un dépendant. Une base atteint chaque sommet. Si l'on rajoute une arête entre deux sommets, alors, comme il existe également un arbre reliant ces deux sommets dans la base, cela forme un circuit. Ainsi, l'ensemble devient dépendant (figure 3.5).

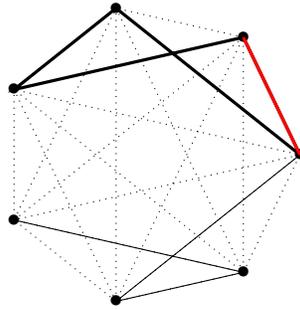


FIGURE 3.5 – Une base dans  $K_7$  à laquelle on ajoute une arête.

### 3.1.4 Définition par le rang

**Définition 3.1.8.** Soit  $M=(E, \mathfrak{I})$  un matroïde et  $X \subseteq E$ . Le rang de  $X$  est le cardinal d'un indépendant contenu dans  $X$  maximal pour l'inclusion. On le note  $r_M(X)$ . On a alors

$$r_M(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathfrak{I}\}$$

Le rang d'un matroïde correspond exactement au rang d'une matrice ou d'une famille de vecteurs. L'aspect graphique de la fonction rang se traduit en terme d'arbres. En effet, le rang d'un sous-ensemble  $X$  d'arêtes correspond au plus grand arbre (ou à la plus grande forêt) incluse dans  $X$ . Cette définition permet de définir l'ensemble des indépendants d'un matroïde,

de la même façon que les circuits et les bases. En effet,  $\mathfrak{I}$  est l'ensemble des sous-ensembles de  $E$  dont le cardinal est égal au rang.

**Définition 3.1.9.** Soit  $E$  un ensemble fini et  $r_M$  une fonction vérifiant les conditions suivantes :

- i)  $0 \leq r_M(X) \leq |X|$
- ii)  $\forall X \subseteq Y, r_M(X) \leq r_M(Y)$
- iii)  $r_M(X \cup Y) + r_M(X \cap Y) \leq r_M(X) + r_M(Y)$

Alors si et seulement si  $r_M$  vérifie ces conditions, le couple  $(E, \mathfrak{I})$  avec  $\mathfrak{I} = \{I \subseteq E \text{ tels que } r_M(I) = |I|\}$  définit un matroïde.

Dans le cas graphique, le rang d'un graphe est égal au nombre de sommets moins le nombre de composantes connexes. En effet, si le graphe est connexe, l'arbre maximal dispose de  $n - 1$  arêtes,  $n$  étant le nombre de sommets. Si on a moins d'arêtes, alors il est impossible d'atteindre tous les sommets en restant connexe. Si on a plus d'arêtes, alors on a alors un cycle qui apparaît, car tous les sommets sont déjà reliés entre eux et rajouter une arête permet de construire un chemin fermé à l'intérieur de l'arbre.

### 3.1.5 Connexité

Soient  $M_1 = (E_1, \mathfrak{I}_1)$  et  $M_2 = (E_2, \mathfrak{I}_2)$  deux matroïdes. Alors il est possible de faire l'union des deux matroïdes  $M = M_1 \cup M_2$  vérifiant les propriétés suivantes :

- i)  $M$  est un matroïde sur  $E = E_1 \cup E_2$ ;
- ii) L'ensemble des indépendants  $\mathfrak{I}$  de  $M$  est l'ensemble des  $X \subset E$  tels que  $X \cap E_1 \in \mathfrak{I}_1$  et  $X \cap E_2 \in \mathfrak{I}_2$

Il est également possible de mettre deux matroïdes  $M_1$  et  $M_2$  définis respectivement sur  $E_1$  et  $E_2$  en somme directe dès lors que  $E_1$  et  $E_2$  vérifient certaines propriétés : Soit  $E$  un ensemble fini,  $M$  un matroïde sur  $E$  et  $E_1 + E_2$  une partition de  $E$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $r_M(E) = r_M(E_1) + r_M(E_2)$ ;
- ii) si  $X \subset E_1$  et  $Y \subset E_2$  sont des indépendants de  $M$ , alors  $X \cup Y$  est indépendant ;
- iii) pour tout circuit  $C$  de  $M$ ,  $C \subset E_1$  ou  $C \subset E_2$  ;
- iv) pour toute base  $B$  de  $M$ ,  $B = B_1 \cup B_2$  avec  $B_1$  une base de  $M(E_1)$  et  $B_2$  une base de  $M(E_2)$  ;
- v) pour tout  $X \subset E_1$  et  $Y \subset E_2$ , alors  $r_M(X \cup Y) = r_M(X) + r_M(Y)$

Alors, on dit que  $M$  est somme directe des deux matroïdes  $M(E_1)$  et  $M(E_2)$ .

On obtient ainsi la définition suivante pour la connexité :

**Définition 3.1.10.** Un matroïde connexe est un matroïde qui n'est pas une somme directe non triviale.

Ainsi, un matroïde se décompose de manière unique en somme directe de matroïdes connexes, appelés parties connexes du matroïde.

## 3.2 Mineurs

### 3.2.1 La suppression

**Définition 3.2.1.** Soient  $M$  un matroïde sur  $E$  un ensemble fini et  $A$  inclus strictement dans  $E$ . On définit alors un matroïde sur  $E \setminus A$  dont l'ensemble des indépendants est

$$\{X \subseteq E \setminus A \text{ tels que } X \text{ est un indépendant de } M\}$$

On dit que l'on supprime les éléments de  $A$ . On note alors le matroïde ainsi obtenu par  $M \setminus A$ .

L'opération revient véritablement à supprimer des éléments du matroïde. Par exemple, pour un matroïde vectoriel, on supprime un sous-ensemble de vecteurs. Quant aux graphes, l'opération revient à retirer une arête (figure 3.6 et 3.7).

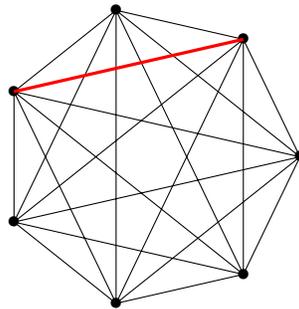


FIGURE 3.6 –  $K_7$

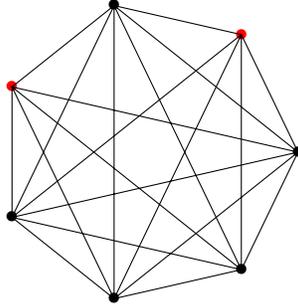


FIGURE 3.7 –  $K_7$  après suppression de l'arête rouge

La suppression dispose de quelques propriétés supplémentaires. Ainsi, un circuit dans  $M \setminus A$  est un circuit de  $M$  inclus dans  $E \setminus A$ . De plus, pour tout  $X$  inclus dans  $E \setminus A$ , la suppression conserve le rang.

### 3.2.2 la contraction

Pour définir l'opération de contraction, on a tout d'abord besoin de celle de restriction.

**Définition 3.2.2.** Soient  $M = (E, \mathfrak{I})$  un matroïde et  $X$  un sous-ensemble de  $E$ . Alors on définit un matroïde  $M|_X = (X, \mathfrak{I}|_X)$  avec  $\mathfrak{I}|_X = \{I \subseteq X \text{ tels que } I \in \mathfrak{I}\}$ . On appelle ce matroïde la restriction de  $M$  à  $X$ .

Cette notion se traduit encore une fois facilement par analogie avec l'algèbre linéaire. L'idée est simple : on ne prend que les éléments de  $X$  et les seuls indépendants sont ceux du matroïde de départ qui sont inclus dans  $X$ .

Maintenant, nous pouvons définir l'opération de contraction.

**Définition 3.2.3.** Soient  $M$  un matroïde sur un ensemble fini  $E$ ,  $A \subset E$  et  $X \subset E \setminus A$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) Il existe une base  $B$  de  $M|_A$  telle que  $X \cup B$  est indépendant dans  $M$ .
- ii) Pour toute base  $B$  de  $M|_A$ , l'ensemble  $X \cup B$  est indépendant dans  $M$ .
- iii) L'ensemble des indépendants d'un matroïde sur  $E \setminus A$  est  $\{X \subset E \setminus A \text{ tels qu'il existe une base } B \text{ de } M|_A \text{ telle que } X \cup B \text{ est indépendant dans } M\}$

On obtient ainsi un matroïde sur  $E \setminus A$  noté  $M/A$  et appelé contraction de  $M$  par  $A$ .

Cette opération se représente très bien par les graphes. Elle revient à confondre deux sommets en un seul et relier toutes les arêtes dont les sommets étaient l'un ou l'autre de ces deux points à ce nouveau point, excepté l'arête par laquelle on contracte (figures 3.8 et 3.9).

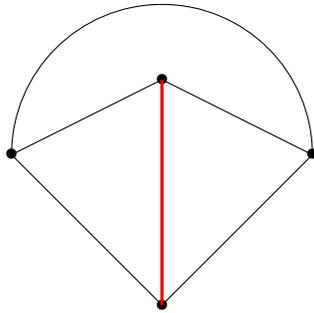


FIGURE 3.8 –  $K_4$

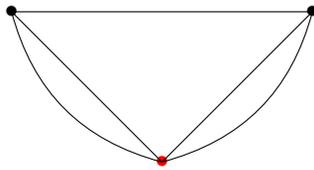


FIGURE 3.9 –  $K_4$  contracté par l'arête rouge

### 3.2.3 Propriétés de la contraction et de la suppression

**Définition 3.2.4.** *On appelle mineur de  $M$  un matroïde issu d'opérations successives de suppression et de contraction de  $M$*

On peut déjà remarquer que la contraction et la suppression ne donnent pas les mêmes résultats sauf en des cas particuliers. Par exemple, la contraction par un isthme équivaut à la suppression, de même pour une boucle. Toutefois, ceci n'est pas vrai pour les graphes en général mais uniquement pour le matroïde issu de ce graphe (figure3.10).

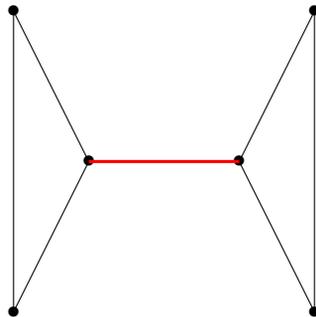


FIGURE 3.10 – Deux triangles reliés par un isthme

On voit ici que la contraction va garder la figure connexe en collant les triangles par les deux sommets reliés par l'arête rouge tandis que la suppression va donner deux triangles non connexes. Pourtant regardons les indépendants de ces deux graphes. Nous disposons de 6 arêtes dans les deux cas. Une base est également de 4 éléments, car rajouter une cinquième arête ferme l'un des deux triangles. En fait, le matroïde est le même, que ce graphe soit connexe ou non.

Une propriété de ces deux opérations est qu'elles sont associatives et commutatives. Ainsi, l'ordre des opérations importe peu lorsque l'on tente de trouver un mineur. Le résultat sera toujours le même. On a donc :

$$\begin{aligned}(M \setminus A) \setminus A' &= M \setminus (A \cup A') \\ (M/A) / A' &= M / (A \cup A') \\ (M \setminus A) / A' &= (M/A') \setminus A\end{aligned}$$

### 3.2.4 Matroïde dual

**Définition 3.2.5.** Soient  $M$  un matroïde sur un ensemble  $E$  fini et  $\mathfrak{B}$  l'ensemble des bases de  $M$ . Alors on peut définir

$$\mathfrak{B}^* = \{E \setminus B \text{ avec } B \in \mathfrak{B}\}$$

Ceci définit l'ensemble des bases d'un matroïde sur  $E$ , que l'on note  $M^*$ , et que l'on appelle matroïde dual de  $M$ .

On appelle également une base de  $M^*$  une cobase de  $M$ . De plus, en notant  $r_M$  le rang du matroïde  $M$ , définit par le rang maximal atteint par un sous-ensemble de  $E$ , alors on a  $r_{M^*} = |E| - r_M$ . Enfin, on a  $M = M^{**}$ . On alors des définitions de l'ensemble des indépendants, des circuits et de la fonction rang à partir du matroïde de départ :

- i)  $\mathcal{I}^* = \{X \text{ tels que } X \subset E \text{ et qu'il existe } B \in \mathfrak{B} \text{ avec } X \cap B = \emptyset\}$
- ii)  $r_{M^*}(X) = |X| + r_M(E \setminus X) - r_M$
- iii)  $\mathcal{C}^* = \{D \subset E \text{ tels que pour toute base } B \in \mathfrak{B}, B \cap D = \emptyset \text{ avec } D \text{ minimal pour l'inclusion}\}$

Un circuit de  $M$  est également appelé cocircuit de  $M^*$ . De plus, on remarque qu'être un cocircuit correspond exactement à avoir un et un seul élément dans chaque base. C'est pourquoi un cocircuit de cardinal un est en fait un isthme de  $M$ . En effet, c'est un élément présent dans chaque base.

Il faut cependant faire attention lorsque l'on prend le dual d'un matroïde. En effet, dans le cas des graphes, parfois le matroïde dual est également graphique, parfois ça n'est pas le cas.

**Théorème 3.2.1.** *Le dual d'un matroïde graphique est graphique si et seulement si le graphe considéré est planaire.*

De plus, dans ce cas là, le dual géométrique du graphe planaire coïncide avec le graphe donné par le matroïde dual.

Maintenant que nous avons défini le dual, on peut parler d'une dernière propriété des opérations de contraction et suppression.

**Théorème 3.2.2.** *Les opérations de contractions et de suppression sont duales.*[4]

Cela signifie que  $\forall A \subset E$

$$(M \setminus A)^* = (M^*)/A$$

$$(M/A)^* = (M^*) \setminus A$$

Maintenant que nous avons une définition des mineurs ainsi que la description des opérations permettant de les trouver, nous avons une nouvelle formulation du théorème 2.2.4.

**Théorème 3.2.3.** *Un graphe n'est pas planaire si et seulement s'il contient comme mineur  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ .*[4]

De ce fait, on en déduit une propriété importante des graphes planaires.

**Corollaire 3.2.1.** *Tout mineur d'un graphe planaire est également planaire.*[4]

Ainsi, nous avons une nouvelle caractérisation des graphes planaires et non planaires, plus facile à utiliser que la subdivision (figure 3.11).

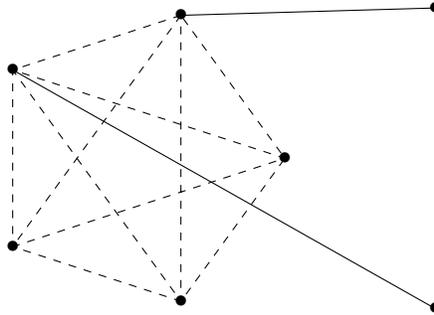


FIGURE 3.11 – Graphe contenant  $K_5$  comme mineur

### 3.3 Polynôme de Tutte

Le polynôme de Tutte est un outil permettant de déduire de multiples propriétés d'un matroïde, comme le nombre d'indépendants, de bases ou de circuits présents dans le matroïde.

**Définition 3.3.1.** *Le polynôme de Tutte d'un matroïde  $M$  sur  $E$  est défini par :*

$$t(M; x, y) = \sum_{X \subseteq E} (x - 1)^{r_M(E) - r_M(X)} (y - 1)^{|X| - r_M(X)}$$

Par exemple, le polynôme de Tutte de  $K_4$  est

$$T(K_4, x, y) = x^3 + y^3 + 4xy + 3x^2 + 3y^2 + 2x + 2y \quad (3.1)$$

Vérifions :

- Nous avons l'ensemble vide, qui donne  $(x - 1)^3$ . Il est en effet de rang 0, et son cardinal est égal à son rang.
- Nous avons 6 ensembles d'une arête, donc de rang 1 et indépendantes. On a donc  $6(x - 1)^2$ .
- Nous avons également 15 sous-ensembles de deux arêtes, toujours indépendantes car le graphe est simple, c'est-à-dire que deux sommets sont reliés par au plus une seule arête. On obtient alors  $15(x - 1)$ .
- Nous avons également 20 sous-ensembles de trois arêtes. Cependant, ils faut distinguer deux cas :
  - Il y a 4 triangles distincts existant dans  $K_4$ , qui sont simplement le choix de 3 sommets parmi 4, car le graphe est complet. On a  $4(x - 1)(y - 1)$
  - 16 ensembles indépendants de trois arêtes. Le graphe étant de rang 3, ce sont en fait les bases. On obtient alors  $16 \times 1$
- Nous avons 15 ensembles de quatre arêtes. Le rang du graphe étant 3, ils sont au maximum de rang 3 également. Mais le graphe étant simple, ils sont au minimum de rang 3 car le cycle minimal possible est un triangle. Cela donne  $15(y - 1)$
- Nous avons 6 ensembles de cinq arêtes. Par le même raisonnement, ils sont nécessairement tous de rang 3. Cela donne  $6(y - 1)^2$
- Enfin, nous avons  $E$ , de rang 3 et disposant de six arêtes. On a alors  $(y - 1)^3$

La somme de tous ces coefficients donne bien le polynôme 3.1.

On se rend rapidement compte que le calcul, déjà assez lourd pour un graphe petit (quatre sommets et six arêtes) devient très difficile lorsqu'on augmente le nombre d'éléments. Cependant, par le biais de quelques contractions et suppressions, il est parfois possible de le calculer, mais ça n'est pas toujours évident.

Regardons les propriétés du polynôme de Tutte :

- i)** Si  $e$  est une boucle, alors  $e$  est de cardinal 1 et de rang 0, ce qui donne  $t(e; x, y) = y$
- ii)** Si  $e$  est un isthme, alors  $e$  est de cardinal 1 et de rang 1, ce qui donne  $t(e; x, y) = x$
- iii)** Soit  $M$  un matroïde sur  $E$  et  $e$  un élément de  $M$ . Alors
  - Si  $e$  est une boucle,  $t(M; x, y) = yt(M/e; x, y)$
  - Si  $e$  est un isthme,  $t(M; x, y) = xt(M \setminus e; x, y)$
  - Sinon,  $t(M; x, y) = t(M \setminus e; x, y) + t(M/e; x, y)$
- iv)**  $t(M^*; x, y) = t(M; y, x)$
- v)** Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux matroïdes sur  $E_1$  et  $E_2$  disjoints, alors  $t(M_1 \oplus M_2; x, y) = t(M_1; x, y) \times t(M_2; x, y)$

- vi)  $t(M; 2, 2) = 2^{|E|}$ . C'est le nombre de sous-ensembles de  $E$
- vii)  $t(M; 1, 1)$  donne le nombre de bases du matroïde
- viii)  $t(M; 2, 1)$  donne le nombre d'indépendants du matroïde
- ix)  $t(M; 1, 2)$  donne le nombre de dépendants du matroïde

A titre d'exemple, démontrons quelques unes de ces propriétés :

Les propriétés i) et ii) sont assez simple à observer. En effet, pour une boucle, l'ensemble vide donne +1 et la boucle  $(y - 1)$ . De même, l'ensemble vide donne  $(x - 1)$  pour l'isthme et celui-ci donne +1.

La propriété iv) se démontre aussi simplement. En effet,

$$t(M^*; x, y) = \sum_{X \subseteq E} (x - 1)^{r_{M^*}(E) - r_{M^*}(X)} (y - 1)^{|X| - r_{M^*}(X)}$$

Mais nous avons également la propriété suivante :

$$r_{M^*}(X) = |X| + r_M(E \setminus X) - r_M$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} |X| - r_{M^*}(X) &= r_M - r_M(E \setminus X) \\ r_{M^*} - r_{M^*}(X) &= |E| - r_M - r_{M^*}(X) \\ &= |E| - |A| - r_M(E \setminus X) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} t(M^*; x, y) &= \sum_{X \subseteq E} (x - 1)^{|E \setminus X| - r_M(E \setminus X)} (y - 1)^{r_M E - r_M(E \setminus X)} \\ &= t(M; y, x) \end{aligned}$$

La propriété vii) est également simple à démontrer. En effet, prenons  $x = 1$  et  $y = 1$ . Alors

$$t(M; 1, 1) = \sum_{X \subseteq E} (0)^{r_M(E) - r_M(X)} (0)^{|X| - r_M(X)},$$

or le rang de  $X$  vaut son cardinal et le rang de  $E$  si et seulement si  $X$  est une base. Ainsi, on a une somme de 1 et de 0, avec 1 si  $X$  est une base et 0 sinon. On dénombre bien les bases du matroïde.

Le même raisonnement fonctionne également pour les propriétés viii) et ix). En effet, en prenant  $x = 2$  et  $y = 1$ , alors

$$t(M; 2, 1) = \sum_{X \subseteq E} (1)^{r_M(E) - r_M(X)} (0)^{|X| - r_M(X)},$$

Alors on a le rang de  $X$  qui est égal à son cardinal si et seulement si  $X$  est indépendant, sans quoi le polynôme s'annule. Ainsi on a une somme de 0 et de

1, avec 1 si et seulement si  $X$  est indépendant.  
En prenant  $x = 1$  et  $y = 2$ , on obtient de la même façon l'ensemble des dépendants.

# Chapitre 4

## Complexes simpliciaux et complexes d'accords

### 4.1 Complexes simpliciaux

Dans ce chapitre, nous allons parler des complexes simpliciaux, de façon non exhaustive, afin de pouvoir ensuite expliquer comment nous allons représenter des ensembles d'accord.

#### 4.1.1 Complexes cellulaires

**Définition 4.1.1.** *On définit un complexe cellulaire abstrait comme un couple  $K = (S, \preceq)$  où  $S$  est un ensemble de symboles appelés cellules topologiques muni d'un ordre partiel localement fini  $\cdot \preceq \cdot$  dans  $S \times S$ , appelé relation d'incidence.*

Pour un complexe  $K$ , il existe une fonction  $\dim_K : S \rightarrow \mathbb{N}$ , appelée fonction de dimension, respectant que pour tout  $\sigma$  et  $\sigma'$  de  $S$ ,  $\sigma \preceq \sigma' \Rightarrow \dim_K(\sigma) < \dim_K(\sigma')$ .

La fonction dimension est donc strictement croissante pour la relation d'incidence. De plus, si  $\dim_K$  est bornée dans  $S$ , alors on dit que  $K$  est fini et on appelle  $N = \max_{\sigma \in S} \dim(\sigma)$  la dimension de  $K$ .

Alors, on va noter une cellule de dimension  $p$  une  $p$ -cellule. Ainsi, un sommet est une 0-cellule, une 1-cellule une courbe, et ainsi de suite. La relation d'incidence quand à elle permet d'étudier l'organisation interne du complexe. Par exemple, prenons un cube. Le volume est une 3-cellule, toutes les faces, les arêtes et les sommets y sont incidents. De même, chaque arête est incidente aux faces qu'elle délimite, et chaque sommet aux arêtes reliées à lui.

**Définition 4.1.2.** *Pour tout entier  $n \leq N$  avec  $N$  étant la dimension de  $K$ , on*

appelle  $n$ -squelette d'un complexe cellulaire le sous-complexe  $S_n(K)$  constitué des cellules de  $K$  de dimension au plus  $n$  et héritant de la relation d'incidence de  $K$  sur ses cellules.

Dans ce mémoire, nous utiliserons plus particulièrement le 1-squelette, qui est en fait un graphe dont les sommets sont les 0-cellules du complexe et les arêtes les 1-cellules du complexe.

### 4.1.2 Complexes simpliciaux

Les complexes simpliciaux sont des cas particuliers de complexes cellulaires. En ce sens, ils héritent des diverses propriétés présentes chez les complexes cellulaires. On va en donner une définition au sens de la géométrie affine.

**Définition 4.1.3.** On appelle *simplexe* dans  $\mathbb{R}^N$  l'enveloppe convexe d'un ensemble fini non vide  $\{A_0, \dots, A_n\}$  de points affinement indépendants dans  $\mathbb{R}^N$ . On le note alors  $C(A_0, \dots, A_n)$ .

On appelle les points  $A_0, \dots, A_n$  les sommets du simplexe. La dimension du simplexe est la dimension de  $\langle A_0, \dots, A_n \rangle$ .

Une face d'un simplexe est un simplexe défini comme l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble de sommets du premier simplexe.

**Définition 4.1.4.** On appelle *complexe simplicial* un ensemble fini dans  $\mathbb{R}^N$   $K$  de simplexes vérifiant

- toute face d'un simplexe de  $K$  est un simplexe de  $K$  ;
- l'intersection de deux simplexes de  $K$  est vide ou est une face de chacun des simplexes.

Ainsi, on doit respecter certaines conditions afin de construire un complexe simplicial (figures 4.1 et 4.2).

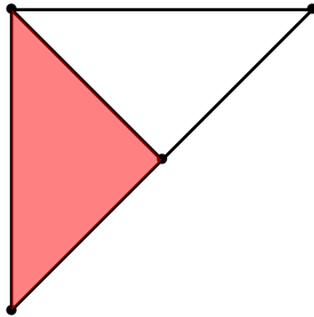


FIGURE 4.1 – Un complexe simplicial

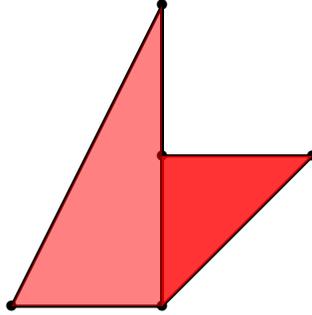


FIGURE 4.2 – Un complexe non simplicial

### 4.1.3 Collection topologique

Nous allons maintenant parler de décoration d'un complexe cellulaire. Un complexe cellulaire décoré est en fait un complexe cellulaire dont on «étiquette» chaque cellule.

Une collection topologique  $C$  est un complexe cellulaire décoré. On note alors  $C(\sigma)$  la valeur associée à la cellule  $\sigma$  et  $|C|$  le complexe cellulaire support de la collection, c'est-à-dire dénué de toute «étiquette».

### 4.1.4 Morphisme de collection topologique

**Définition 4.1.5.** Soient  $K$  et  $K'$  deux complexes cellulaires. On appelle morphisme de complexes cellulaires une fonction  $\phi : K \rightarrow K'$  vérifiant pour tout  $\sigma$  et  $\sigma'$

- i)  $\sigma \prec \sigma' \Rightarrow \phi(\sigma) \prec \phi(\sigma')$  ;
- ii)  $\dim_{K'}(\phi(\sigma)) = \dim_K(\sigma)$  ;

Cela signifie qu'un morphisme de complexe conserve à la fois l'incidence et la dimension. Par exemple, si l'on dispose d'un complexe constitué d'un 3-simplexe et d'un 2-simplexe non connexes, alors une fonction confondant le 2-simplexe avec l'une des faces du 3-simplexe de dimension 2 en conservant la relation d'incidence sur le 2-simplexe est un morphisme de complexe cellulaire. Le 3-simplexe étant invariant, regardons juste l'image du 2-simplexe. Il faut en fait que chaque image d'arête soit incidente à l'image de la surface à laquelle elle était incidente. De même pour les sommets.

**Définition 4.1.6.** Soient deux collections topologiques  $C$  et  $C'$  et  $\phi : |C| \rightarrow |C'|$ . Alors  $\phi$  est un morphisme de collection topologique si :

- i)  $\phi$  est un morphisme de complexes cellulaires ;
- ii)  $C'(\phi(\sigma)) = C(\sigma)$ , pour toute cellule  $\sigma \in |K|$ .

Autrement dit, on conserve également les étiquettes. Cela signifie que, dans l'exemple précédent, si l'un des sommets, l'une des arêtes ou la surface du 2-simplexe ne dispose pas de la même étiquette que la cellule avec laquelle elle sera confondue, le morphisme décrit, qui est un morphisme de complexes cellulaires, ne sera pas un morphisme de collections topologiques (figure 4.3).

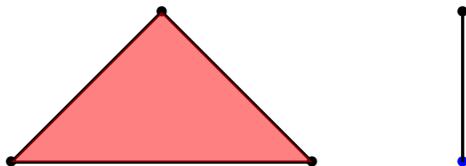


FIGURE 4.3 – Collection topologique

### 4.1.5 Pliage de collections topologiques

Il est possible de disposer de plusieurs collections topologiques pour le même objet. C'est-à-dire que l'on a des objets semblables munis des mêmes étiquettes. Alors, on peut effectuer un morphisme de collection permettant de confondre toutes les cellules de même dimension et décorés des mêmes valeurs ;

**Définition 4.1.7.** *On dit qu'une collection  $C$  se plie en une collection  $C'$  dès lors qu'il existe un morphisme surjectif  $\phi$  de  $|C|$  dans  $|C'|$ .*

On note alors que pour toute collection topologique dont aucune cellule ne dispose à la fois de la même décoration et de la même dimension, le processus de pliage est impossible. On dit d'une collection qui vérifie ceci qu'elle est minimale.

## 4.2 Complexe d'accords

### 4.2.1 Construction

Un accord est un ensemble de classes de hauteurs jouées en même temps. De ce fait, le simplexe présente l'avantage de pouvoir représenter un accord d'un nombre quelconque de classes de hauteurs.

Soit un accord  $C = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  un ensemble de classes de hauteurs distinctes prises dans  $\mathbb{Z}_N$ . alors on représente  $C$  par une collection simpliciale définie comme suit :[5]

- i)  $|A|$  est un simplexe de dimension  $n$  ;
- ii) Chaque 0-cellule  $\sigma$  de  $|A|$  est décorée de façon unique par l'une des classes de hauteurs.

$$\exists ! i |A(\sigma) = n_i$$

iii) chaque  $p$ -cellule de  $|A|$  est décorée par

$$A(\sigma) = \{A(\tau) \mid \tau \prec \sigma, \dim(\tau) = 0\}$$

En premier lieu, on peut remarquer que tout accord de  $n$  notes est représenté par un simplexe de dimension  $n - 1$ .

Avec une telle construction,  $A$  est une collection simpliciale.

En effet, supposons que l'on ait deux faces  $\sigma$  et  $\sigma'$  incluses dans  $|A|$  telles que  $A(\sigma) = A(\sigma')$ . Alors, par définition,

$$\{\tau \prec \sigma, \dim(\tau) = 0\} = \{\tau \prec \sigma', \dim(\tau) = 0\}.$$

Cela signifie alors qu'au moins deux sommets  $a_i$  et  $a_j$  distincts partagent la même décoration, et donc qu'ils font partie de la même classe de hauteur, ce qui est impossible par construction.

Donc  $A$  est bien une collection minimale.

Nous avons donc tout sous accord de  $C$  représenté par une unique face de  $A$ .

Maintenant que nous avons une méthode pour représenter un accord par un simplexe, nous pouvons alors définir un complexe d'accords. Soient  $A_1, \dots, A_n$  un ensemble d'accords. Alors, on peut assembler ces divers simplexes en un complexe minimal par le biais d'un (ou d'une suite de) pliage(s). On l'appelle alors un complexe d'accords (figures 4.4 et 4.5).

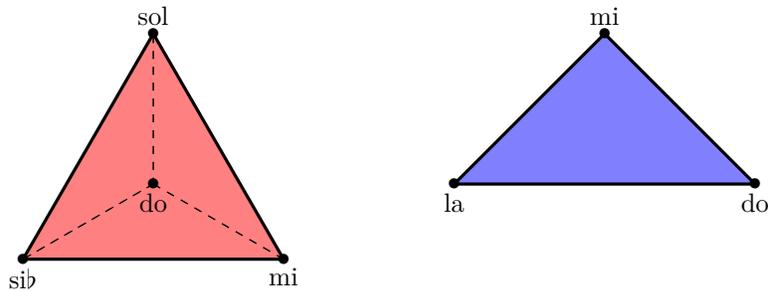


FIGURE 4.4 – Un complexe d'accords contenant un do septième mineur et un la mineur avant pliage

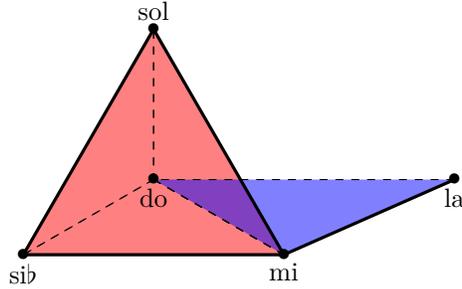


FIGURE 4.5 – Un complexe d’accords contenant un do septième mineur et un la mineur après pliage

### 4.2.2 Classes d’accords

Nous allons maintenant nous intéresser à des classes d’équivalences d’accords, d’abord par transposition, puis également par inversion.

**Définition 4.2.1.** Une classe d’équivalence d’accords par transposition est l’ensemble des accords dans  $\mathbb{Z}_N$  partageant la même structure intervallique  $[i_1, \dots, i_p]$  avec  $i_1 + i_2 + \dots + i_p = N$ .

On note alors le complexe associé à cette classe d’accords  $K_T[i_1, \dots, i_p]$  (figure 4.6). On peut d’ailleurs remarquer que cela correspond à appliquer une action du groupe des intervalles sur l’accord en question.

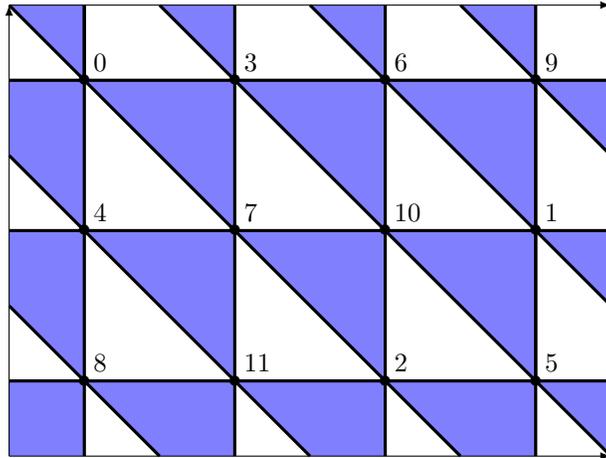


FIGURE 4.6 –  $K_T[3, 4, 5]$  la classe d’équivalence par transposition d’un accord mineur dans  $\mathbb{Z}_{12}$ , représentée dans un tore

On remarque sur la figure 4.6 que si l’on considère toutes les régions non colorées comme faisant parties du complexe et toutes les régions colorées comme n’en

faisant pas partie, on obtient alors le complexe  $K_T[4, 3, 5]$ , celui de la classe des accords majeurs par transposition, soit la classe de l'accord inverse de  $[3, 4, 5]$ . Autrement dit :

**Lemme 4.2.1.** *Le complexe d'une classe d'accords par transposition et celui de la classe de son inverse par transposition partagent le même 1-squelette.*

Montrons que ceci est vrai pour toute classe d'accords.

*Preuve.* Soit une classe d'accords par transposition  $[i_1, \dots, i_n]$ . Nous allons raisonner sur les intervalles présents dans cet accord.

Nous avons que pour toute classe de hauteur  $a \in \mathbb{Z}_N$ , tous les intervalles  $\{a, a + i_j\}, \forall 1 \leq j \leq n$  sont représentés dans le complexe  $K_T[i_1, \dots, i_n]$  par le 1-simplexe  $A(a, a + i_j)$ . Alors, pour toute permutation  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}_n$ , le complexe  $K_T[i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}]$  présente également toutes les arêtes de la forme  $A(a, a + i_j)$ , car l'ordre de la structure intervallique n'intervient pas dans la présence des intervalles. Autrement dit, soit une classe d'accords par transposition  $[i_1, \dots, i_n]$ , le complexe  $K_T[i_1, \dots, i_n]$  présente le même 1-squelette que tout complexe  $K_T[i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}]$ , pour toute permutation  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}_n$ .

On peut maintenant définir un autre complexe par relation d'équivalence, cette fois-ci par les opérations de transposition et d'inversion. Celui correspondra à l'union du complexe  $K_T[i_1, \dots, i_n]$  et du complexe  $K_T[i_n, \dots, i_1]$ . On le note alors  $K_{TI}[i_1, \dots, i_n]$  (figure 4.7).

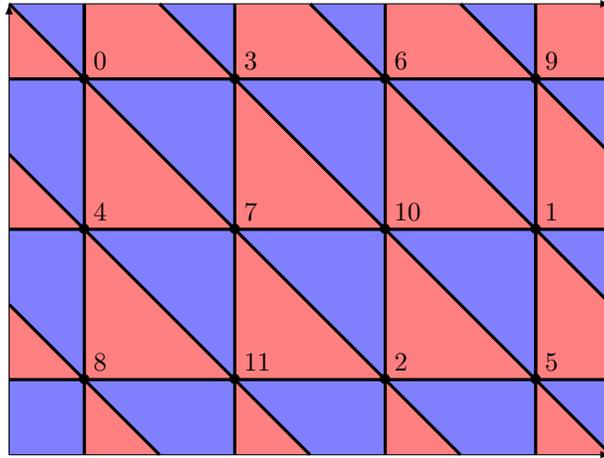


FIGURE 4.7 –  $K_{TI}[3, 4, 5]$  la classe d'équivalence par transposition et inversion d'un accord mineur dans  $\mathbb{Z}_{12}$ , représentée dans un tore

## Chapitre 5

# Théorie des graphes et matroïdes sur les complexes d'accords

### 5.1 Matroïde sur un complexe simplicial

#### 5.1.1 Construction

Afin de construire un matroïde à partir d'un complexe simplicial, nous avons besoin de la définition d'un complexe simplicial pur.

**Définition 5.1.1.** *Soit  $K$  un complexe simplicial de dimension  $k$ . On dit que  $K$  est un  $k$ -complexe simplicial pur s'il vérifie que pour tout simplexe  $S$  de dimension inférieure à  $k$ ,  $S$  est une face de l'un des simplexes de dimension  $k$ .*

Cela signifie que toutes les facettes, c'est-à-dire les faces maximales pour l'inclusion, sont de même taille.

**Définition 5.1.2.** *L'ensemble des indépendants  $\mathfrak{I}(M)$  d'un matroïde  $M$  sur un ensemble fini  $E$  constitue un complexe simplicial (appelé complexe d'indépendance de  $M$ ) muni la propriété suivante :*

**iii')** *Pour tout  $E' \subseteq E$  la restriction  $I(M)|_{E'}$  est un complexe simplicial pur. Cette propriété remplace la propriété iii) de la définition 3.1.1 et lui est équivalente.*

C'est-à-dire que pour qu'un complexe simplicial puisse définir un matroïde, il faut qu'il vérifie cette même propriété, sans quoi il ne peut pas définir un ensemble d'indépendants d'un matroïde vérifiant tous les axiomes.

Si l'on regarde les propriétés d'un complexe simplicial pur, on se rend compte que cela correspond bien aux propriétés d'un matroïde. Premièrement, les facettes sont de même dimension, ce qui signifie que tous les ensembles indépendants

maximaux pour l'inclusion sont de même taille, ce qui traduit la propriété qu'ont les bases d'un matroïde d'être toutes de même taille. Par contre, la connexité est nécessaire pour que le complexe représente bien un matroïde.

**Théorème 5.1.1.** *Un complexe simplicial non connexe ne définit pas de matroïde.*

*Preuve.* Soit  $K$  un complexe simplicial pur de dimension  $k$  non connexe. Alors, on peut le séparer en deux sous-complexes  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset.$$

Ainsi, on peut prendre une facette  $F_1$  dans  $K_1$  et  $F_2$  dans  $K_2$ .

Maintenant, supposons que  $K$  soit le complexe d'indépendance d'un matroïde  $M$ . Alors  $F_1$  et  $F_2$  sont deux bases de  $M$ . Il existe donc un  $x \in F_1$  et un  $y \in F_2$  tels que  $F_1 \setminus \{x\} \cup \{y\}$  est une base de  $M$ . Cela signifie alors que la facette  $(F_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$  est dans  $K_1$  ou dans  $K_2$ , ce qui rentre en contradiction avec les hypothèses de départ.

On a bien que si  $K$  est le complexe d'indépendance d'un matroïde,  $K$  est connexe.

Il faut donc que le complexe simplicial vérifie certaines propriétés, autres que d'être pur, pour que cela définisse un matroïde. En effet, cette propriété n'assure pas que l'ensemble des indépendants vérifie les axiomes des matroïdes, comme on vient de le voir plus tôt.

**Lemme 5.1.1.** *Un complexe d'accords ne correspond pas nécessairement à un complexe d'indépendance d'un matroïde.*

Montrons-le en construisant un complexe d'une classe d'accords par transposition et en déterminant si celui-ci définit bien un complexe d'indépendance d'un matroïde.

Prenons l'accord  $[1, 1, 4]$  dans  $\mathbb{Z}_6$  (figure 5.1).

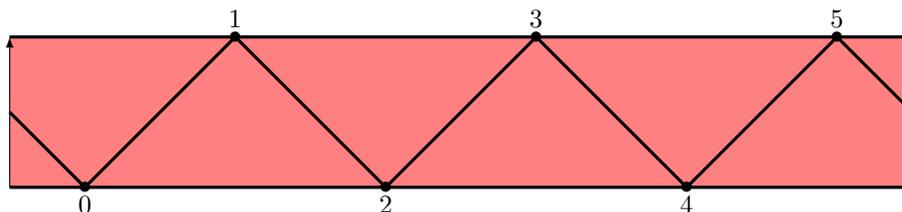


FIGURE 5.1 –  $K_T[1, 1, 4]$

Montrons alors que le complexe 5.1 n'est pas un complexe d'indépendance du matroïde.

Prenons  $E' = \{1, 2, 3, 5, 6\}$  un sous-ensemble de  $E$  Regardons l'ensemble de ses indépendants.

Les indépendants de rang 3 sont  $\{1, 2, 3\}$  et  $\{5, 6, 1\}$ . Puis de rang 2, nous avons tous les sous-ensembles de ces trois triangles de cardinal 2 ainsi que l'arête  $\{3, 5\}$ , incluse dans aucun autre simplexe de dimension 2, donc étant elle aussi une facette. Ceci implique que le complexe obtenu n'est pas pur et donc que  $K_T[1, 1, 4]$  n'est pas le complexe d'indépendance d'un matroïde.

Considérer cette construction pour étudier les accords semble donc voué à l'échec. Il faut la connexité, ce qui n'est pas toujours le cas, puis une certaine géométrie assez particulière. Existe-t-il alors une méthode permettant de construire à coup sûr un matroïde sur un complexe d'accords ?

Dans le cadre de ce mémoire, nous n'en avons trouvé qu'une, mais elle n'est pas pertinente.

En effet, si l'on se place dans le complexe simplicial pur constitué de tous les simplexes de taille  $k$  dans  $\mathbb{Z}_N$ , on peut construire alors un matroïde dont tous les sous-ensembles de  $E = \{1, \dots, d\}$ ,  $d \leq N$  de taille au plus  $k$  sont des indépendants, avec  $k$  étant le nombre de classes de hauteurs de l'accord. En particulier, le complexe d'accords recherché est inclus dans ce complexe simplicial. Cependant, tout accord de taille  $k$  est présent dans ce complexe, sans aucune distinction. On perd donc en information, car tous les complexes d'accords de même taille engendreraient alors exactement la même construction.

## 5.2 Théorie des graphes sur les 1-squelettes

Puisque considérer les complexes d'accords entièrement ne donne pas de bon résultat, nous avons décidé de nous intéresser uniquement aux 1-squelettes de ces complexes, c'est-à-dire des graphes. L'avantage d'un graphe est qu'il permet toujours la construction d'un matroïde.

Tout d'abord nous allons étudier la connexité des 1-squelettes de complexes de classes d'accords par transposition et inversion, puis nous nous intéresserons aux conditions sous lesquelles ces graphes sont planaires.

### 5.2.1 Connexité des complexes d'accords

Un graphe est connexe si et seulement si pour tout couple de sommets du graphes, il est possible de les relier par une chaîne d'arêtes. Traduisons-le en termes d'intervalles :

Soit  $K_T[i_1, \dots, i_n]$ . Alors, si et seulement si pour tout couple  $a$  et  $b$  de classes de

hauteurs distinctes, il existe une suite d'intervalles  $A_1, \dots, A_d$  tels que  $a + A_1 + \dots + A_d = b$ , avec  $\forall k, \exists j | A_k = i_j, 1 \leq j \leq n$ , le graphe est connexe.

Vérifions : Si ces conditions sont vérifiées, alors toutes les arêtes  $\{a, a + A_1\}, \{a + A_1, a + A_1 + A_2\} \dots$  sont incluses dans le graphe et celui-ci est bien connexe.

Supposons que le graphe est connexe. Alors pour tout  $a$  et  $b$  deux sommets du graphe, il existe une suite d'arêtes les reliant. Mais dans un complexe d'accords, une arête relie toujours un sommet  $s$  avec un sommet  $s + i_j, 1 \leq j \leq n$ . Autrement dit, il existe une suite d'intervalles vérifiant les conditions recherchées.

Maintenant, nous pouvons trouver une relation sur la structure intervallique de l'accord permettant d'en déduire des conditions de connexité.

**Théorème 5.2.1.** *Le 1-squelette d'un complexe d'accords  $K_T[i_1, i_2, \dots, i_n]$  dans  $\mathbb{Z}_N$  est connexe si et seulement si  $\text{pgcd}(i_1, \dots, i_n) = p$  générateur de  $\mathbb{Z}_N$ .*

Montrons-le :

*Preuve.* Tout d'abord, si le graphe est connexe, cela signifie qu'il est toujours possible de relier une classe de hauteurs  $a$  à la classe  $a + 1$ . Supposons  $p$  générateur de  $\mathbb{Z}_N$ . Alors, le théorème de Bézout nous assure qu'il existe  $x_1, \dots, x_n$  entiers relatifs tels que  $x_1 i_1 + \dots + x_n i_n = p$ . Or, comme  $p$  génère  $\mathbb{Z}_N$ , il existe  $k$  tel que  $a + kp = a + k(x_1 i_1 + \dots + x_n i_n) = a + 1$ .

On vient alors de décrire un chemin constitué uniquement des intervalles de l'accord permettant de relier toute classe de hauteur  $a$  à la classe de hauteur  $a + 1$ , le graphe est bien connexe.

Maintenant, supposons  $p$  diviseur de  $N$ . Alors  $p$  divise  $x_1 i_1 + \dots + x_n i_n$  pour tout  $x_1, \dots, x_n$ . Supposons alors qu'il existe  $x_1, \dots, x_n$  tels que  $a + k(x_1 i_1 + \dots + x_n i_n) = a + 1$ . Ceci impliquerait que  $(x_1 i_1 + \dots + x_n i_n)$  est générateur, donc que  $p$  est premier avec  $N$ .

Ainsi, nous avons démontré le théorème 5.2.1.

Comment étudier le cas des graphes non connexes ? La première chose que l'on remarque, c'est que si  $p$  divise  $n$ , alors on a  $p$  parties connexes comprenant  $N/p$  classes de hauteurs, qui sont toutes identiques. Il est alors possible de les considérer comme le 1-squelette d'un complexe d'accords dans  $\mathbb{Z}_{N/p}$  de structure intervallique  $[i_1/p, i_2/p, \dots, i_n/p]$ . Cette solution est intéressante car sur ce que l'on va étudier par la suite, l'aspect planaire des graphes, considérer uniquement les parties connexes seules présente les mêmes propriétés que les considérer toutes ensemble.

Cependant, ça n'est pas tout à fait vrai pour le polynôme de Tutte, car celui-ci est modifié selon le nombre de copies du graphe. Pour cela, la propriété v) des polynômes de Tutte :

- v) Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux matroïdes sur  $E_1$  et  $E_2$  disjoints, alors  $t(M_1 \oplus M_2; x, y) = t(M_1; x, y) \times t(M_2; x, y)$

nous assure que le calcul en sera simplifié.

### 5.2.2 Aspect planaire des 1-squelettes de complexes d'accords

A partir des différentes propriétés étudiées dans la partie 2.2.2, nous allons étudier l'aspect planaire des 1-squelettes de complexes d'accords de trois note uniquement. Le but serait ensuite de déduire une récurrence sur les graphes afin de pouvoir calculer le polynôme de Tutte sur ces graphes.

Premièrement, nous allons nous intéresser au cas des accords présentant deux intervalles identiques, c'est-à-dire de structure intervallique  $[i, i, j]$  dans  $\mathbb{Z}_N$ . Comme nous l'avons vu précédemment, si  $\text{pgcd}(i, j)$  divise  $N$ , alors nous nous plaçons dans  $\mathbb{Z}_{N/\text{pgcd}(i,j)}$  afin d'avoir un graphe connexe. Il est alors possible de placer tous les sommets sur un cercle de telle sorte que chaque classe de hauteurs  $a$  soit encadrée d'un côté par  $a + i$  dans une direction et  $a - i$  de l'autre (figure 5.2).

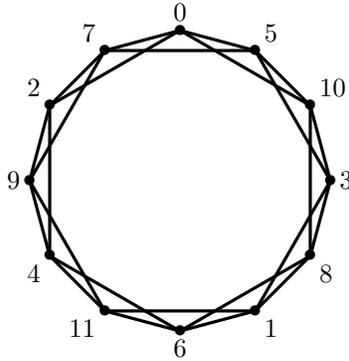


FIGURE 5.2 – 1-squelette du complexe  $K_T[5, 5, 2]$ .

**Théorème 5.2.2.** *Soit  $N$  pair, et un accord de structure intervallique  $[i, i, j]$ . Alors le 1-squelette du complexe  $K_T[i, i, j]$  est planaire.*

*Preuve.* Comme  $N$  est pair, nous pouvons répartir les arêtes de la façon suivante : on trace d'abord toutes les arêtes représentant l'intervalle  $i$  présent deux fois dans la structure intervallique, ce qui forme un polygone. Puis, nous pouvons construire les arêtes représentant  $N - 2i = j$  partant d'un sommet sur deux à l'intérieur du cercle. Comme  $N$  est pair, on a bien alors la construction de la moitié des arêtes correspondantes. Il suffit alors de construire les arêtes partant de l'autre moitié des sommets à l'extérieur du cercle (figure 5.3).

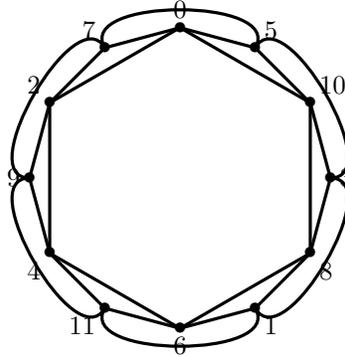


FIGURE 5.3 – 1–squelette du complexe  $K_T[5, 5, 2]$  représenté de façon planaire.

Dans le cas impair, ceci est impossible. En fait, le graphe contient dans ce cas  $K_5$  comme mineur et est donc non planaire.

**Théorème 5.2.3.** *Soit  $N$  impair, et un accord de structure intervallique  $[i, i, j]$ . Alors le 1–squelette du complexe  $K_T[i, i, j]$  n’est pas planaire.*

*Preuve.* Construisons alors le complexe de la façon suivante :

On construit prend d’abord le sommet 0, on construit le triangle  $\{0, i, 2i\}$ , puis  $\{i, 2i, 3i\}$  collé au précédent et ainsi de suite jusqu’au triangle  $\{-3i, -2i, -i\}$ , ce qui forme un segment constitué des arêtes  $\{0, 2i\}, \dots, \{-3i, -i\}$  et un autre segment constitué des arêtes  $\{i, 3i\}, \dots, \{-4i, -2i\}$ . Il reste alors à construire les arêtes  $\{-i, 0\}, \{-2i, 0\}$  et  $\{-i, i\}$ , que l’on trace droites. (figure 5.4).

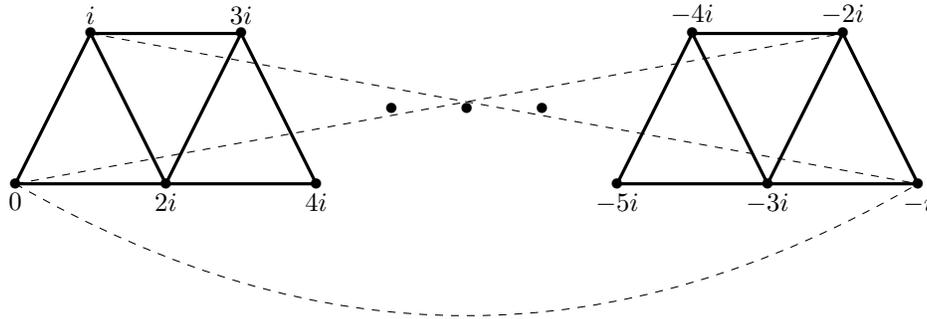


FIGURE 5.4 –  $K_T[i, i, N-i]$  avec  $N$  impair, avant construction des arêtes  $\{0, -i\}$ ,  $\{0, -2i\}$  et  $\{-i, i\}$

Alors, on peut, par une suite de contractions et suppressions, trouver  $K_5$  comme mineur du graphe. La première contraction à effectuer est selon l’arête  $\{-3i, -i\}$ . De cette façon, on obtient le même nombre d’arêtes de chaque bord

du graphe. Ensuite, on peut supprimer les arêtes parallèles jusqu'à garder un graphe simple, c'est-à-dire sans cycle de taille 2. Puis, on contracte par les arêtes  $\{-3i, -5i\}$  et  $\{-2i, -4i\}$ , on supprime à nouveau les arêtes parallèles, et on réitère l'opération jusqu'à conserver uniquement les 5 premières classes de hauteurs. Regardons les arêtes et les sommets de ce graphe :

- Nous disposons de 5 sommets,  $0, i, 2i, 3i, 4i$  ;
- Nous observons 4 arêtes  $\{n, n + i\}$ , sans pour le moment considérer les effets des différentes contractions ;
- Nous observons également 3 arêtes  $\{n, n + 2i\}$ , pour un total de 7 arêtes ;
- Enfin, par le biais des contractions,  $4i$  est confondu avec le sommet  $-i$  et donc est relié à 0 par une arête et à  $i$  par une autre. De même,  $3i$  est confondu avec  $-2i$  et est relié à 0.

Ainsi, nous avons 10 arêtes, 5 sommets et aucun cycle de taille 2. C'est donc le graphe complet  $K_5$ . Ceci prouve que le graphe de départ n'est pas planaire (théorème 3.2.3).

Maintenant, intéressons nous à d'autres cas.

**Théorème 5.2.4.** *Soit  $N \geq 7$  un accord de structure intervallique  $[i, j, k]$  dans  $\mathbb{Z}_N$  tel que  $i, j, k$  sont distincts, tous d'ordre supérieur à 2 et  $\text{pgcd}(i, j, k) = 1$ . Alors le 1-squelette du complexe  $K_T[i, j, k]$  n'est pas planaire.*

*Preuve.* Regardons simplement le degré d'une classe de hauteurs. Pour ce faire, nous allons dénombrer le nombre d'intervalles dans lesquels une classe de hauteurs  $a$  est présente.

- les intervalles  $\{a, a + i\}$  et  $\{a, a - i\}$ ,
- ensuite les intervalles  $\{a, a + j\}$  et  $\{a, a - j\}$ ,
- enfin les intervalles  $\{a, a + k\}$  et  $\{a, a - k\}$ .

Comme  $i \neq j$ ,  $i \neq k$  et  $j \neq k$ , le degré de toute classe de hauteurs est 6. En effet, les seuls cas pouvant amener à un degré inférieur seraient si  $i, j$  ou  $k$  étaient de caractéristique 2, dans ce cas on aurait  $a + i = a - i$  ou  $a + j = a - i$  ou  $a + k = a - k$  et un degré inférieur ou égal à 5, ou si  $i = -j$ ,  $i = -k$  ou  $j = -k$  dans  $\mathbb{Z}_N$ . Ceci, par définition de la structure intervallique est impossible, car on a  $k = N - i - j$  et nous ne considérons que les accords de trois notes, ce qui exclut la possibilité d'un intervalle nul.

Donc, le théorème 2.2.3 (il existe dans un graphe planaire un sommet de degré au plus 5) permet de dire que le 1-squelette des classes d'accords de ce type n'est pas planaire.

Maintenant, étudions le cas où l'un des intervalles est d'ordre 2. Supposons, à réindexation près, que  $i = -i$ . Alors chaque sommet est désormais de degré 5. Nous ne pouvons donc plus employer le même raisonnement. Étudions le nombre d'arêtes et de sommets du graphe.

**Théorème 5.2.5.** *Soit  $6 < N < 12$  et un accord de structure intervallique  $[i, j, k]$  dans  $\mathbb{Z}_N$  telle que  $i, j, k$  sont distincts,  $i$  d'ordre 2 et  $j$  et  $k$  d'ordre supérieur strictement à deux avec  $\text{pgcd}(i, j, k) = 1$ . Alors le 1-squelette du complexe  $K_T[i, j, k]$  n'est pas planaire.*

Le graphe est composé de  $N$  sommets de degré 5. Une arête reliant toujours deux sommets (il n'y a pas de boucles), nous avons donc  $5/2N$  arêtes. De plus, nous avons le corollaire 2.2.1 qui dit que si le graphe est planaire, alors

$$5/2N \leq 3N - 6$$

Alors,

$$N \geq 12$$

Cela signifie que pour tout  $N$  inférieur strictement à 12 et supérieur ou égal à 6, pour tout accord contenant l'intervalle  $N/2$ , le graphe n'est pas planaire.

Le dernier cas que nous allons étudier au cours de ce mémoire est le cas où nous avons un accord dans  $\mathbb{Z}_N$  de structure intervallique  $[i, j, k]$  dont le complexe est connexe, avec  $i$  et  $j$  premiers entre eux, et avec  $N = ij$ . Nous allons montrer que  $K_{3,3}$  est alors un mineur du 1-squelette du complexe d'accords.

**Théorème 5.2.6.** *Soit un accord de structure intervallique  $[i, j, k]$  dans  $\mathbb{Z}_N$  avec  $\text{pgcd}(i, j, k) = 1$  et  $N = ij$ . Alors  $K_T[i, j, k]$  n'est pas planaire.*

*Preuve.* Soit  $K_T[i, j, k]$  un complexe d'accords dans  $\mathbb{Z}_N$  connexe et tel que  $N = ij$ , avec  $N \geq 6$ .

Regardons déjà le cas où  $N = 6$  (figure 5.5).

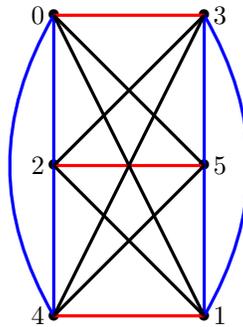


FIGURE 5.5 –  $K_T[2, 3, 1]$

Comme on le voit clairement, les arêtes noires forment le graphe  $K_{3,3}$ . Maintenant, pour trouver ce mineur pour  $N > 6$ , que faut-il ? Nous avons déjà toutes les arêtes de classes de hauteurs  $\{a, a + i\}$ ,  $\{a, a + j\}$  et  $\{a, a + k\}$  (figure 5.6).

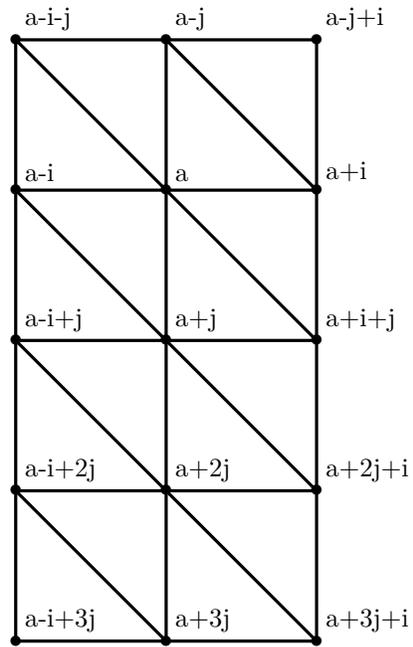


FIGURE 5.6 – Partie de  $K_T[i, j, k]$  centrée en la classe de hauteurs  $a$ .

Il manque donc quelques arêtes afin de retrouver  $K_{3,3}$  dans le graphe (figure 5.7).

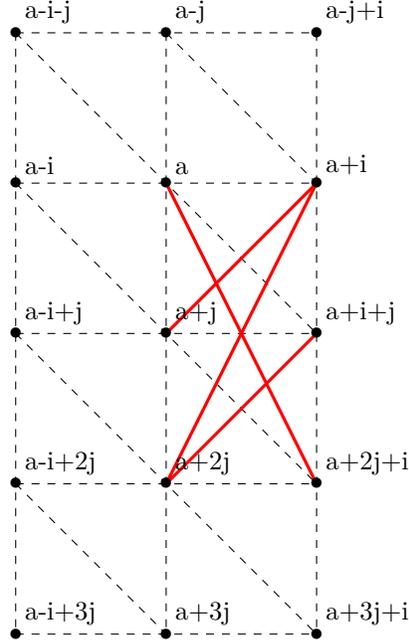


FIGURE 5.7 – Partie de  $K_T[i, j, k]$  centrée en la classe de hauteurs  $a$ .

On peut effectuer une suite de contractions permettant de les obtenir. Il faut contracter les classes de hauteurs :

- $a - i - j$  avec  $a + i + 2j$  afin de relier  $a + i + 2j$  à  $a$ ,
- $a + j$  avec  $a + j + 2i$  afin de relier  $a + j$  avec  $a + i$ ,
- $a + 2j$  avec  $a + 2j + 2i$  afin de relier  $a + 2j$  avec  $a + j + i$ ,
- $a + 2j$  avec  $a - j$  afin de relier  $a + 2j$  avec  $a + i$ .

Premièrement, supposons qu'aucun intervalle n'est d'ordre 2. Alors on peut :

- effectuer  $o(i) - 2$  contractions par les arêtes  $\{a + j, a + j - i\}, \dots, \{a + j + 3i, a + j + 2i\}$ ,
- effectuer  $o(i) - 2$  contractions par les arêtes  $\{a + 2j, a + 2j - i\}, \dots, \{a + 2j + 3i, a + 2j + 2i\}$ ,
- effectuer  $o(j) - 3$  contractions par les arêtes  $\{a + 2j, a + 3j\}, \dots, \{a - 2j, a - j\}$ ,
- effectuer  $o(j) - 3$  contractions par les arêtes  $\{a + 2j + i, a + 3j + i\}, \dots, \{a - 2j + i, a - j + i\}$ ,
- effectuer  $o(i) - 2$  contractions par les arêtes  $\{a - j + i, a - j + 2i\}, \dots, \{a - j - 2i, a - j - i\}$ .

Dans le cas où l'ordre de  $j$  serait 2, alors l'ordre de  $i$  est supérieur à 2 et on peut permuter le rôle de  $i$  et de  $j$ . En effet, si  $o(i) = o(j) = 2$ , alors  $i = j = N/2$  et  $N = N/2 \times N/2$  ce qui veut dire que  $N = 4$  et le graphe est par conséquent

planaire. On considérera dès lors que  $o(i) \geq 2$  et  $o(j) \geq 3$ .

Il faut maintenant vérifier que ces contractions ne s'intersectent pas. En effet, si tel était le cas, alors on aurait deux sommets considérés confondus, ce qui empêcherait l'apparition de  $K_{3,3}$  comme mineur.

Tout d'abord, comme  $i$  et  $j$  sont premier entre eux et  $ij = 0$ , on a que pour tout  $k$  et tout  $k'$  entiers relatifs,  $a + j + ki \neq a + 2j + k'$ . En effet, si tel était le cas, alors on aurait l'existence d'un couple  $(k_0, k'_0)$  tel que  $(k - k')i = j$  ce qui est impossible. Par le même raisonnement, on a donc les suites de contractions  $\{a + j, a + j - i\}, \dots, \{a + j + 3i, a + j + 2i\}, \{a + 2j, a + 2j - i\}, \dots, \{a + 2j + 3i, a + 2j + 2i\}$ , et  $\{a - j + i, a - j + 2i\}, \dots, \{a - j - 2i, a - j - i\}$  qui ne s'intersectent pas.

De la même façon, en remplaçant les rôles de  $i$  et de  $j$ , on a que les suites de contractions  $\{a + 2j, a + 3j\}, \dots, \{a - 2j, a - j\}$  et  $\{a + 2j + i, a + 3j + i\}, \dots, \{a - 2j + i, a - j + i\}$ , ne s'intersectent pas non plus.

Enfin, il faut montrer que les contractions dans la direction de l'intervalle  $i$  n'intersectent pas celles dans la direction  $j$ . Supposons que  $a - j + ki = a + k'j$ . Alors  $k = o(i)$  et  $k' = o(j)$ , ce qui n'est pas possible, car nous nous arrêtons respectivement à  $o(i) - 2$  et  $o(j) - 3$ . Toutes les suites de contractions suivant  $j$  partant de  $a + 2j$  ou  $a + 2j + i$ , on est assurés la suite de contractions  $\{a - j + i, a - j + 2i\}, \dots, \{a - j - 2i, a - j - i\}$  n'intersecte aucune autre suite de contractions.

Ce même raisonnement s'applique aux suites  $\{a + 2j + i, a + 3j + i\}, \dots, \{a - 2j + i, a - j + i\}$  et  $\{a + 2j, a + 3j\}, \dots, \{a - 2j, a - j\}$ , on démontre ainsi que, comme ces deux suites de contractions suivant la direction  $j$  n'intersectent aucune suite de contractions suivant  $i$ , à l'exception près des deux suites concernant  $a + 2j$ , qui s'intersectent en leur point de départ.

En effet, il faut tout de même prendre en compte le rôle particulier de la classe de hauteurs  $a + 2j$  dont partent deux suites de contractions, permettant ainsi à celle-ci d'hériter à la fois d'une arête.

Ainsi, nous sommes assurés que, pour tout  $N$ , et tout  $i, j, k$  vérifiant  $\text{pgcd}(i, j, k) = 1$  et  $N = ij$ , alors le graphe correspondant au 1-squelette  $K_T[i, j, k]$  contient  $K_{3,3}$  comme mineur et n'est donc pas planaire.

# Chapitre 6

## Conclusion

### 6.1 Travail effectué

Nous avons donc tout d'abord présenté la théorie des graphes ainsi que celle des matroïdes, leurs liens, et les possibilités qu'elles offrent en terme de recherche. Puis nous avons tout d'abord exploré quelques pistes afin d'utiliser les matroïdes dans le cadre des complexes d'accords, pour finalement proposer une de leurs possibles utilisations sur les graphes composant les 1-squelettes.

De ceci, nous en avons déduit quelques propriétés sur la structure de ces graphes, en termes de connexité et de représentation planaire.

Toutefois, nous n'avons pas pu, faute de temps, terminer l'étude de ces graphes, car nous n'avons pas trouvé de résultat général sur l'aspect planaire des graphes.

### 6.2 Perspectives

Le polynôme de Tutte pourrait être intéressant à étudier sur ces graphes, car il donne de manière rapide un très grand nombre d'information, dès lors qu'on sait le calculer. De par sa nature, il est parfois possible de le déduire sur des graphes formant des motifs similaires, par récurrence. Ici, sur les complexes d'accords, on peut, dans certaines conditions, retrouver un même motif sur un nombre de sommets quelconques. Mais nous n'avons pas pu dans le cadre de ce mémoire le calculer, car lorsque l'on ajoute deux sommets au motif, par exemple en passant de 6 à 8 notes, on change l'emplacement de certaines arêtes, et on en rajoute, en fonction du degré du graphe, 5 ou 6 arêtes. En terme de nombre de sous-ensembles d'éléments, cela devient rapidement très difficile à calculer.

Enfin, il reste à savoir si une autre utilisation des matroïdes, peut-être ne s'appliquant pas sur les complexes d'accords mais directement sur les accords, permettant éventuellement de donner une représentation des accords d'un nombre quelconque de notes de la même façon, comme indépendants d'un ensemble plus grand par exemple, est envisageable.

# Bibliographie

- [1] Christine Solnon. Théorie des graphes et optimisation dans les graphes. page 15. <http://liris.cnrs.fr/csolnon/polyGraphes.pdf>.
- [2] Thomas Chomette. Graphes planaire. page 4, 2003. <http://culture-math.ens.fr/maths/pdf/combi/planaire.pdf>.
- [3] Thomas Chomette. Graphes planaire. page 7, 2003. <http://culture-math.ens.fr/maths/pdf/combi/planaire.pdf>.
- [4] Jorge Ramirez. Cours de théorie des matroïdes. page 75, 2013.
- [5] Louis Bigo. *Représentations symboliques musicales et calcul spatial*. PhD thesis, IRCAM et LACL, 2013.