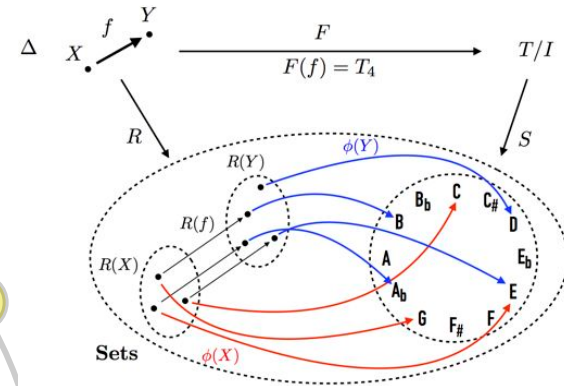
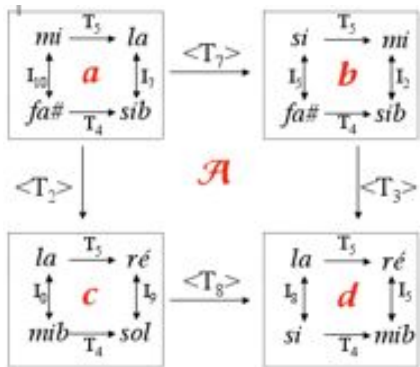


SIC

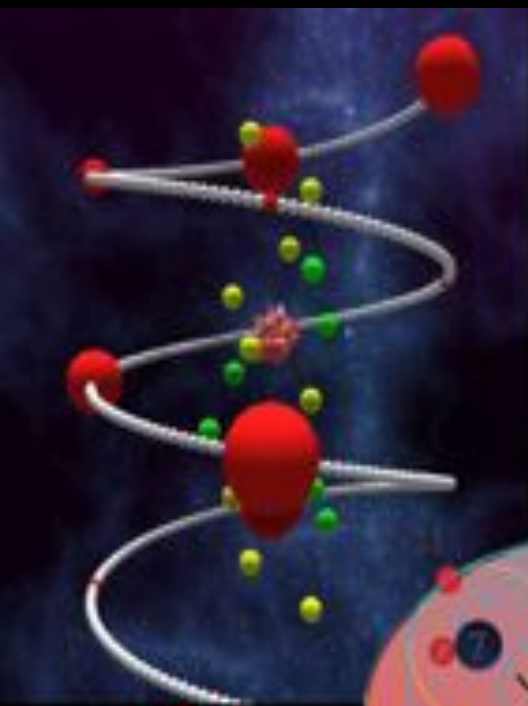
Séminaire Itinérant des catégories

Lille 23 mars 2016

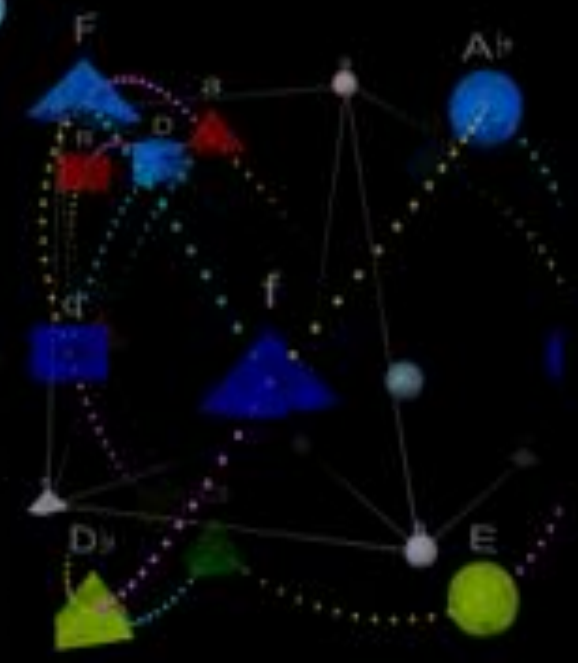
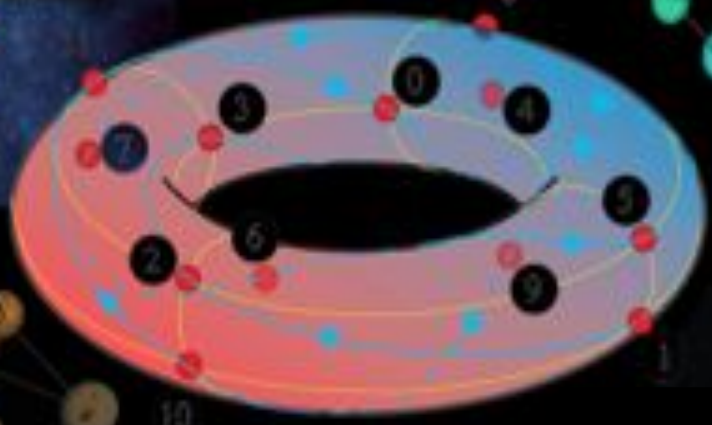
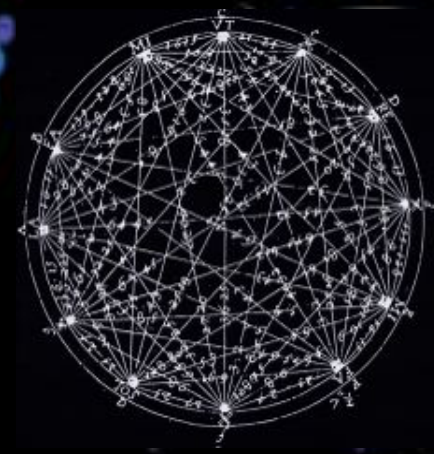
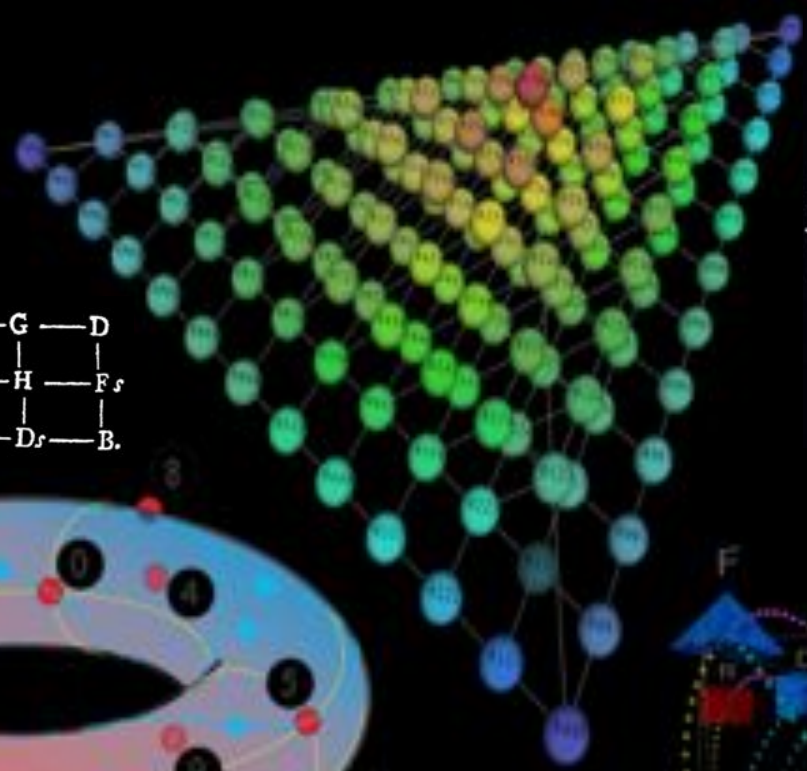


Approche catégorielle en analyse musicale

Alexandre Popoff, Moreno Andreatta & Andrée Ehresmann
(en collaboration avec Carlos Agon)



F	—	C	—	G	—	D
A	—	E	—	H	—	F _s
C _s	—	G _s	—	D _s	—	B.



L'algèbre (le temps) et la géométrie (l'espace) en musique

MATH / MUSIC MEETINGS

Creativity in Music and Mathematics

Pierre Boulez & Alain Connes

Encounter with two major figures of musical creation and contemporary mathematical research: Pierre Boulez and Alain Connes.

What is the role of intuition in mathematical reasoning and in artistic activities? Is there an aesthetic dimension to mathematical activity? Does the notion of elegance of a mathematical demonstration or of a theoretical construction in music play a role in creativity?



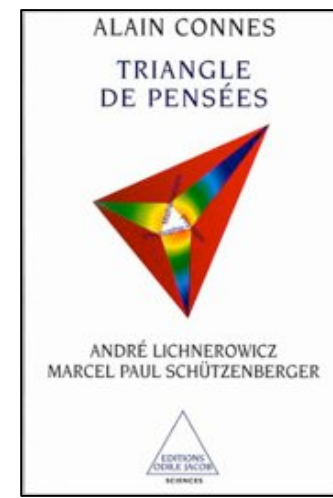
Gérard Assayag, director of the CNRS/IRCAM Laboratory for The Science and Technology of Music and Sound, will lead this dialogue on invention in the two disciplines.

Photo: Pierre Boulez © Jean Radel

Wednesday, June 15, 2011, 6:30pm / IRCAM, Espace de projection

« La **musique** s'inscrit dans le temps exactement comme l'**algèbre** : dans les mathématiques, il y a cette dualité fondamentale entre d'un côté la **géométrie** qui correspond aux arts visuels, aux images mentales ; et de l'autre côté l'**algèbre**, qui inscrit une temporalité. Cela s'inscrit dans le temps, c'est le **calcul**, quelque chose qui est très proche du langage, et qui en a la précision diabolique.. »

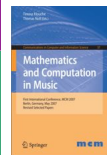
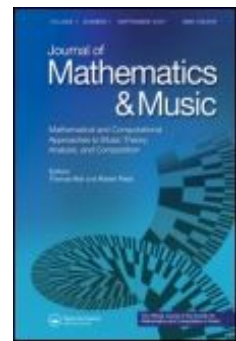
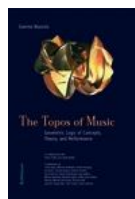
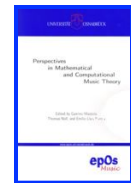
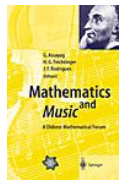
(Alain Connes, dans “Créativité en musique et en mathématiques”, Ircam, Conférence MCM, juin 2011).



...

Mathématiques/musique de 1999 à nos jours

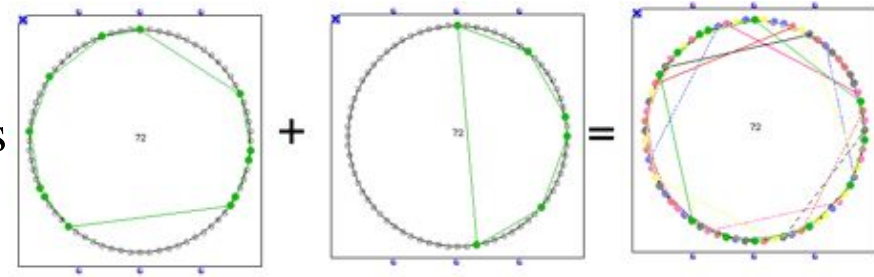
- 1999: 4^e Forum Diderot (Paris, Vienne, Lisbonne), *Mathematics and Music* (G. Assayag, H.G. Feichtinger, J.F. Rodrigues, Springer, 2001)
- 2000-2001: *MaMuPhi Seminar, Penser la musique avec les mathématiques ?* (Assayag, Mazzola, Nicolas éd., Coll. 'Musique/Sciences', Ircam/Delatour, 2006)
- 2000-2003: International Seminar on *MaMuTh (Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory* (Mazzola, Noll, Luis-Puebla eds, epOs, 2004)
- 2003: *The Topos of Music* (G. Mazzola et al.)
- 2001-....: *MaMuX Seminar* at Ircam
- 2004-....: *mamuphi Seminar* (Ens/Ircam)
- 2006: Collection 'Musique/Sciences' (Ircam/Delatour France)
- 2007: *Journal of Mathematics and Music* (Taylor & Francis) and *SMCM*
- 2007: First MCM 2007 (Berlin) and *Proceedings* by Springer
- 2007-....: AMS Special Session on *Mathematical Techniques in Musical Analysis*
- 2009: *Computational Music Science* (eds: G. Mazzola, M. Andreatta, Springer)
- 2009: MCM 2009 (Yale University) and *Proceedings* by Springer
- 2010: **Mathematics Subject Classification : 00A65 Mathematics and music**
- 2011: MCM 2011 (Ircam, 15-17 June 2011) and *Proceedings LNCS Springer*
- 2013: MCM 2013 (McGill University, Canada, 12-14 June 2013) - Springer
- 2015: MCM 2015 (Queen Mary University, Londres, 22-25 June 2013) - Springer



Quand la recherche musicale rencontre les matheux...

- **D. T. Vuza**

- Canons mosaïques et suites périodiques et calcul de différences finies

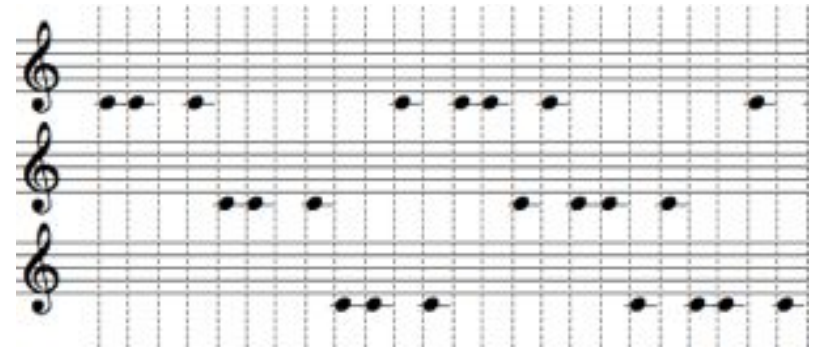


- **E. Amiot**

- Canons, DFT, mélodies autosimilaires

- **Th. Noll**

- Canons mosaïques augmentés

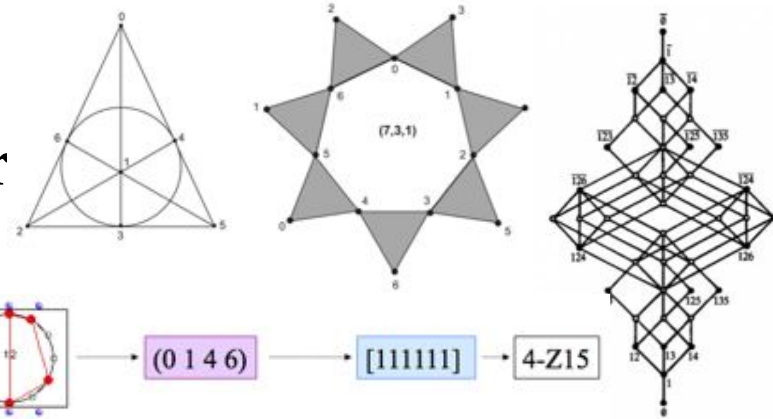


- **F. Jedrzejewski**

- Canons mosaïques de Vuza, block-design

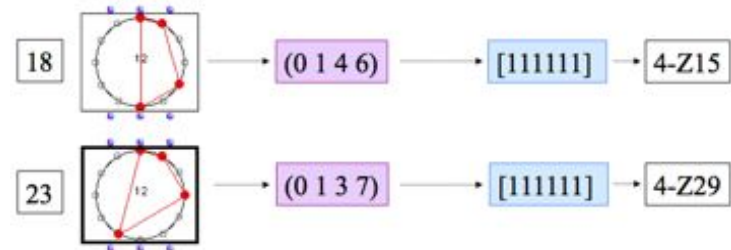
- **B. Ganter, S. Schmidt, T. Schlemmer**

- *Formal Concept Analysis* en musique



- **J.-P. Allouche**

- Automates, nsembles homométriques



- **F. Acquistapace**

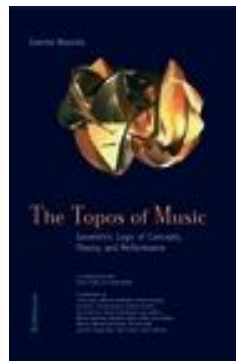
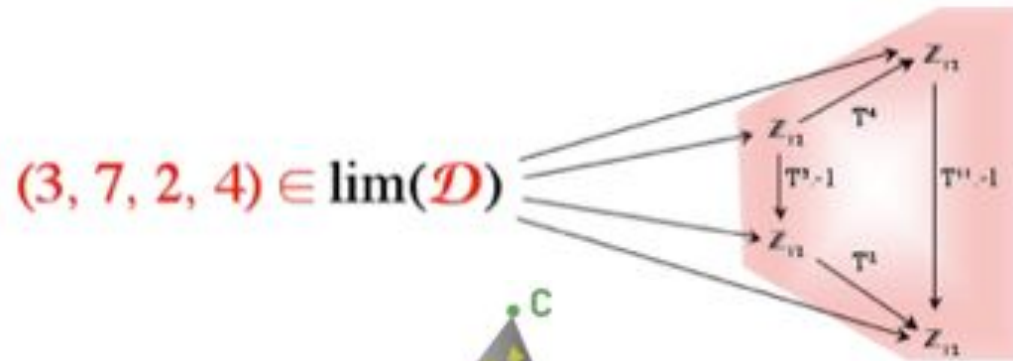
- Canons de Vuza, espaces topologiques musicaux, treillis de Galois d'accords

Quand la recherche musicale rencontre les catégoriciens

- **G. Mazzola**

- Groupes, modules, foncteurs, gestes

$$(3, 7, 2, 4) \in \lim(\mathcal{D})$$

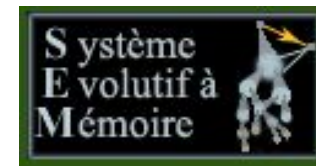
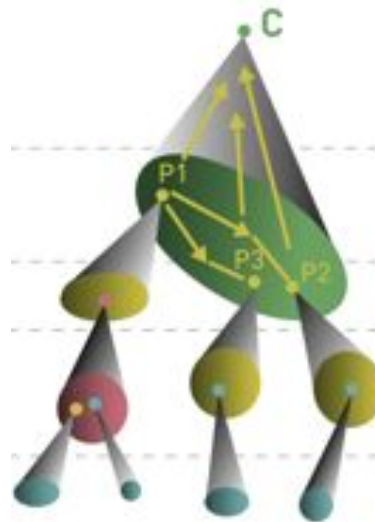


- **R. Guitart**

- Approche catégorielle à la créativité

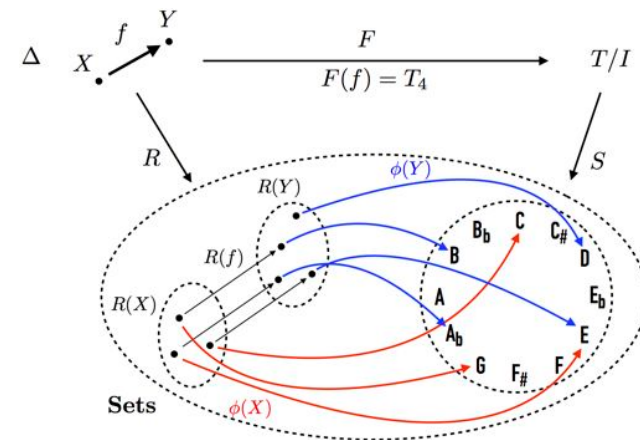
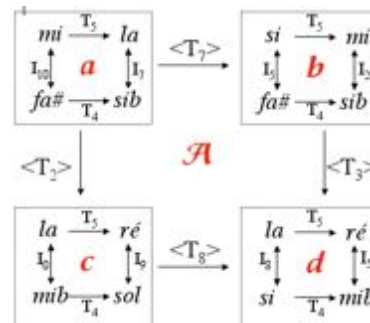
- **A. Ehresmann**

- Approche catégorielle à la créativité, généralisation de la théorie transformationnelle de D. Lewin



- **A. Popoff**

- Généralisation de la théorie transformationnelle et des réseaux de Klumpenhouwer



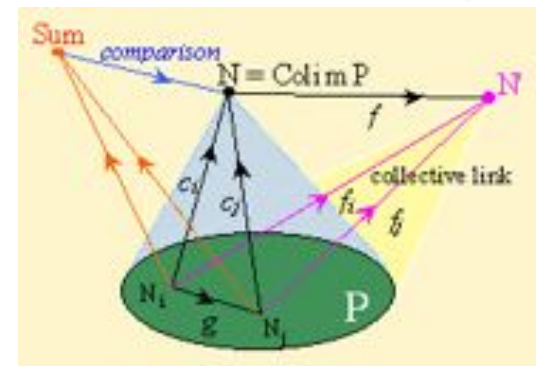
Vers une théorie catégorielle de la créativité (en musique, en cognition et dans le discours)

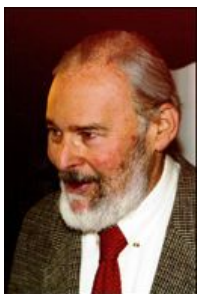
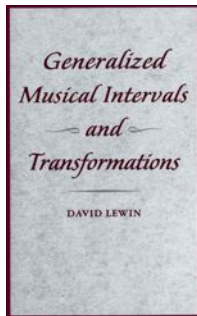
Abstract

This article presents a first attempt at establishing a **category-theoretical model of creative processes**. The model, which is applied to musical creativity, discourse theory, and cognition, suggests the relevance of the notion of “**colimit**” as a unifying construction in the three domains as well as the central role played by the **Yoneda Lemma** in the categorical formalization of creative processes.



→ Andreatta M., A. Ehresmann, R. Guitart, G. Mazzola, « Towards a categorical theory of creativity », MCM 2013, McGill University, Montreal, June 12-14, 2013, Springer, 2013.





D. Lewin

Système d'Intervalles Généralisés - Système Généralisé d'Intervalles David Lewin's *Generalized Interval System* [GMIT, 1987]

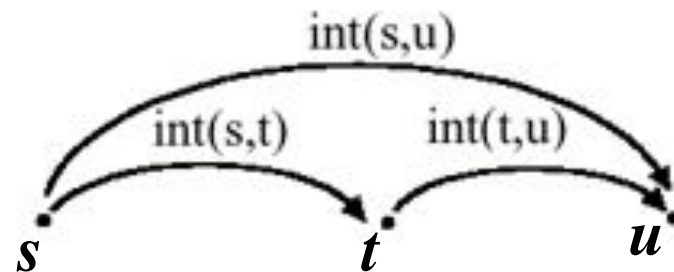
$$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$$

S = ensemble

$(G, \bullet)$ = groupe d'intervalles

int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

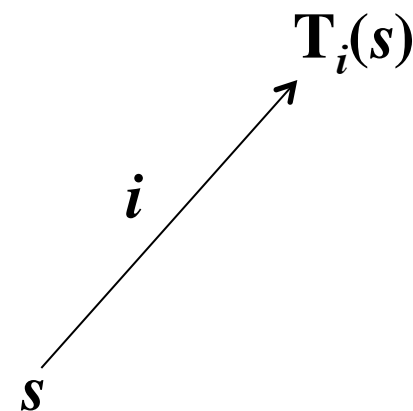


Action
simplement
transitive

1. Pour tous objets s, t, u dans S :

$$\text{int}(s, t) \bullet \text{int}(t, u) = \text{int}(s, u)$$

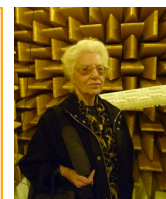
2. Pour tout objet s dans S et tout intervalle i dans G il y a un seul objet t dans S tel que
 $\text{int}(s, t) = i$



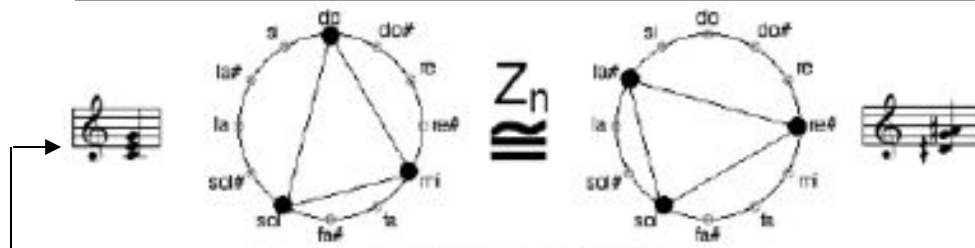
Soit $\tau = \{T_i ; i \in G\}$ le groupe des transpositions

$$\text{GIS} = (S, G, \text{int}) \Leftrightarrow \tau \times S \rightarrow S \text{ telle que } (T_i, s) \rightarrow T_i(s) \text{ où } \text{int}(s, T_i(s)) = i$$

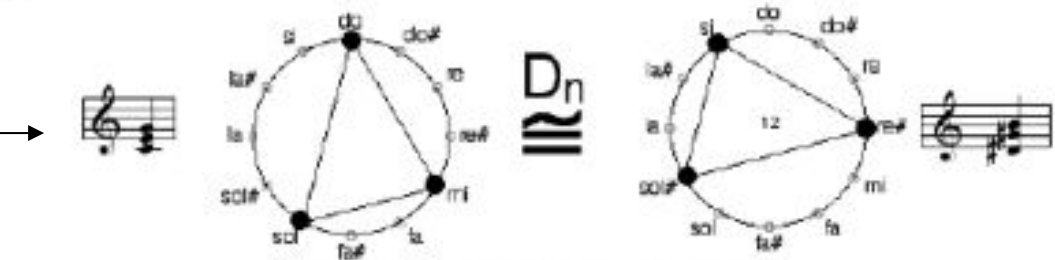
- ➔ Extension de la théorie transformationnelle aux groupoïdes et aux actions générales de groupoïdes (thèse J. Mandereau, 2011-2013)
- ➔ Liens avec les Systèmes Evolutifs à Mémoire (thèse G. Genuys, 2014-2017)



Classes d'équivalences d'accords et actions



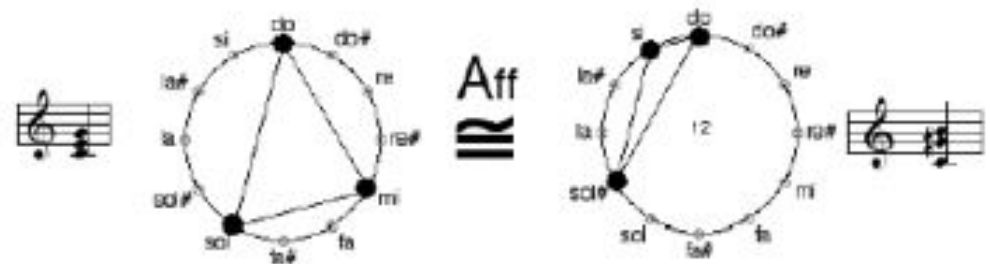
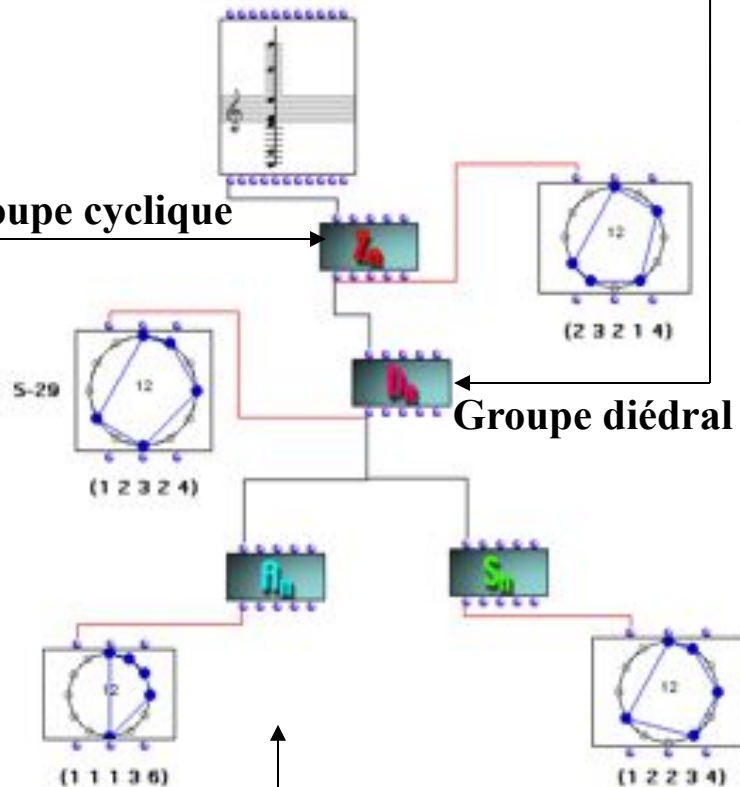
$$\mathbb{Z}_{12} = \langle T_k \mid (T_k)^{12} = T_0 \rangle$$



$$\mathbb{D}_{12} = \langle T_k, I \mid (T_k)^{12} = I^2 = T_0, ITI = I(IT)^{-1} \rangle = \mathbb{T}/\mathbb{I}$$

Groupe cyclique

Groupe diédral

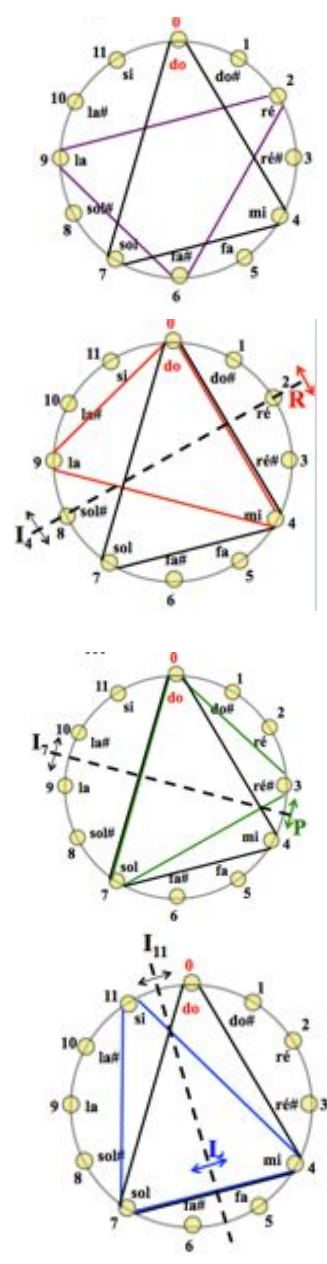
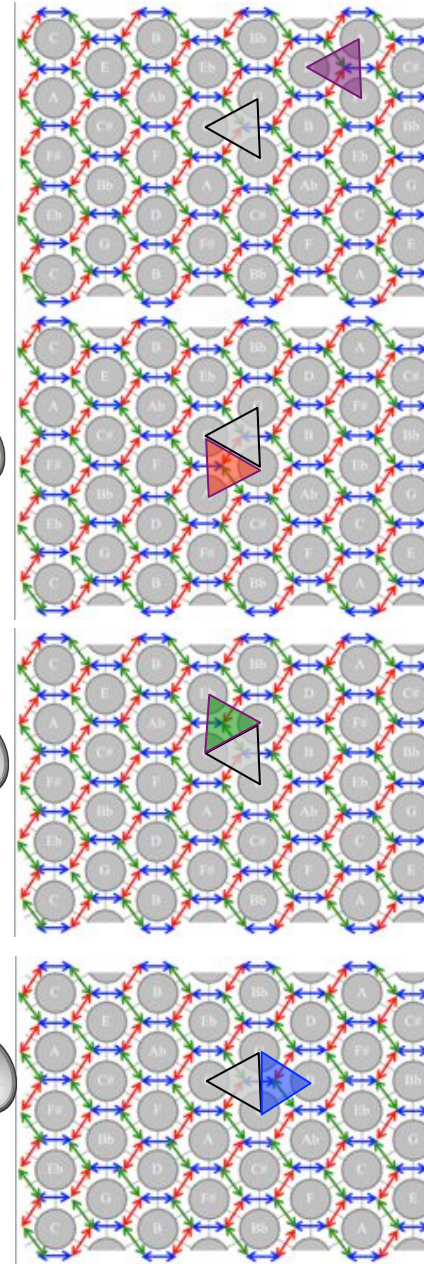
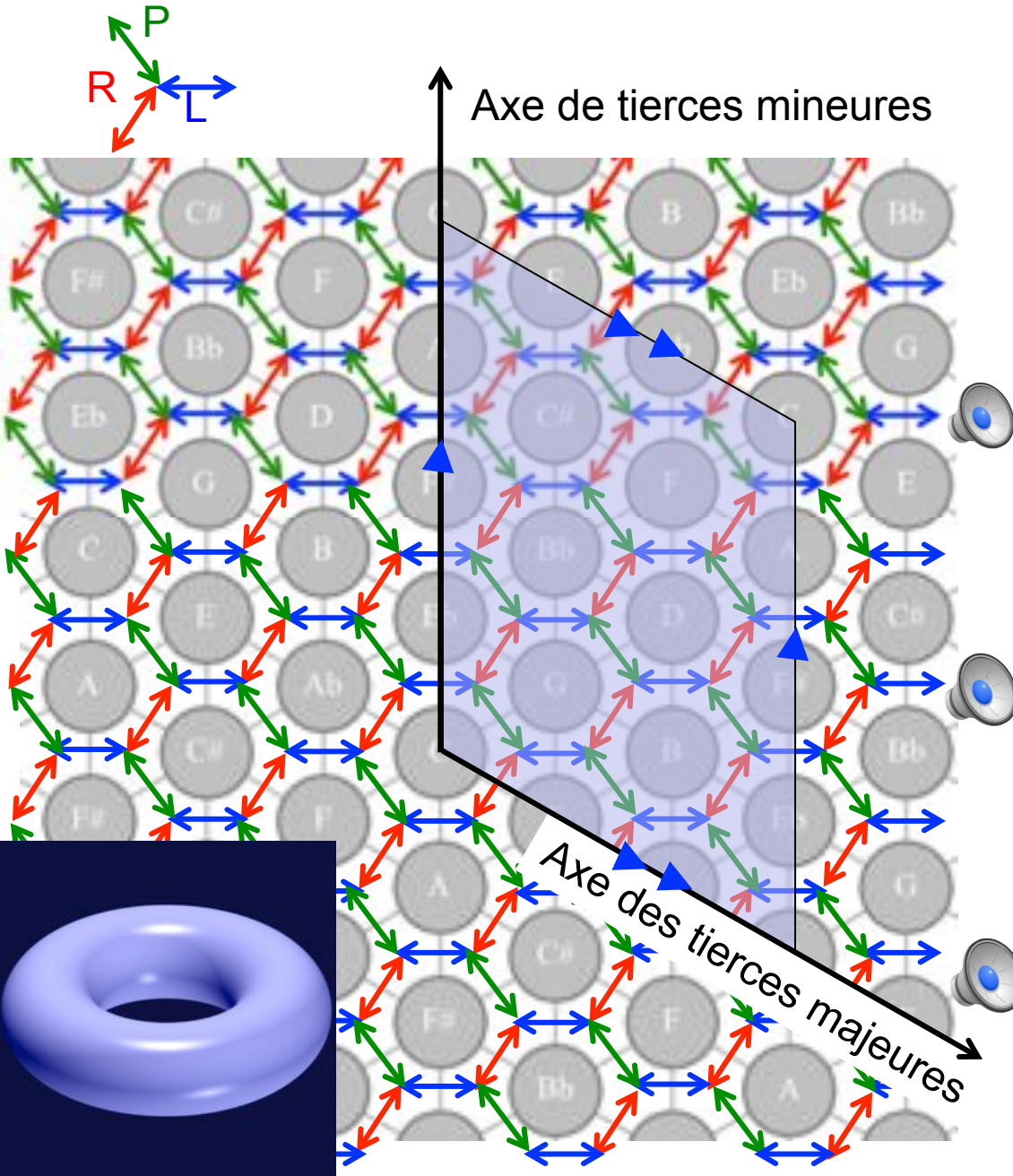


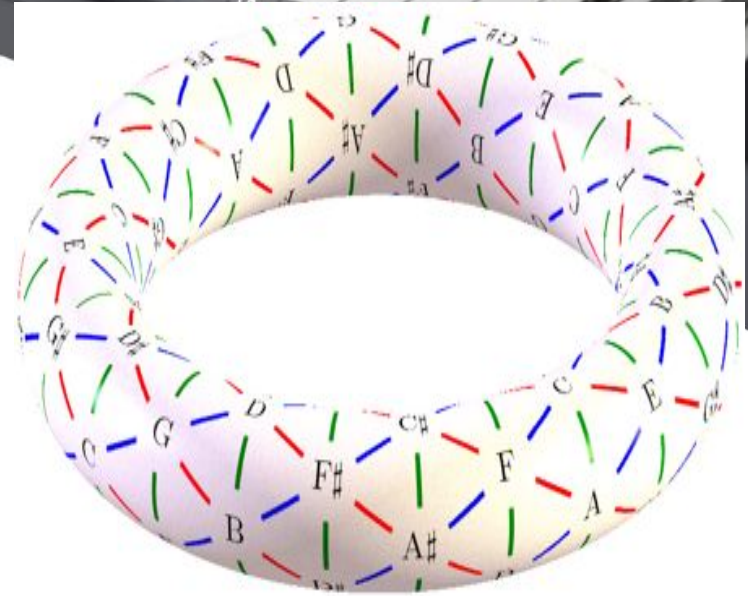
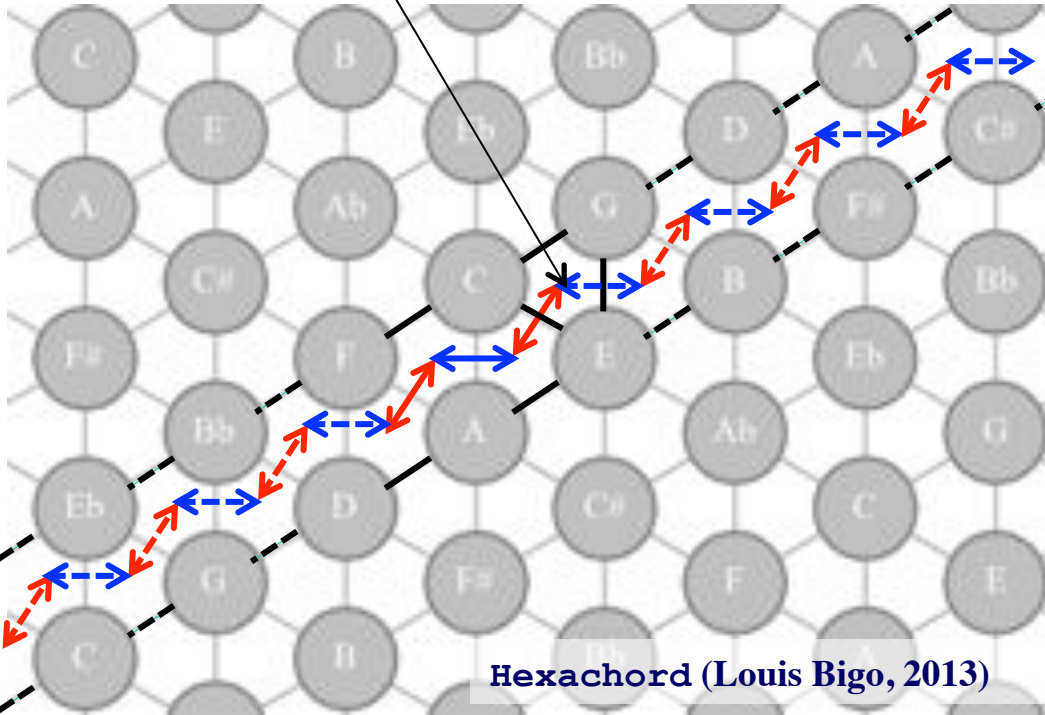
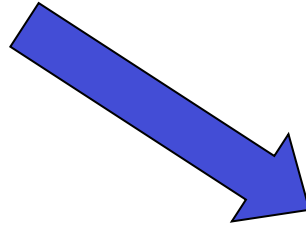
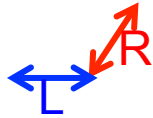
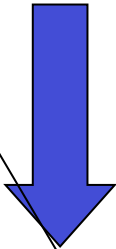
$$\mathbb{Aff} = \{f \mid f(x) = ax + b, a \in (\mathbb{Z}_{12})^*, b \in \mathbb{Z}_{12}\}$$

Architecture paradigmatique

Groupe affine

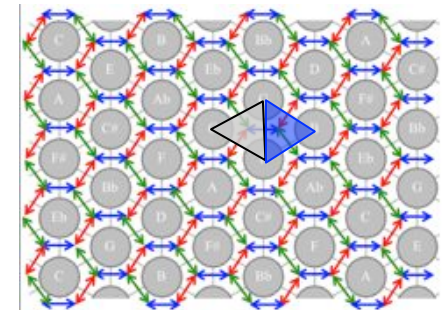
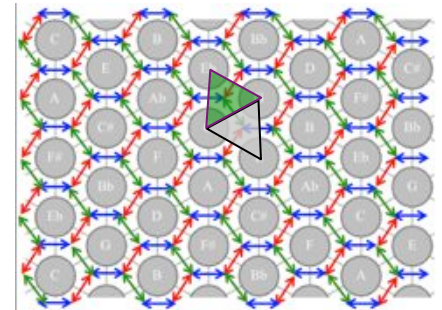
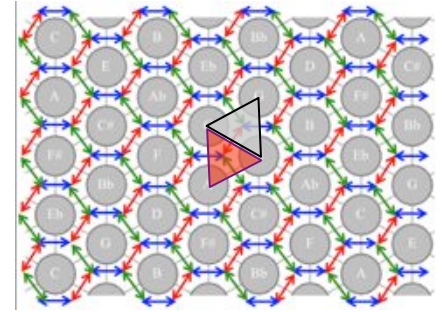
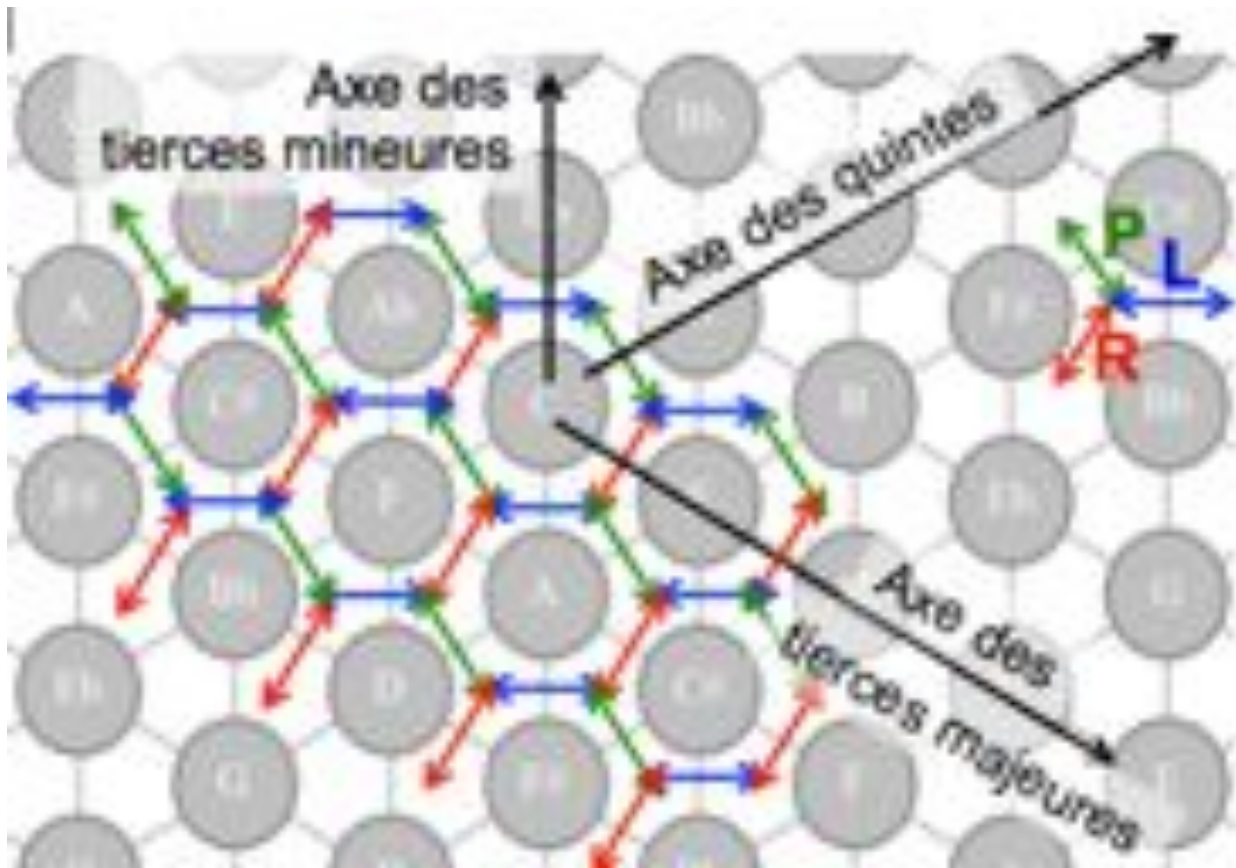
Le Tonnetz et ses symétries





→ Source : <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/67/TonnetzTorus.gif>

Le Tonnetz en tant que GIS

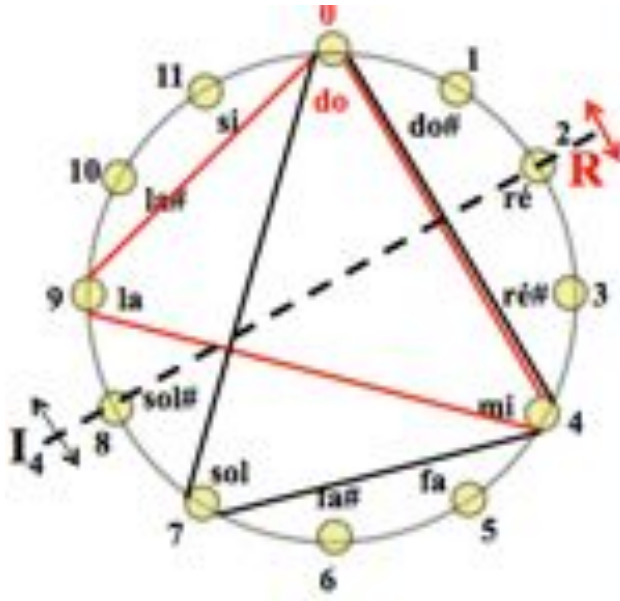


$$\rho = \langle L, R \mid L^2 = (LR)^{12} = 1 ; LRL = L(LR)^{-1} \rangle$$

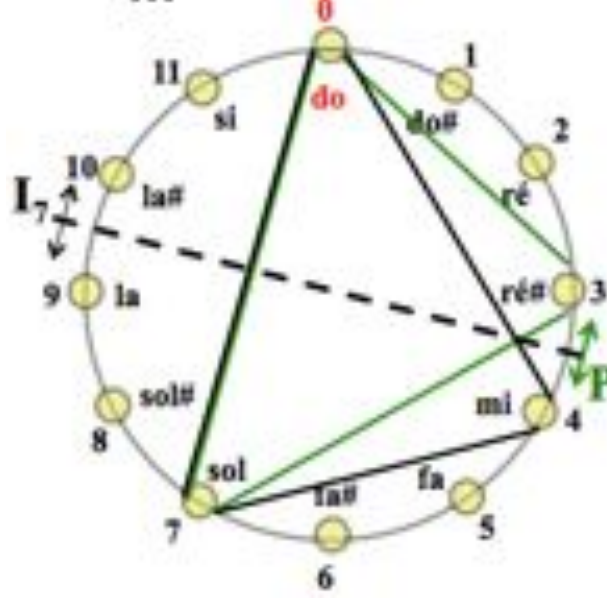
ρ opère de façon simplement transitive sur l'ensemble S des 24 triades consonantes

$\Rightarrow (S, \rho, \text{int})$ est un GIS

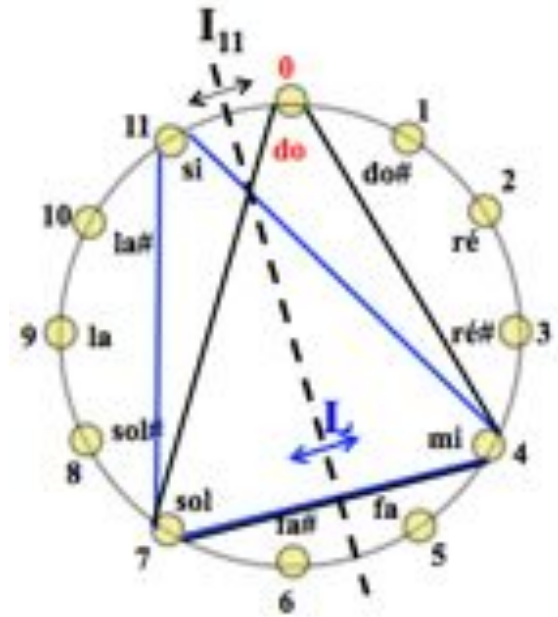
Une autre structure de GIS sur l'espace S



$$I_4: x \rightarrow 4 - x$$



$$I_7: x \rightarrow 7 - x$$



$$I_{11}: x \rightarrow 11 - x$$

$$D_{12} = \langle I, T \mid I^2 = T^{12} = 1 ; ITI = I(IT)^{-1} \rangle$$

D_{12} opère de façon simplement transitive sur l'ensemble S des 24 triades consonantes

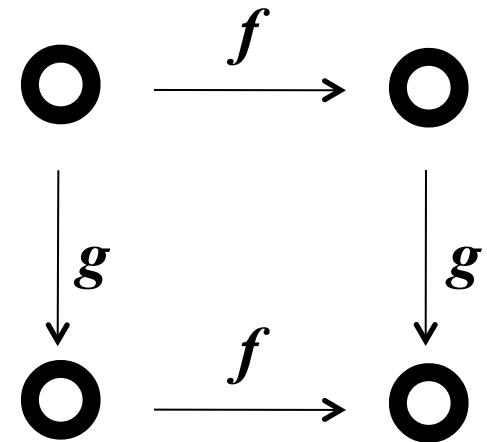
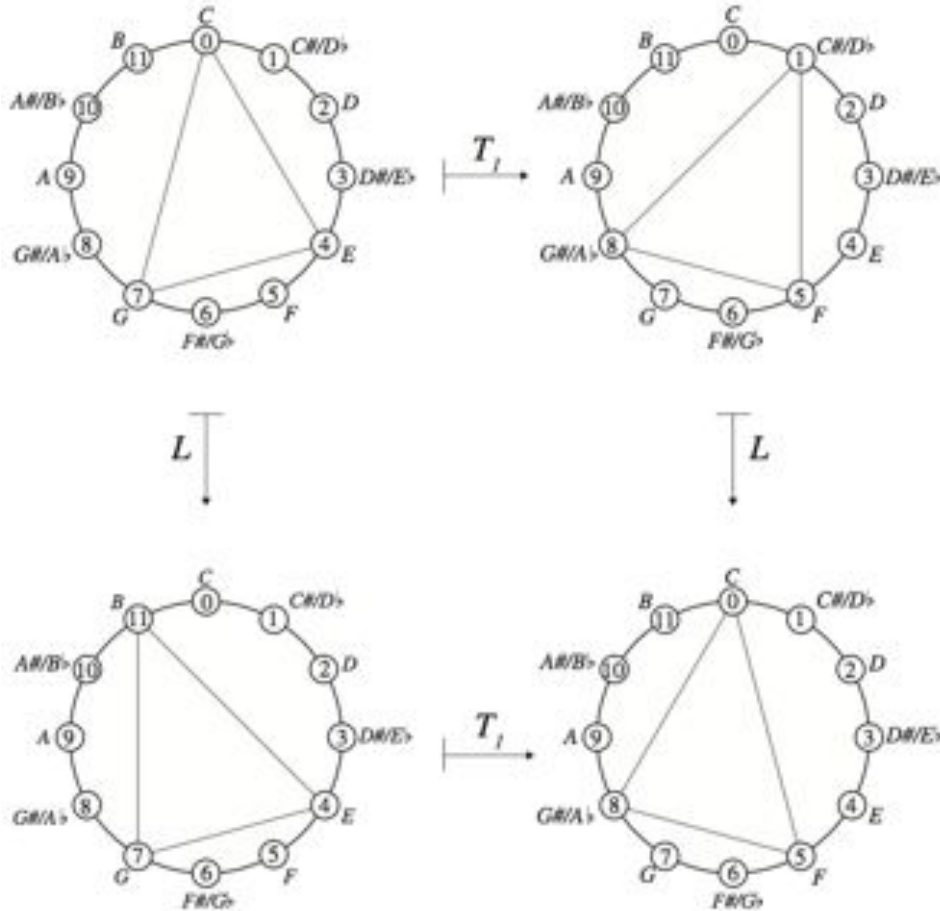
$\Rightarrow (S, D_{12}, \text{int})$ est un GIS

Dualité entre (S, ρ, int) et (S, D_{12}, int)

$$\rho = \langle L, R \mid L^2 = (LR)^{12} = 1 ; LRL = L(LR)^{-1} \rangle$$

$$\Leftrightarrow D_{12} = \langle I, T \mid I^2 = T^{12} = 1 ; ITI = I(IT)^{-1} \rangle$$

$\Rightarrow \rho$ et D_{12} sont l'un le *centralisateur* de l'autre (dans le groupe symétrique $\text{Sym}(S)$)



Tout diagramme commute

$$\forall f \in D_{12}$$

$$\forall g \in \rho$$

$\rightarrow$ Alissa Crans, Tom Fiore and Ramon Satyendra, « Musical Actions of Dihedral Groups », *The American Mathematical Monthly*, Vol. 116 (2009), No. 6: 479 - 495

Les K-nets ou les limites de l'approche paradigmatique

D. Lewin, A Tutorial on K-nets using the Chorale in Schoenberg's Op.11, N°2, JMT, 1994

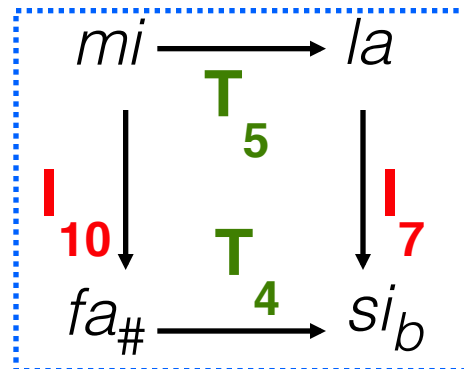


D. Lewin

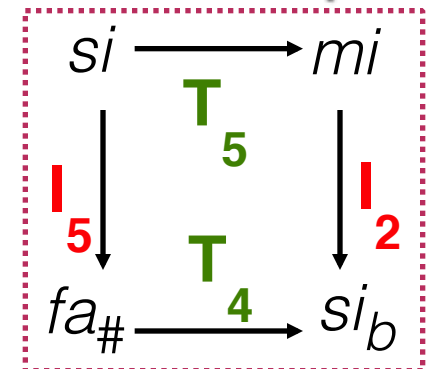


H. Klumpenhouwer

$$\langle T_k \rangle : T_m \rightarrow T_m \\ l_m \rightarrow l_{k+m}$$



$\langle T_7 \rangle$

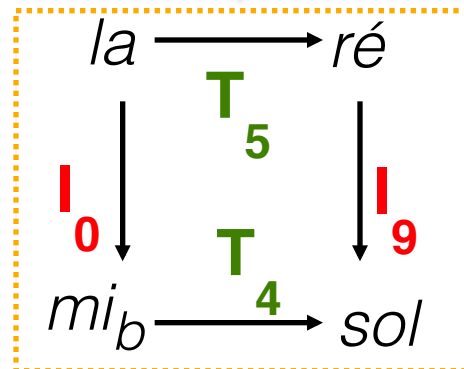


$\langle T_2 \rangle$

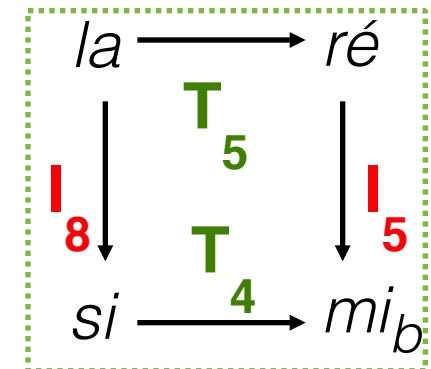
$\langle T_{10} \rangle$

$\langle T_3 \rangle$

$$\langle T_k \rangle \cdot \langle T_m \rangle = \langle T_{k+m} \rangle$$



$\langle T_8 \rangle$



Les K-nets ou les limites de l'approche paradigmatique

D. Lewin, A Tutorial on K-nets using the Chorale in Schoenberg's Op.11, N°2, JMT, 1994



D. Lewin



H. Klumpenhower

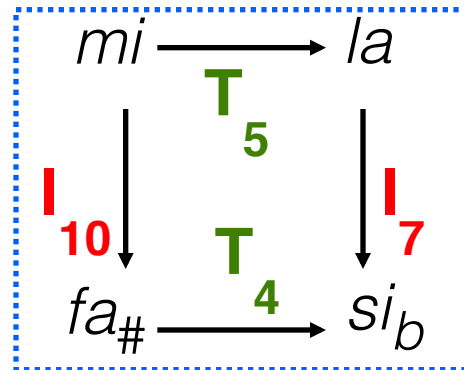
$$\langle T_k \rangle : T_m \rightarrow T_m$$

$$I_m \rightarrow I_{k+m}$$

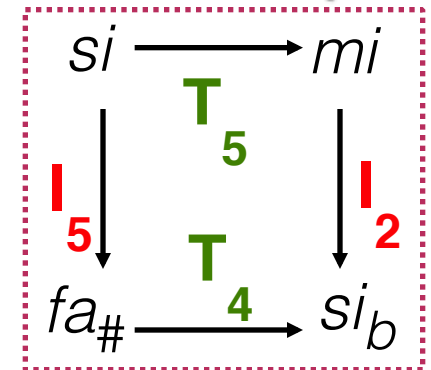
$$T_m : x \rightarrow x+m$$

$$I_m : x \rightarrow m-x$$

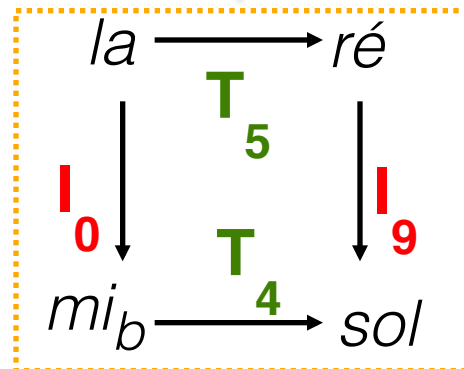
$$\langle T_k \rangle \cdot \langle T_m \rangle = \langle T_{k+m} \rangle$$



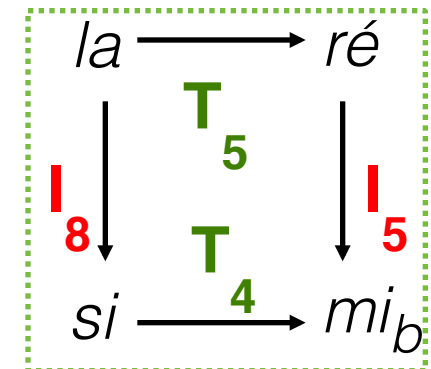
$\langle T_7 \rangle$



$\langle T_3 \rangle$



$\langle T_8 \rangle$



$\langle T_2 \rangle$

$\langle T_{10} \rangle$

Les K-nets ou les limites de l'approche paradigmatique

D. Lewin, A Tutorial on K-nets using the Chorale in Schoenberg's Op.11, N°2, JMT, 1994



D. Lewin



H. Klumpenhouwer

$$\langle T_k \rangle : T_m \rightarrow T_m$$

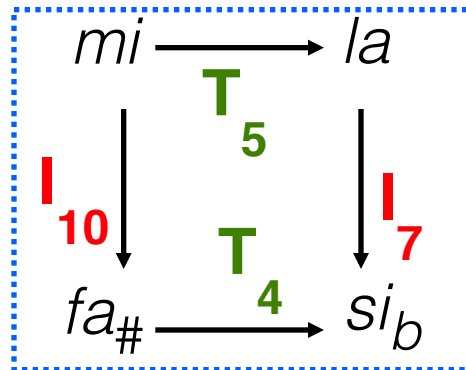
$$I_m \rightarrow I_{k+m}$$

$$\langle I_k \rangle : T_m \rightarrow T_{-m}$$

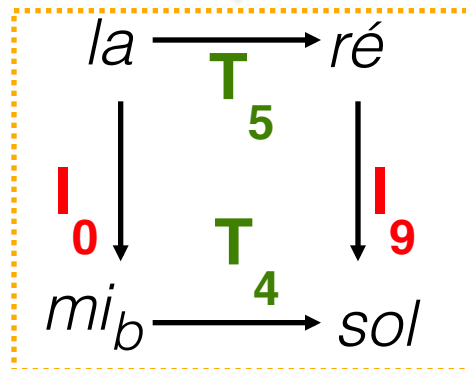
$$I_m \rightarrow I_{k-m}$$

$$\langle T_k \rangle \cdot \langle T_m \rangle = \langle T_{k+m} \rangle$$

$$\langle I_k \rangle \cdot \langle I_m \rangle = \langle T_{m-k} \rangle$$



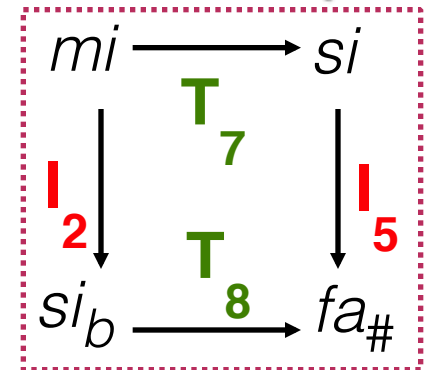
$\langle T_2 \rangle$



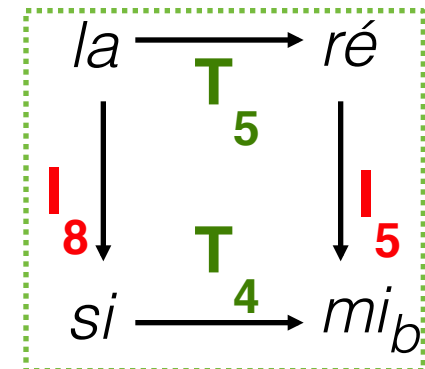
$\langle I_0 \rangle$

$\langle T_{10} \rangle$

$\langle T_8 \rangle$



$\langle I_{10} \rangle$



Les K-nets ou les limites de l'approche paradigmatique

D. Lewin, A Tutorial on K-nets using the Chorale in Schoenberg's Op.11, N°2, JMT, 1994



D. Lewin



H. Klumpenhouwer

$$\langle T_k \rangle : T_m \rightarrow T_m$$

$$I_m \rightarrow I_{k+m}$$

$$\langle I_k \rangle : T_m \rightarrow T_{-m}$$

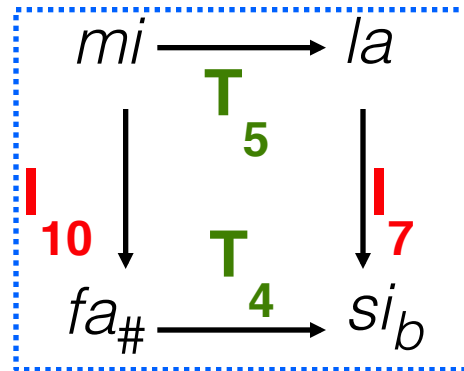
$$I_m \rightarrow I_{k-m}$$

$$\langle T_k \rangle \cdot \langle T_m \rangle = \langle T_{k+m} \rangle$$

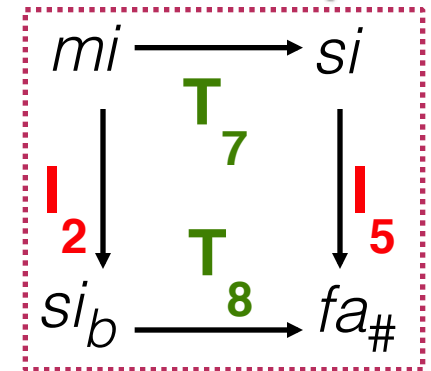
$$\langle T_k \rangle \cdot \langle I_m \rangle = \langle I_{m-k} \rangle$$

$$\langle I_m \rangle \cdot \langle T_k \rangle = \langle I_{k+m} \rangle$$

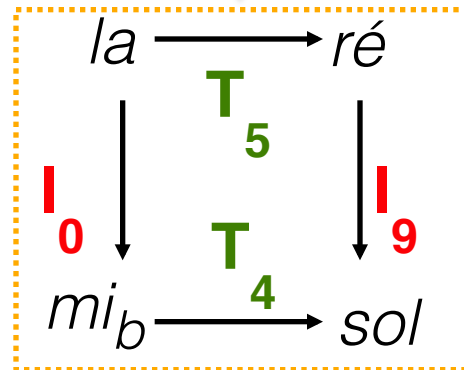
$$\langle I_k \rangle \cdot \langle I_m \rangle = \langle T_{m-k} \rangle$$



$\langle I_0 \rangle$



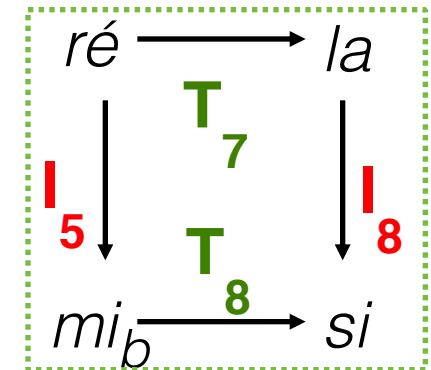
$\langle T_3 \rangle$



$\langle T_2 \rangle$

$\langle I_3 \rangle$

$\langle I_5 \rangle$

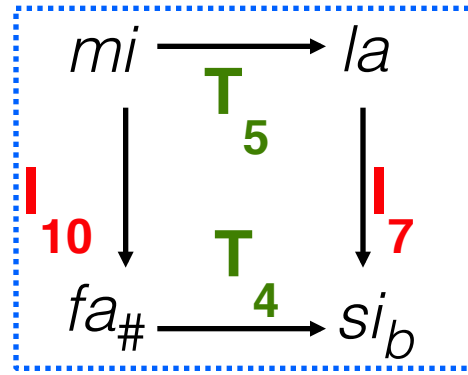


$\langle T_3 \rangle$

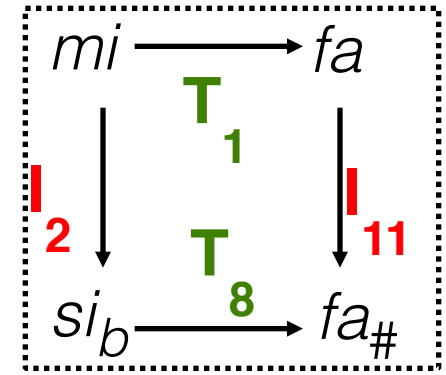
Premières généralisations via les isographies affines

$$\langle M_{5,k} \rangle : T_m \rightarrow T_{5m} \\ l_m \rightarrow l_{k+5m}$$

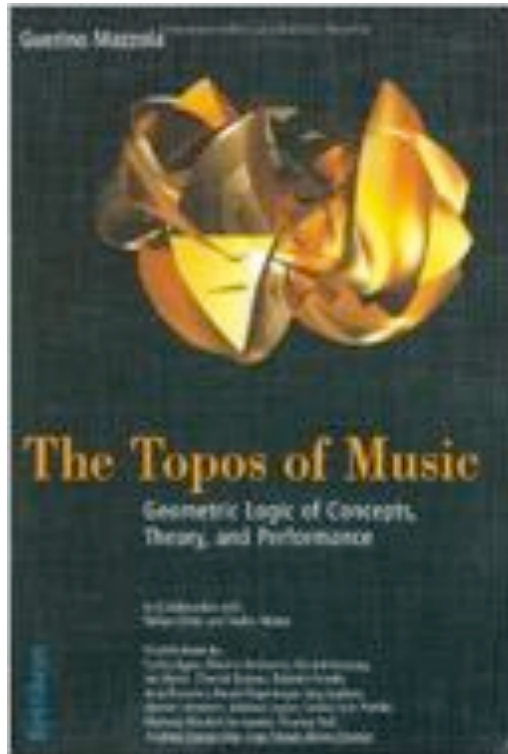
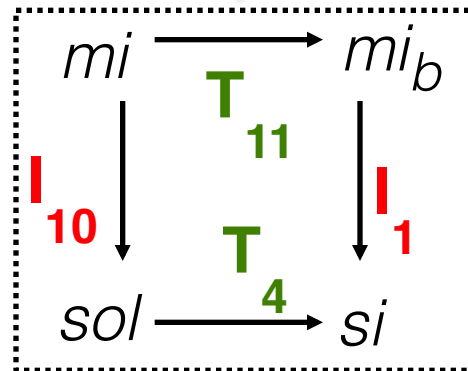
$$\langle M_{7,k} \rangle : T_m \rightarrow T_{7m} \\ l_m \rightarrow l_{k+5m}$$



$$\langle M_{5,0} \rangle$$



$$\langle M_{7,0} \rangle$$



D. Lewin

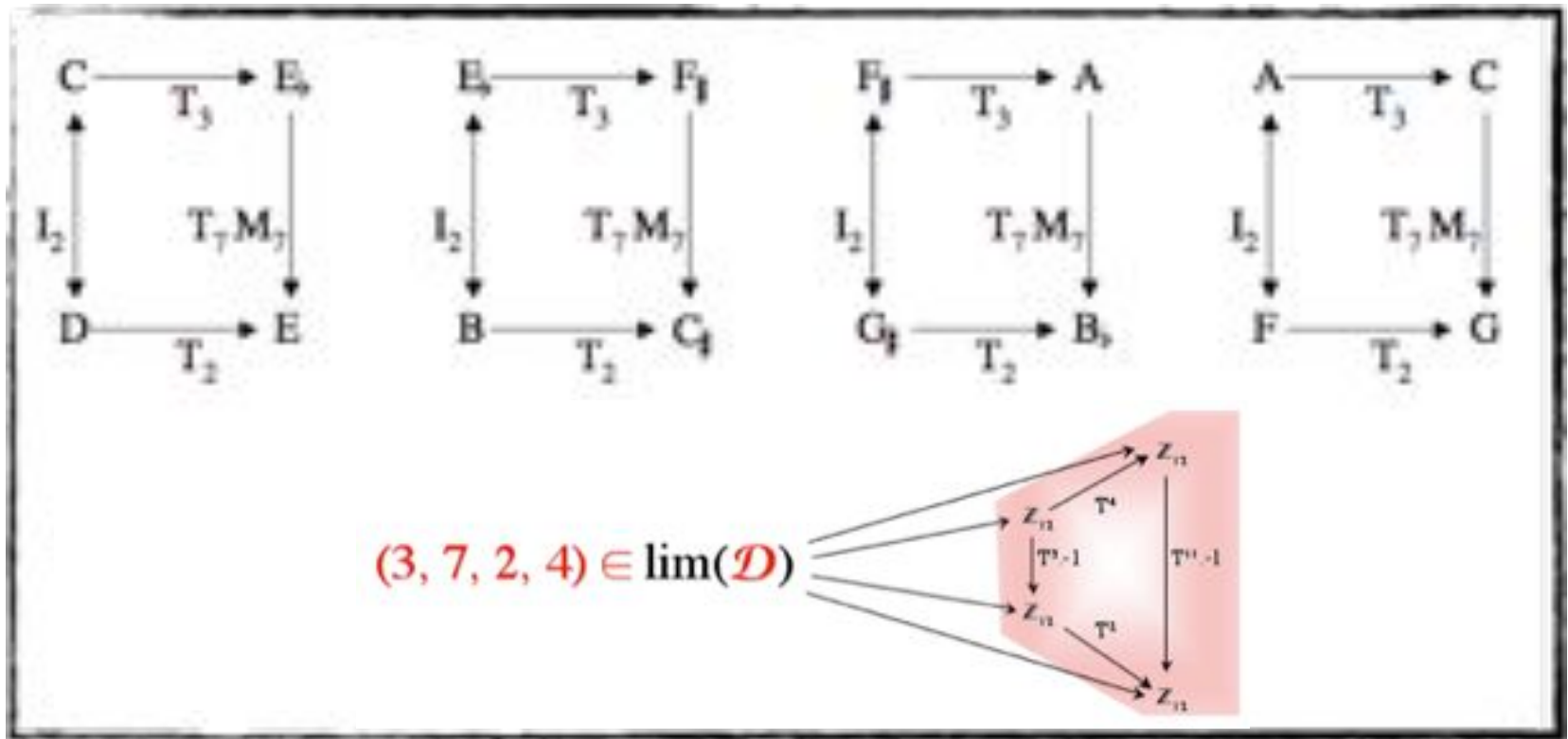
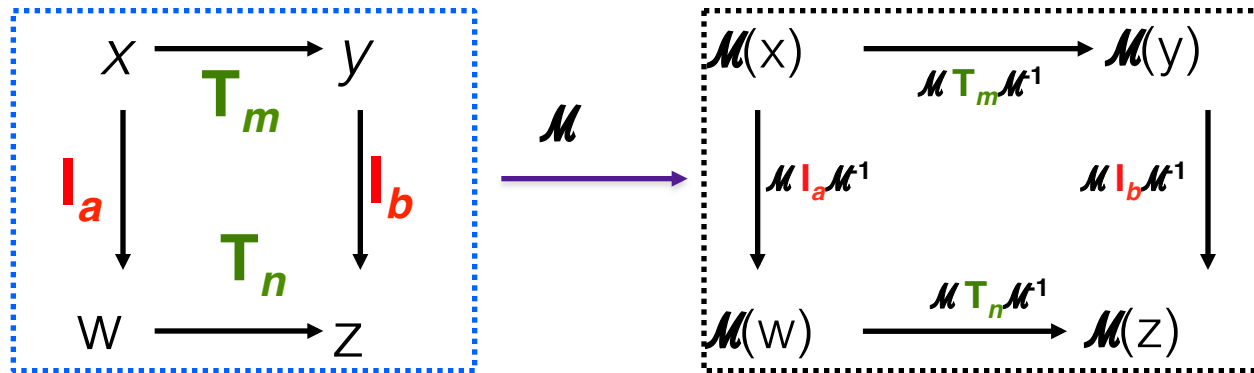


H. Klumpenhouwer

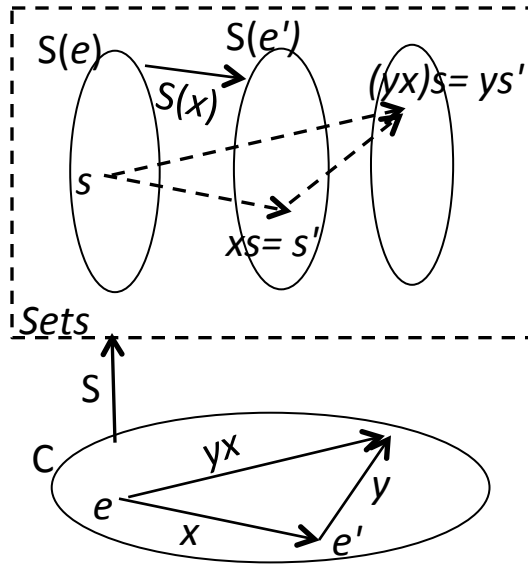


G. Mazzola

K-nets affines et approche catégorielle



RAPPELS: ACTION DE CATEGORIE



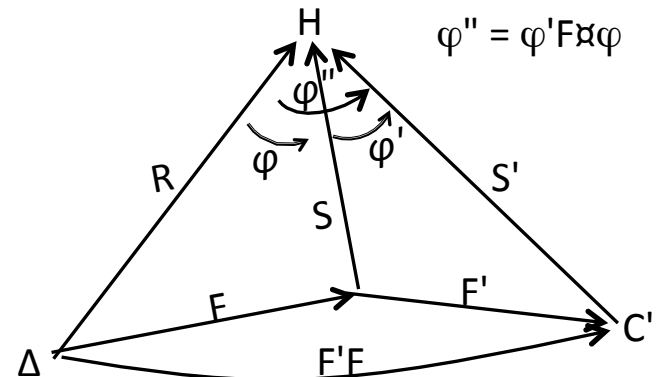
La notion d'*action d'un groupe sur un ensemble* a été généralisée par C. Ehresmann (1957) en celle d'**action d'une catégorie** C sur M (définie comme une application partielle de $C \times M$ dans M), et il montre qu'elle peut aussi être définie par un foncteur $S: C \rightarrow \text{Sets}$ à valeurs non vides.



Ch. Ehresmann

Il introduit aussi les morphismes entre actions, qui forment la *catégorie des applications covariantes*, isomorphe à la catégorie des diagrammes dans Sets .

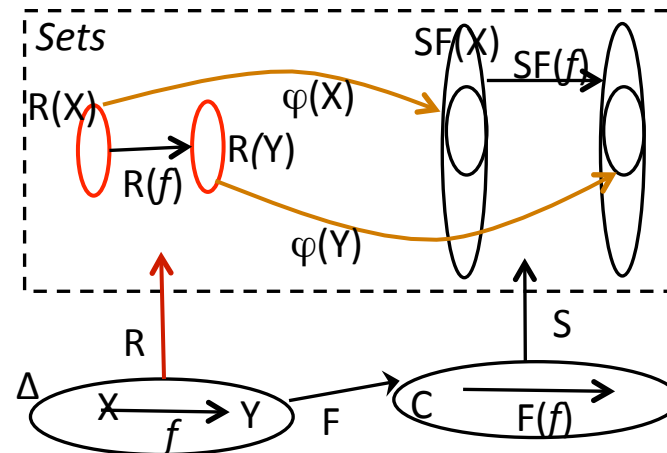
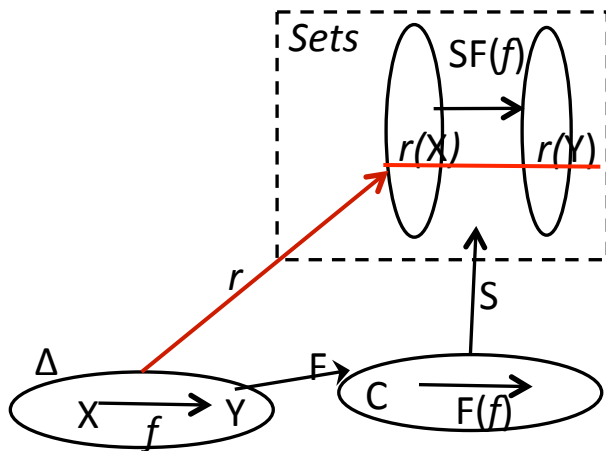
Soit H une catégorie. Nous notons $\text{Diag}(H)$ la **catégorie des diagrammes dans H** : ses objets sont les foncteurs vers H , ses morphismes les couples $(F, \varphi): R \rightarrow S$, où $F: \Delta \rightarrow C$, $R: \Delta \rightarrow H$ et $S: C \rightarrow H$ sont des foncteurs, et $\varphi: R \rightarrow SF$ est une transformation naturelle.



DES K-NETS AUX PK-NETS

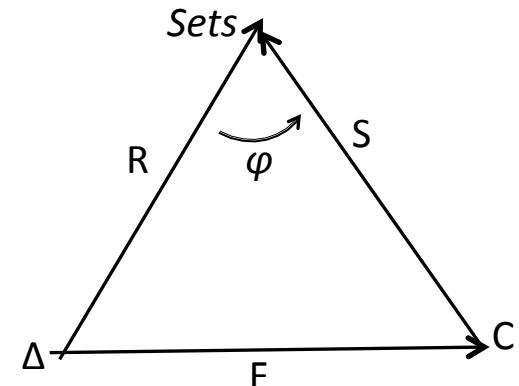
(i) **K-net** (Klumpenhouwer, Lewin, généralisé par Andreatta & Mazzola) = une catégorie C opérant via $S: C \rightarrow \mathbf{Sets}$, un foncteur $F: \Delta \rightarrow C$ et un élément r de la limite de $SF: \Delta \rightarrow \mathbf{Sets}$.

$\Rightarrow r: |\Delta| \rightarrow \sum SF(X)$ est une application vérifiant $r(Y) = F(f)r(X)$ pour $f: X \rightarrow Y$ dans Δ .



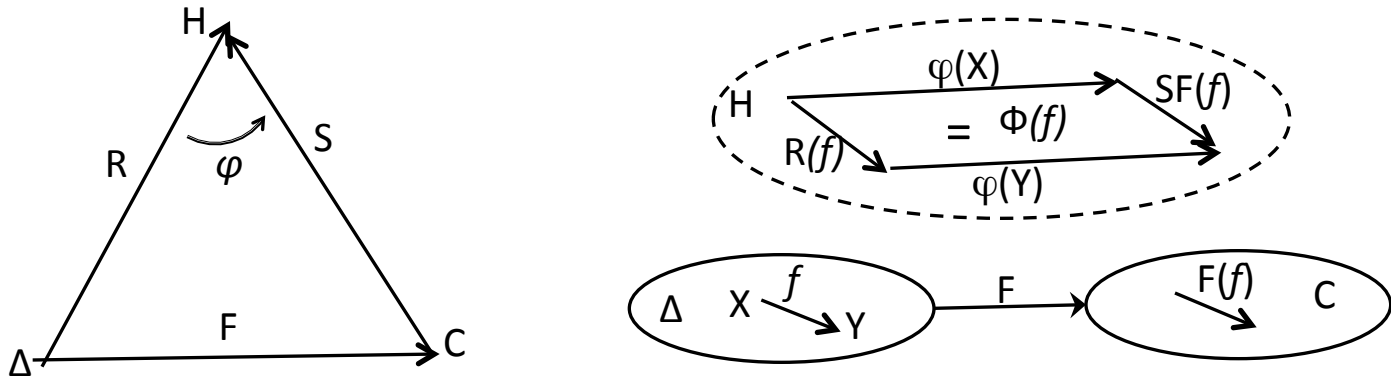
(ii) **Poly-K-net (A. Popoff)** : Un **PK-net** $K = (R, S, F, \varphi)$ est formé de trois foncteurs : $R: \Delta \rightarrow \mathbf{Sets}$, $S: C \rightarrow \mathbf{Sets}$, $F: \Delta \rightarrow C$ et d'une transformation naturelle $\varphi: R \rightarrow SF$. On appelle R sa *forme* et S son *support*.

$\Rightarrow K$ s'identifie au morphisme $(F, \varphi): R \rightarrow S$ de $\mathbf{Diag}(\mathbf{Sets})$.



PK-NETS A VALEURS DANS H

Définition. Soit H une catégorie. Un **PK-net** (R, S, F, φ) à **valeurs dans** H est un morphisme $(F, \varphi): R \rightarrow S$ de $\text{Diag}(H)$; R est sa **forme**, S son **support**. Le PK-net 'est' un **K-net** si R est un foncteur constant sur un objet final de H .



Notons $\mathbf{Sq}(H) = (H_v, H_h)$ la catégorie double des carrés commutatifs de H ; sa catégorie 'verticale' H_v est H^2 (où $\mathbf{2} = (0 \rightarrow 1)$). Soit α_h et α_v les foncteurs de H^2 vers H associant à un carré son domaine horizontal et son domaine vertical.

Proposition. Soit $K = (R, S, F, \varphi)$ un PK-net à valeurs dans H . **On a un foncteur**

$\Phi: \Delta \rightarrow H^2: f \mapsto (R(f), \varphi(X), \varphi(Y), SF(f))$ pour tout $f: X \rightarrow Y$ dans Δ .

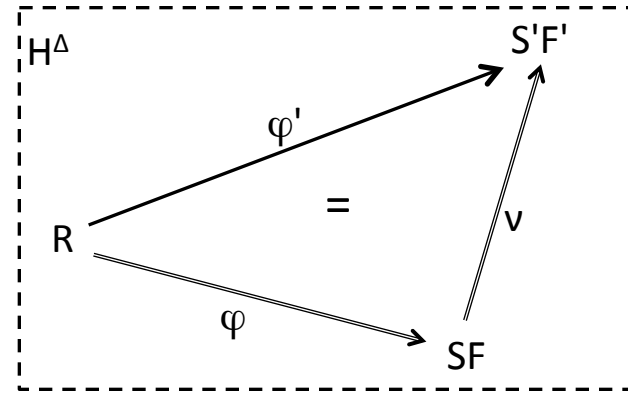
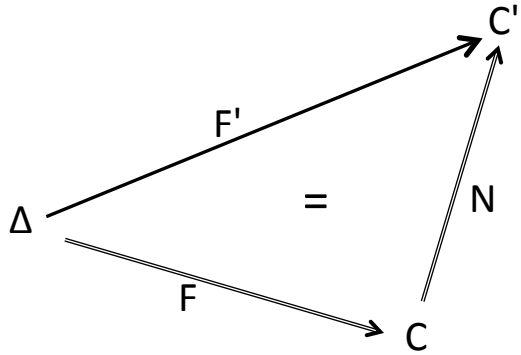
Et K est déterminé par la donnée de S, F et Φ (car $R = \alpha_h \Phi$ et $\varphi(X) = \alpha_v(\Phi(X))$).

PK-HOMOGRAPHIES DE FORME R

Définition. Soit $K = (R, S, F, \varphi)$ et $K' = (R, S', F', \varphi')$ des PK-nets à valeurs dans H . Une **PK-homographie** $(N, v): K \rightarrow K'$ est formée d'un foncteur $N: C \rightarrow C'$ et d'une transformation naturelle v de SF vers $S'F'$ tels que

$$F' = NF \quad \text{et} \quad \varphi' = v \circ \varphi.$$

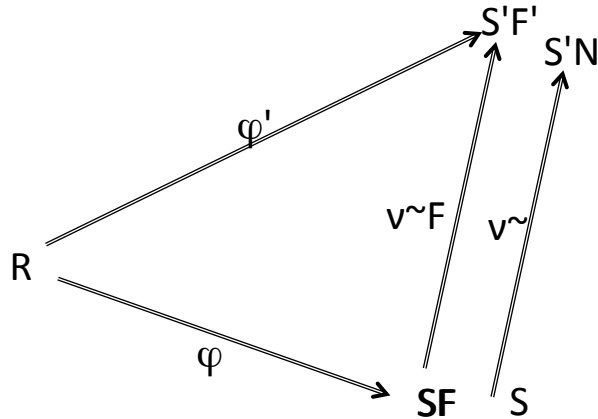
C'est une **PK-isographie** si N est un isomorphisme et v une équivalence.



Les PK-homographies entre PK-nets de forme R sont les morphismes de la *catégorie* $\mathbf{HoPKN}_R$ des PK-homographies. Le composé de $(N, v): K \rightarrow K'$ et $(N', v'): K' \rightarrow K''$ est :

$$(N', v') (N, v) = (N'N, v' \circ v): K \rightarrow K''.$$

PK-HOMOGRAPHIES COMPLETES



Définition. Une **PK-homographie** $(N, v): K \rightarrow K'$ est **complète** s'il existe une transformation naturelle $v \sim: S \rightarrow S'N$ telle que $v = v \sim F$.

Si $|F|$ est surjectif sur les objets, lorsqu'il existe une transformation naturelle $v \sim$, elle est unique. Les PK-homographies complètes forment une sous-catégorie **CompHoPKN_R** de **HoPKN_R**.

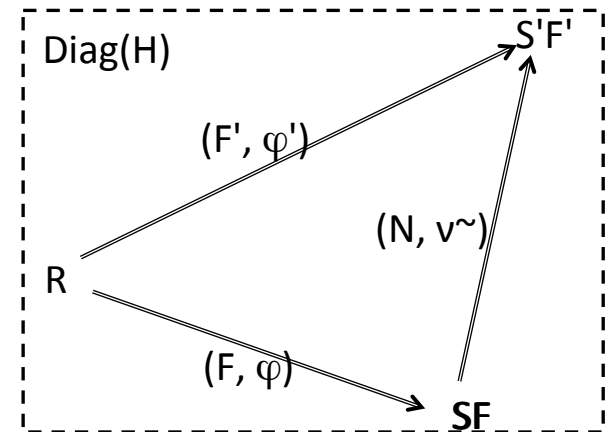
Conditions de complétude. Pour qu'une homographie $(N, v): K \rightarrow K'$ soit complète, il faut que l'on ait :

- (i) $v(X) = v(X')$ si $F(X) = F(X') = e$; dans ce cas on pose $v \sim(e) = v(X)$;
- (ii) $v \sim(e')S'N(x) = S(x)v \sim(e)$ pour tout $x: e \rightarrow e'$ dans C .

Ces conditions sont aussi suffisantes si $|F|$ est surjectif.

La **catégorie PKN_R des PK-nets de forme R** à valeurs dans H est la catégorie $R|Diag(H)$ ayant pour objets les PK-nets de forme R .

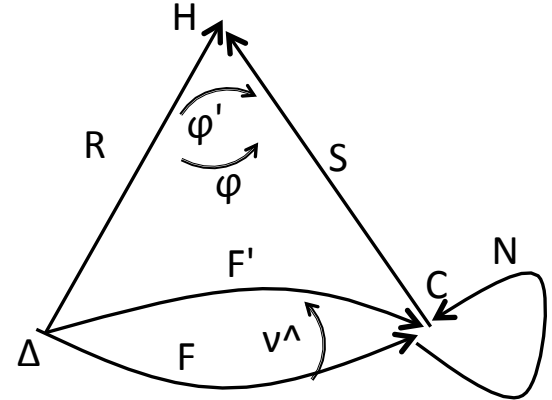
Proposition. $(N, v \sim) \mapsto (N, v \sim F)$ définit un foncteur $J: PKN_R \rightarrow \text{CompHoPKN}_R$. Sa restriction aux sous-catégories pleines ayant pour objets les PK-nets K tels que $|F|$ soit surjectif est un isomorphisme.



PK-HOMOGRAPHIES LOCALES

$\text{Diag}(H)$ est la catégorie des 1-morphismes d'une 2-catégorie **Diag**(H) ayant pour 2-morphismes de **K** vers **K'** les couples $(N, v^\wedge)$, où $N: C \rightarrow C$ est un foncteur et $v^\wedge: F \rightarrow NF$ une transformation naturelle tels que :

$$F' = NF \quad \text{et} \quad \varphi' = Sv^\wedge \rtimes \varphi.$$



Définition. Une PK-homographie (N, v) entre PK-nets de même forme R est appelée une **PK-homographie locale** s'il existe un 2-morphisme $(N, v^\wedge): \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}'$ avec $v = Sv^\wedge$. C'est une *isographie locale* si N est un isomorphisme et v une équivalence.

Il peut y avoir plusieurs transformations naturelles $v^\wedge$ donnant la même $v = Sv^\wedge$, par exemple si C est un groupe et si son action via S n'est pas libre.

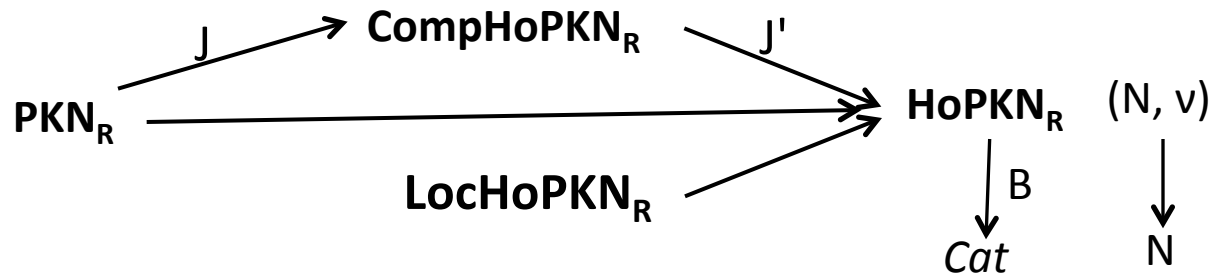
Les PK-homographies locales entre PK-nets de forme R forment une sous-catégorie **LocHoPKN_R** de **HoPKNR**.

Remarque. $\text{Diag}(H)$ s'étend aussi en une 2-catégorie ayant pour 2-morphismes les $v^\wedge: F \rightarrow F'$ vérifiant $\varphi' = Sv^\wedge \rtimes \varphi$. Celle-ci est la *lax-cocomplétion* de H . (Guitart & Van den Bril, 1977.)



R. Guitart

LIMITES ET COLIMITES DE PK-NETS



Théorème. *On suppose H complète et cocomplète.*

(i) *Les catégories $\mathbf{PKN}_R$ et $\mathbf{CompHoPKN}_R$ ont des limites et des colimites connexes ; celles-ci sont préservées par les foncteurs J et J' associant $(N, v \sim F)$ à $(N, v \sim)$.*

(ii) *$\mathbf{HoPKN}_R$ a des produits, et il existe une limite (resp. colimite) pour tout foncteur $P: V \rightarrow \mathbf{HoPKN}_R$ tel que $P(v) = (R, S_v, F_v, \varphi_v)$ soit un PK-net avec $|F_v|$ surjectif pour tout $v \in |V|$ (resp. et que V soit connexe).*

Construction de la limite (R, S, F, φ) *de* $P: V \rightarrow \mathbf{HoPKN}_R$:

= C est la limite de $BP: V \rightarrow \mathbf{Cat}$ et $F: \Delta \rightarrow C$ est la restriction de $[F_v: \Delta \rightarrow C_v]_v$.

= Pour tout e de $|C|$ on a un foncteur U_e de la catégorie $V \times F^{-1}(e)$ vers H et on prend $S(e) = \lim U_e$. Alors $\varphi(X): R(X) \rightarrow S(e)$ factorise le cône de $R(X)$ vers U_e qui associe $\varphi_v(X): R(X) \rightarrow S_v F_v(X') = S_v F_v(X)$, à tout (v, X') tel que $F_v(X) = F_v(X')$.

PK-NETS DE PK-NETS DE FORME R

Définition. Soit $R: \Delta \rightarrow H$ un foncteur. Un PK-net de PK-nets de forme R, ou **R-PK²-net** est un PK-net (K, K', F, φ) à valeurs dans **HoPKN_R** avec $F: \Delta \rightarrow C$.

Soit X un objet de Δ . Le foncteur $K: \Delta \rightarrow \mathbf{HoPKN}_R$ associe à X un PK-net $K(X)$ de forme R à valeurs dans H ; et K' associe à l'objet e de C un PK-net $K'(e)$ de forme R. La transformation naturelle φ de K vers $K'F$ associe à X une homographie

$$\varphi(X) = (M_X, \mu_X): K(X) \rightarrow K'F(X).$$

Le R-PK²-net est déterminé par les foncteurs K, K', F et $\Phi: \Delta \rightarrow \mathbf{HoPKN}_R^2$ qui associe à $f: X \rightarrow Y$ de Δ le carré d'homographies $\Phi(f)$ suivant :

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\varphi(X) = (M_X, \mu_X)} & K'F(X) \\ K(f) = (N_f, v_f) \downarrow & \Phi(f) & \downarrow K'F(f) = (N'_f, v'_f) \\ K(Y) & \xrightarrow{\varphi(Y) = (M_Y, \mu_Y)} & \end{array}$$

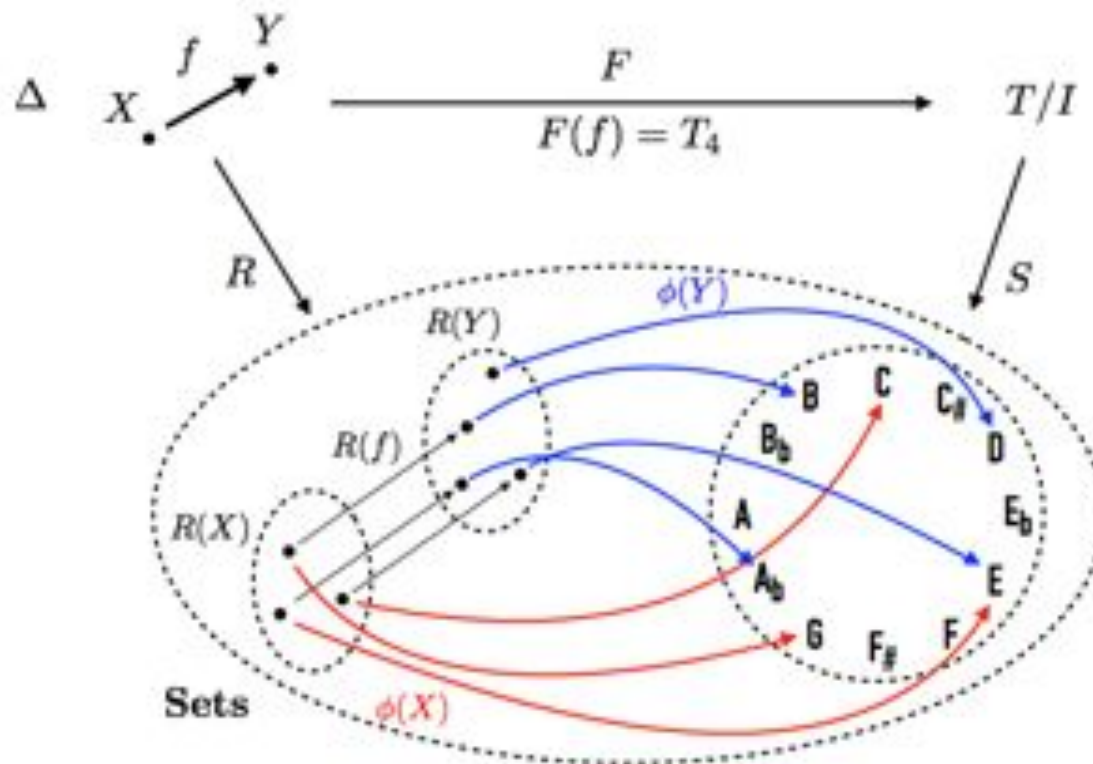
Proposition. *Les constructions des PK²-nets et des R-PK²-nets s'itèrent, d'où formation de PK-nets d'ordre supérieur et d'hyper-homographies entre eux.*

PK-NETS : EXEMPLE 1

Accords de cardinalité variable : Do majeur - Septième de dominante sur Mi

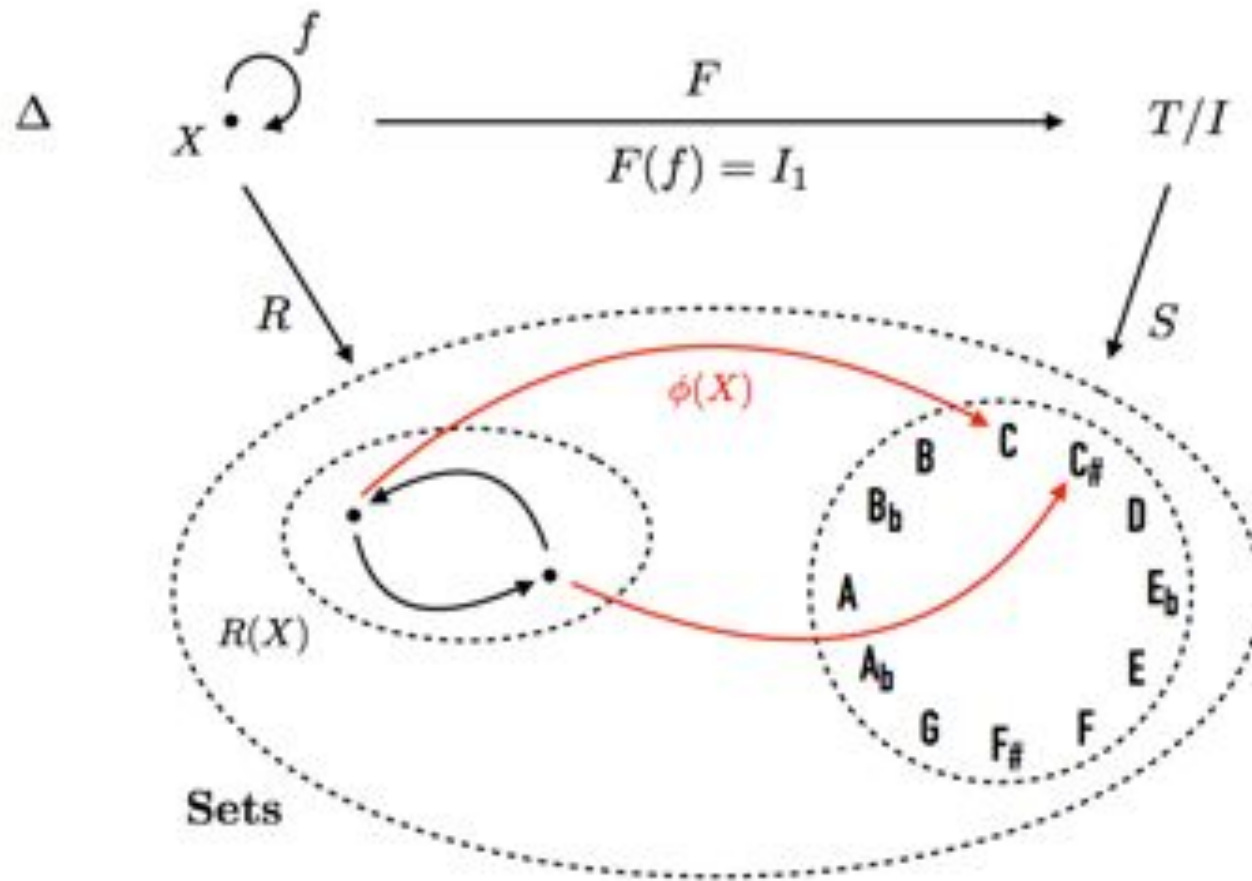


Formalisation par un PK-Net :



PK-NETS : EXEMPLE 2

Les PK-Nets permettent des réseaux plus généraux que les K-Nets :



Exemple de morphisme de PK-Net :

Sonate pour piano de Chopin's, Nr. 3, op. 58 en Si mineur



La correspondance entre l'évolution temporelle et l'évolution des hauteurs peut être décrite par une homographie complète $(N, \tilde{\nu}F)$ définie par

- le groupe $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ et son foncteur représentable vers **Sets**, décrivant les transformations d'une pulsation rythmique régulière,
- le groupe $\mathbb{Z}_{12} = \langle z \mid z^{12} = 1 \rangle$ et son foncteur représentable vers **Sets**, décrivant les transformations des 12 classes de hauteur,
- l'homomorphisme $N: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ associant z^2 à t , avec la transformation naturelle $\tilde{\nu}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ telle que $\tilde{\nu}(t) = (z + 2) \pmod{12}$.

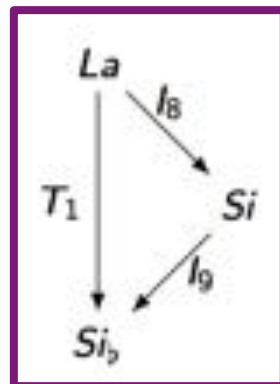
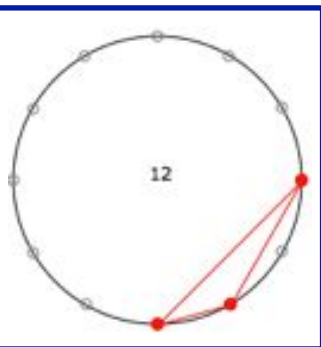
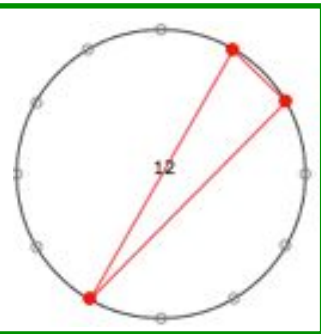
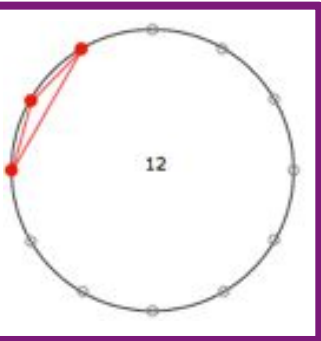
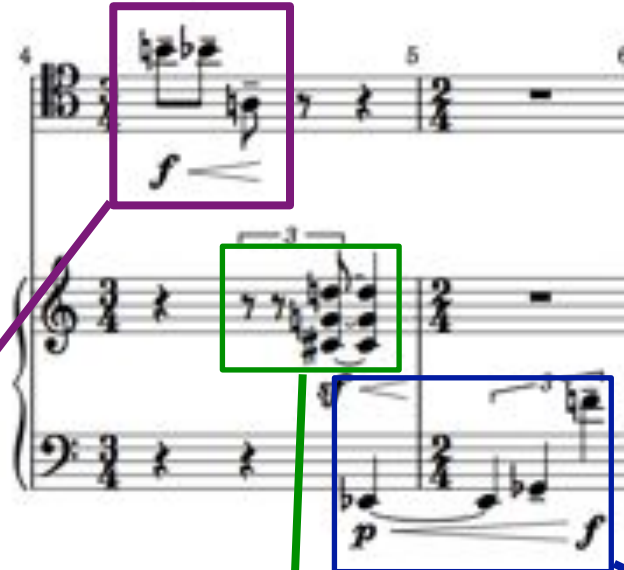
Isographie locale :

Webern, 3 Kleine Stücke, Op. 11/2

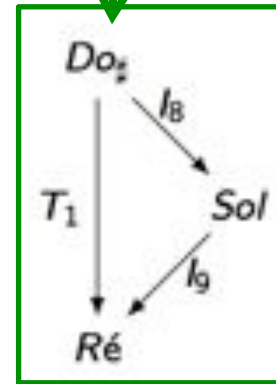
Isographie $\langle T_0 \rangle$ entre les trois groupes de notes.



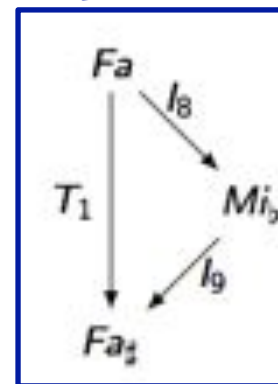
A. Webern



?



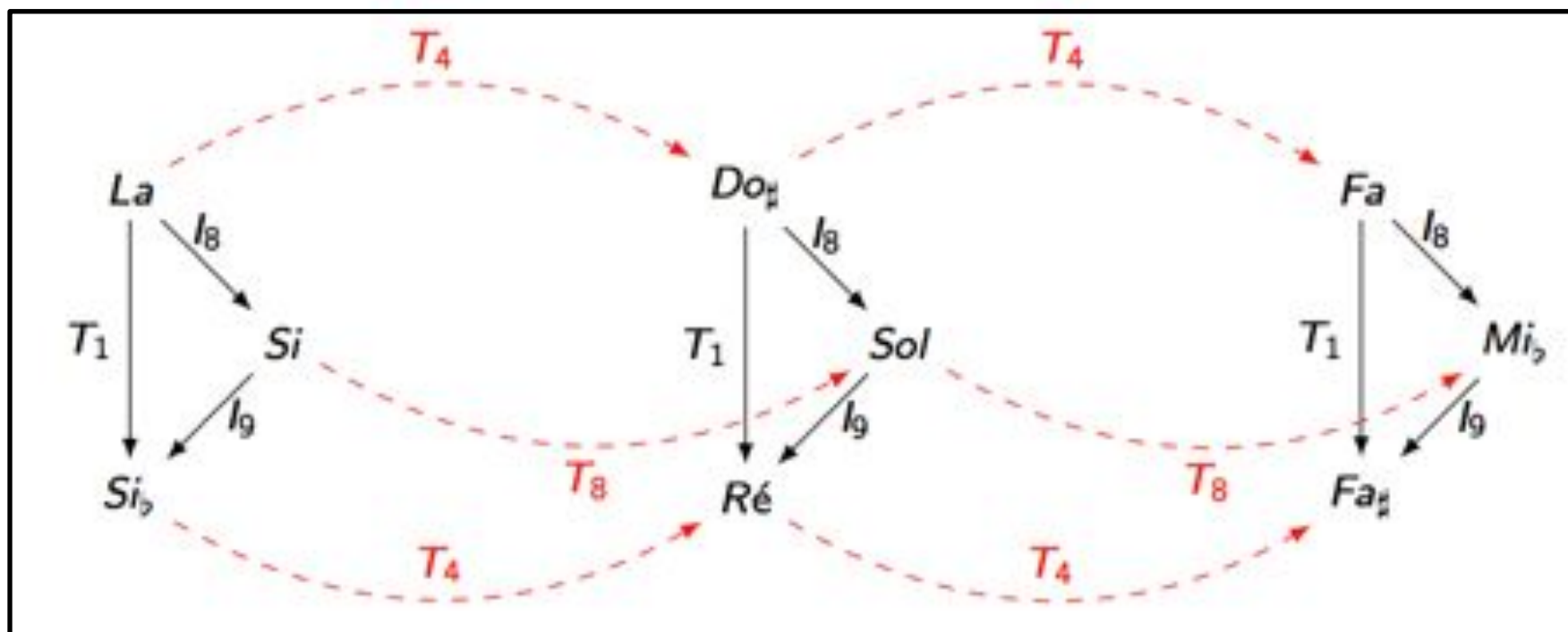
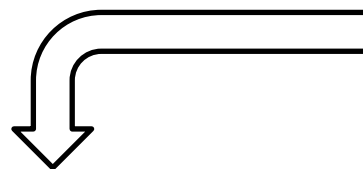
?



Isographie locale :

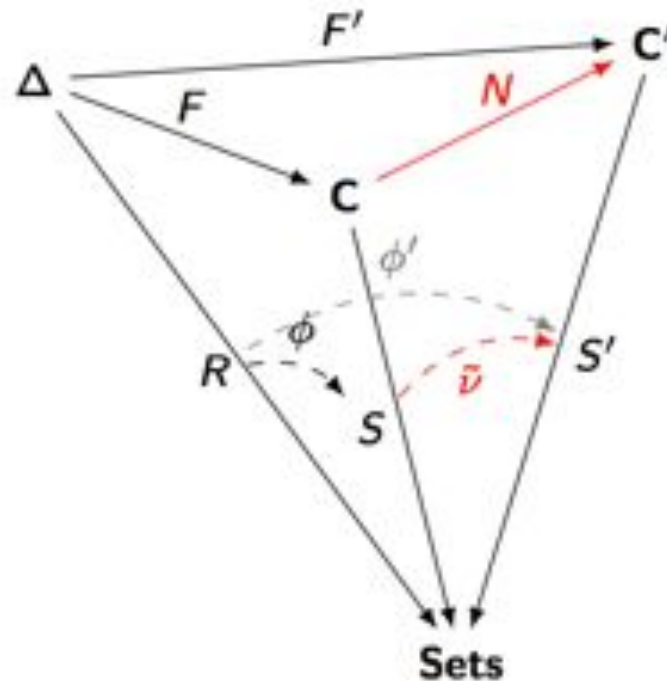
Webern, 3 Kleine Stücke, Op. 11/2

Isographie $\langle T_0 \rangle$ entre les trois groupes de notes.



Homographies complètes

Homographie complète :



Lorsque N est un isomorphisme et $\tilde{D}$ une équivalence, ceci revient à étudier le groupe d'automorphismes de l'objet (C, S) de $\text{Diag}(\mathbf{Sets})$.

Groupe d'automorphismes d'un foncteur représentable

Théorème

Soit (G, S) un objet de $\text{Diag}(\mathbf{Sets})$, où G est un groupe, et S un foncteur représentable de G vers $\mathbf{Sets}$ (action simplement transitive).
Alors, le groupe d'automorphismes de (G, S) est isomorphe à $G \rtimes \text{Aut}(G)$, càd l'holomorphe de G .

Le sous-groupe normal G de $\text{Aut}(G, S)$ correspond aux éléments $(N, \tilde{\nu})$ où N est l'identité. La transformation naturelle $\tilde{\nu}$ définit une action de groupe qui commute avec l'action de n'importe quel élément g de G .

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{S(g)} & y \\ \tilde{\nu} \downarrow & & \downarrow \tilde{\nu} \\ \tilde{\nu}(x) & \xrightarrow{S(g)} & \tilde{\nu}(y) \end{array}$$

Si $G = T/I$, l'action de $\tilde{\nu}$ coïncide avec celle des éléments du groupe PRL.
A l'inverse, si $G = \text{PRL}$, l'action de $\tilde{\nu}$ coïncide avec celle des éléments du groupe T/I .

Dualité de Lewin = cas particulier au sein de $\text{Aut}(G, S)$.

Application :

Gesualdo, motet à cinq voix *Deus refugium et virtu*



21

se pi - e - ta - tis, auc - tor ip - se pi - e -

se pi - e - ta - tis, pi - e - ta - tis, auc - tor ip - se pi - e -

se pi - e - ta - tis, pi - e - ta - tis, auc - tor ip - se

se pi - e - ta - tis, auc - tor ip - se pi - e -

se pi - e - ta - tis, auc - tor ip - se

27

ta - tis, et prae - sta ut quod fi - de - li - ter pe - ti -

ta - tis, pi - e - ta - tis, et prae - sta ut quod fi - de - li - ter

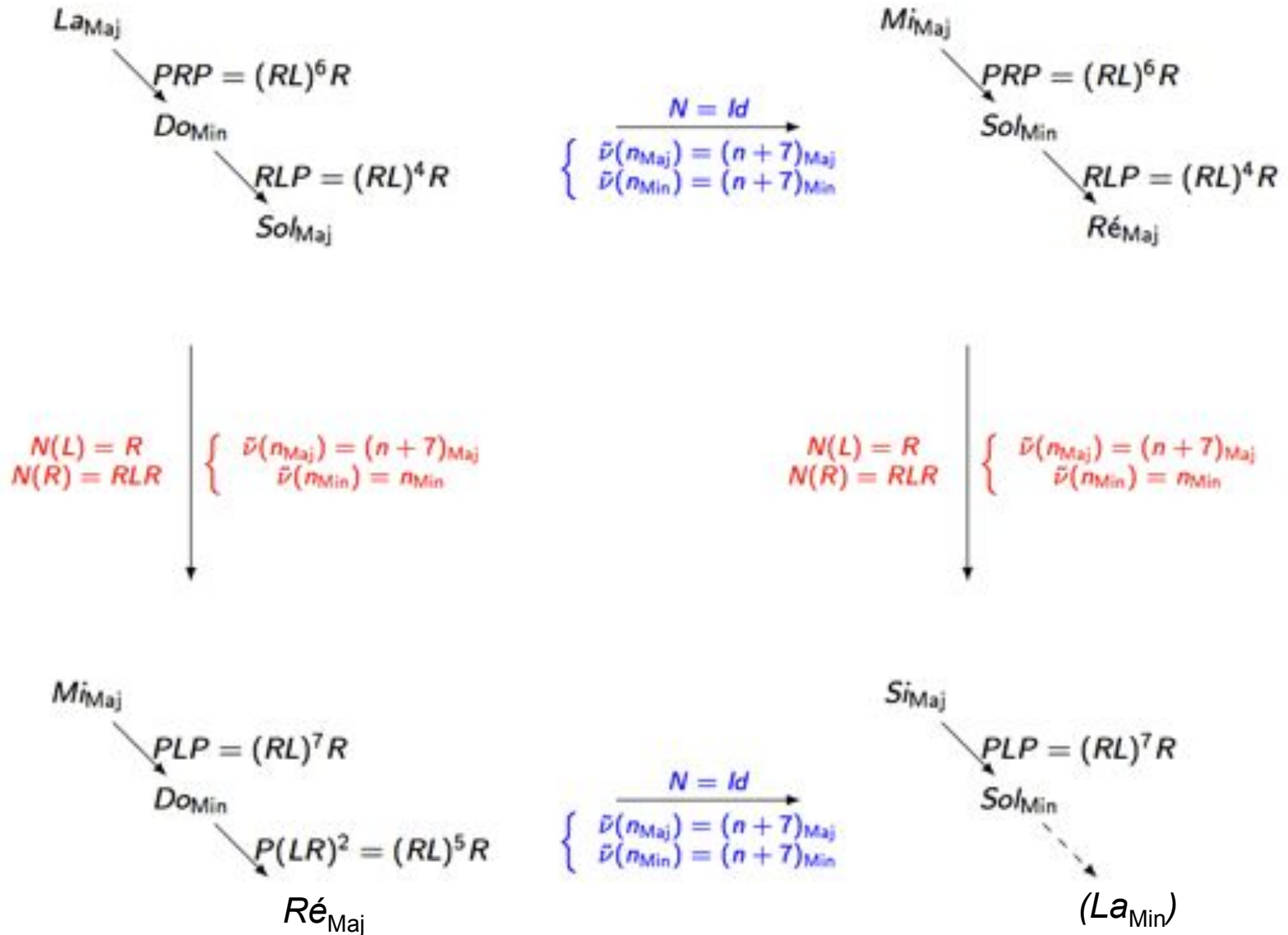
pi - e - ta - tis, et prae - sta ut quod fi - de - li - ter

ta - tis, pi - e - ta - tis, et prae - sta ut

pi - e - ta tis, et prae - sta ut quod fi -

Application :

Gesualdo, motet à cinq voix *Deus refugium et virtus*



Groupe d'automorphismes de $(T/I, S)$

Si S n'est pas représentable, il est plus difficile de déterminer le groupe d'automorphismes de (G, S) .

Théorème

Soit l'objet (G, S) de $\text{Diag}(\mathbf{Sets})$, où G est le groupe T/I , et S le foncteur vers $\mathbf{Sets}$ correspondant à l'action de T/I sur l'ensemble $\mathbb{Z}_{12}$.

Alors, le groupe d'automorphismes de $(T/I, S)$ est isomorphe au groupe $T/M \simeq \text{Aut}(T/I)$.

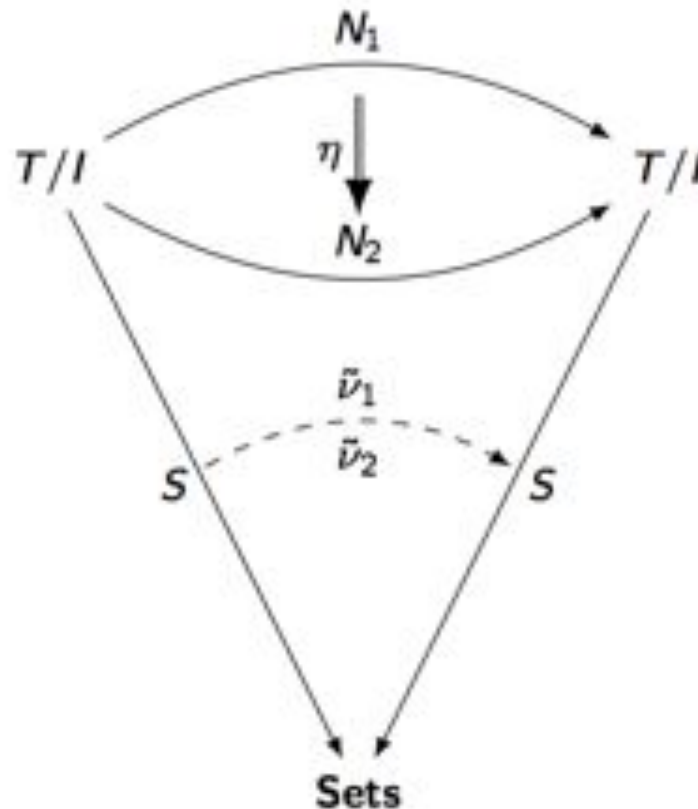
Les éléments $(N, \tilde{\nu})$ de $\text{Aut}(T/I, S)$ correspondent aux isographies $\langle k_p \rangle$ où p est pair, avec $\tilde{\nu}(x) = kx + p/2$ ou $\tilde{\nu}(x) = kx + p/2 + 6$.

En particulier, puisque T/I est un sous-groupe de T/M , il est possible de réinterpréter l'action de ses éléments comme une action par isographies $\langle k_p \rangle$ avec p pair.

Le groupe T/I , usuellement considéré en tant qu'extension de $\mathbb{Z}_{12}$ par $\mathbb{Z}_2$, peut ainsi être réinterprété en tant qu'extension de $\mathbb{Z}_2$ par D_{12} .

2-groupe d'automorphismes de $(T/I, S)$

Le groupe d'automorphismes de $(T/I, S)$ possède naturellement une structure de 2-groupe :



avec $S(\tilde{\nu}_2) = S(\eta) \circ S(\tilde{\nu}_1)$.

Ainsi, les éléments du groupe T/I peuvent aussi être réinterprétés comme des 2-morphismes η de $\text{Aut}(T/I, S)$, et leur action comme l'action canonique sur $\mathbb{Z}_{12}$ donnée par $S(\eta)$.

2-groupe d'automorphismes de $(T/I, S)$ et catégories doubles

Remarque

Soit S un foncteur d'un groupe G vers **Sets** : les éléments $(N, \tilde{\nu})$ de $\text{Aut}(G, S)$ définissent une action de groupe sur l'image de G par S via $\tilde{\nu}$, i.e. un nouveau foncteur $S' : \text{Aut}(G, S) \rightarrow \mathbf{Sets}$.

Il est alors possible d'étudier le groupe d'automorphismes de $(\text{Aut}(G, S), S')$, qui définit un nouveau foncteur $S'' : \text{Aut}(\text{Aut}(G, S), S') \rightarrow \mathbf{Sets}$, et ainsi de suite...

Dans le cas $G = T/I$, on a $\text{Aut}(G, S) \simeq T/M$, et $\text{Aut}(\text{Aut}(G, S), S') \simeq T/M$.

Les éléments de $\text{Aut}(\text{Aut}(G, S), S')$ peuvent être identifiés à certains morphismes verticaux dans la catégorie double des carrés commutatifs de $\text{Diag}(\mathbf{Sets})$.

F	—	C	—	G	—	D
A	—	E	—	H	—	F _s
C _s	—	G _s	—	D _s	—	B.

MERCI DE VOTRE ATTENTION