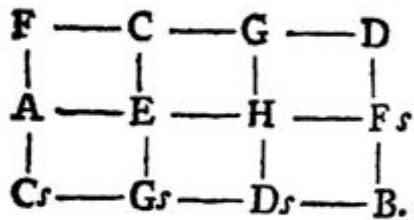
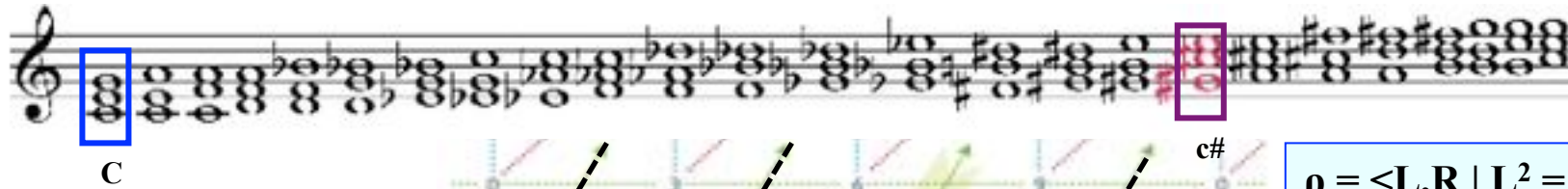
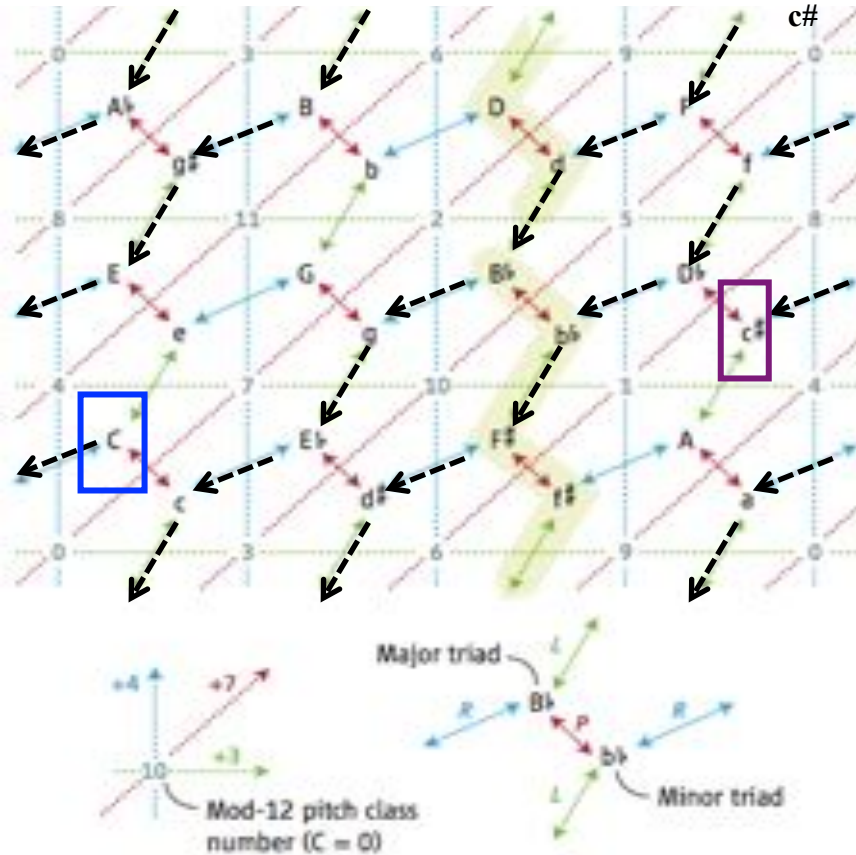
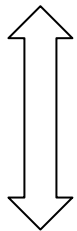


Analyse neo-riemannienne et programmation spatiale



Euler : *Speculum musicum*, 1773



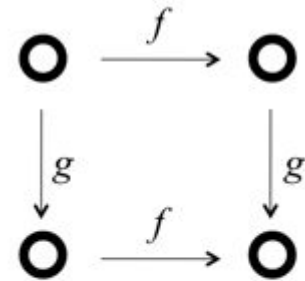
$$\rho = \langle L, R \mid L^2 = (LR)^{12} = 1 \rangle$$

$$LRL = L(LR)^{-1} \rangle$$

↕ dualité

$$D_{12} = \langle I, T \mid I^2 = T^{12} = 1 \rangle$$

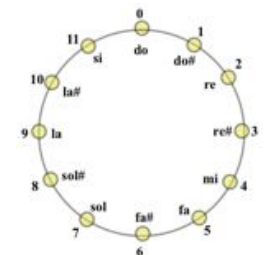
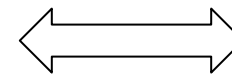
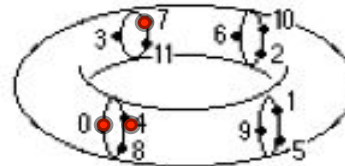
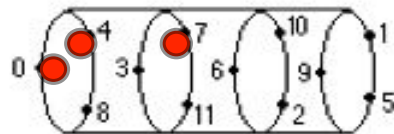
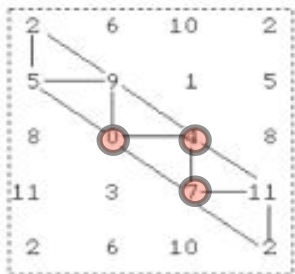
$$ITI = I(IT)^{-1} \rangle$$



Tout diagramme commute

$$\forall f \in D_{12}$$

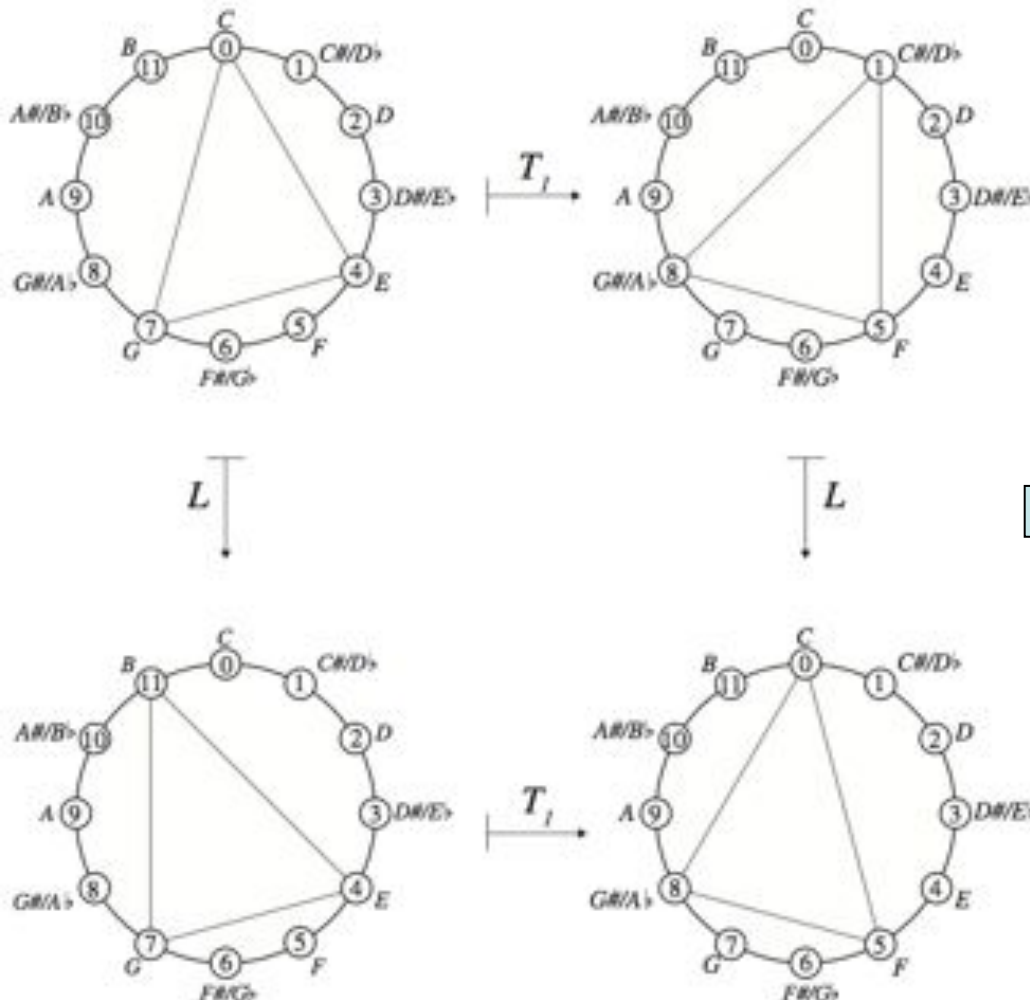
$$\forall g \in \rho$$



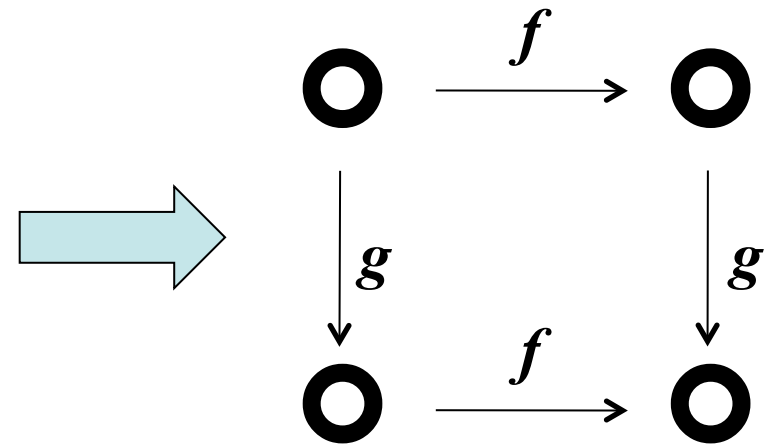
Dualité entre (S, ρ, int) et (S, D_{12}, int)

$$\rho = \langle L, R \mid L^2 = (LR)^{12} = 1 ; LRL = L(LR)^{-1} \rangle \iff D_{12} = \langle I, T \mid I^2 = T^{12} = 1 ; ITI = I(IT)^{-1} \rangle$$

$\Rightarrow \rho$ et D_{12} sont l'un le *centralisateur* de l'autre (dans le groupe symétrique $Sym(S)$)



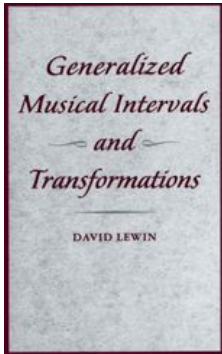
$(S, \rho, \text{int}) \neq (S, D_{12}, \text{int})$
[cf. équivalence entre GIS]



Tout diagramme commute

$$\forall f \in D_{12}$$

$$\forall g \in \rho$$



Système d'Intervalles Généralisés - Système Généralisé d'Intervalles

David Lewin's *Generalized Interval System* [GMIT, 1987]

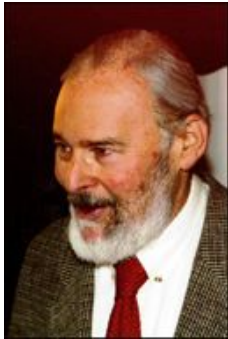
$$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$$

S = ensemble

(G, \bullet) = groupe d'intervalles

int = fonction intervallique

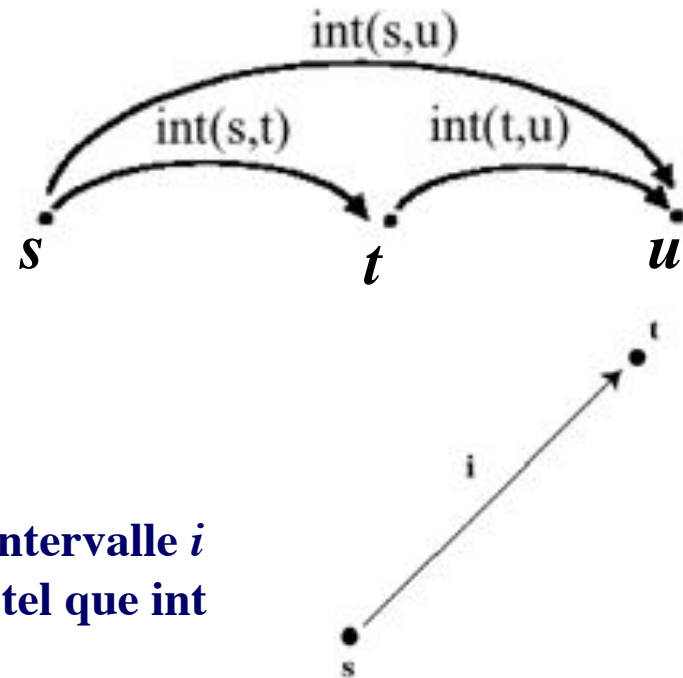
$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$



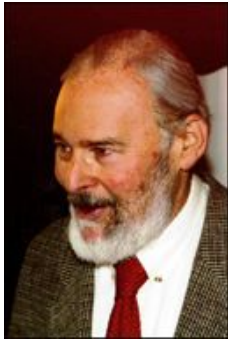
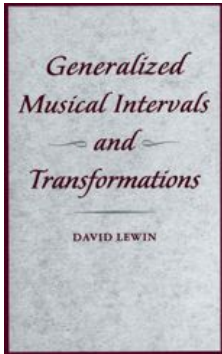
1. Pour tout objets s, t, u dans S :

$$\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$$

2. Pour tout objet s dans S et tout intervalle i dans G il y a un seul objet t dans S tel que $\text{int}(s,t) = i$



- $S = \{\dots, do, do_{\#} = ré_b, ré, \dots, si, do', \dots\}$, $G = \mathbf{Z}$, $\text{int}(do, ré) = 2$, $\text{int}(fa, do) = -5$ etc.
- $S = \{\dots, do, ré, mi, fa, sol, la, si, do', \dots\}$, $G = \mathbf{Z}$, $\text{int}(do, ré) = 1$, $\text{int}(fa, do) = -3$ etc.
- $S = G = \mathbf{Z}_{12} = \{do, do_{\#} = ré_b, ré, \dots, si\}$, $\text{int}(do, ré) = 2$, $\text{int}(fa, do) = 7$ etc.



Premières généralisations : transposition

$$\mathbf{GIS} = (S, G, \text{int})$$

S = ensemble

(G, \bullet) = groupe d'intervalles

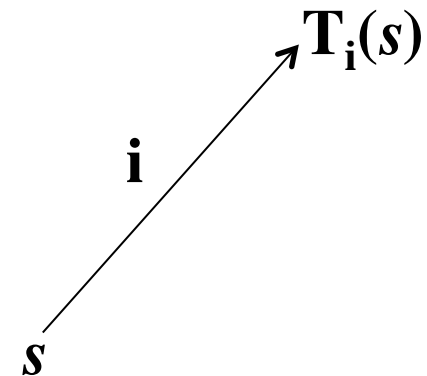
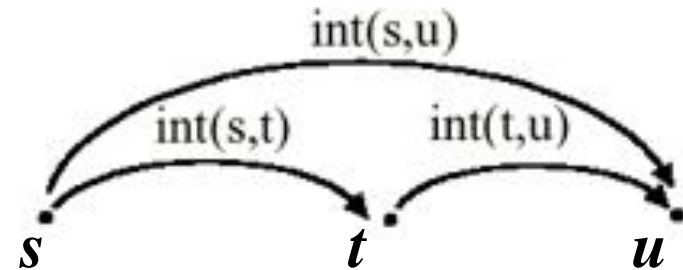
int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

1. Pour tout objets s, t, u dans S :

$$\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$$

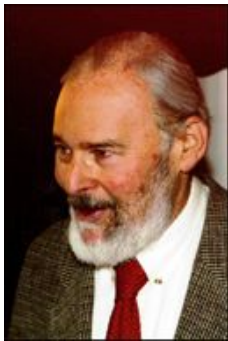
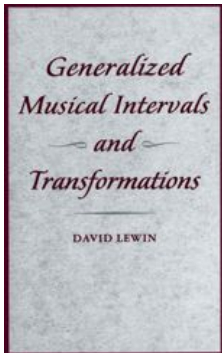
2. Pour tout objet s dans S et tout intervalle i dans G il y a un seul objet t dans S tel que $\text{int}(s,t) = i$



Généralisation de la notion de transposition (musicale)

Pour tout élément i dans G , la transposition T_i est une application

$T_i : S \rightarrow S$ telle que $\text{int}(s, T_i(s)) = i$ pour tout élément s dans S



Premières généralisations : inversion

$$\mathbf{GIS} = (S, G, \text{int})$$

S = ensemble

(G, \bullet) = groupe d'intervalles

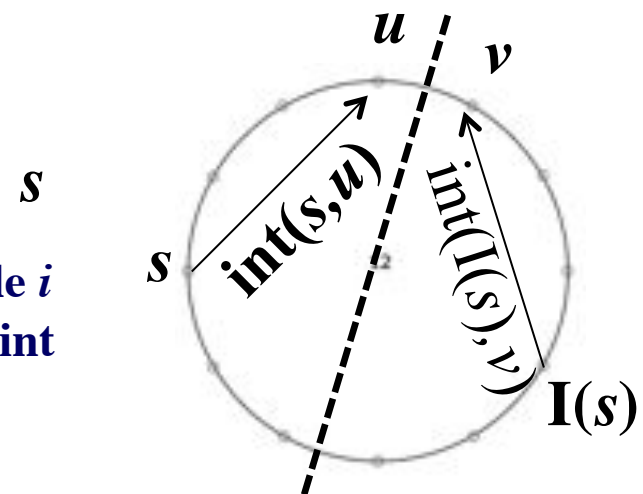
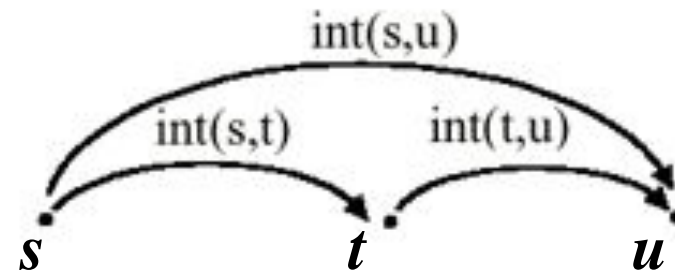
int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

1. Pour tout objets s, t, u dans S :

$$\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$$

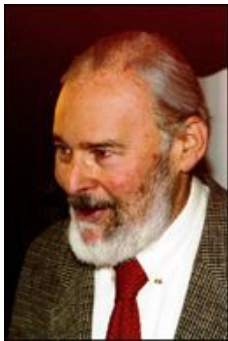
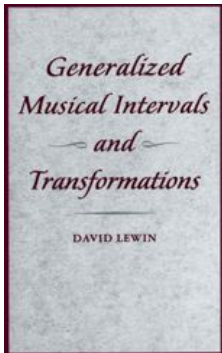
2. Pour tout objet s dans S et tout intervalle i dans G il y a un seul objet t dans S tel que $\text{int}(s,t) = i$



Généralisation de la notion d'inversion (par rapport à u et v)

Pour tous éléments u, v dans S , l'inversion I est une application

$$I_{u,v} : S \rightarrow S \quad \text{telle que} \quad \text{int}(s, u) = \text{int}(v, I_{u,v}(s))$$



Premières généralisations : inversion

$$\mathbf{GIS} = (S, G, \text{int})$$

S = ensemble

(G, \bullet) = groupe d'intervalles

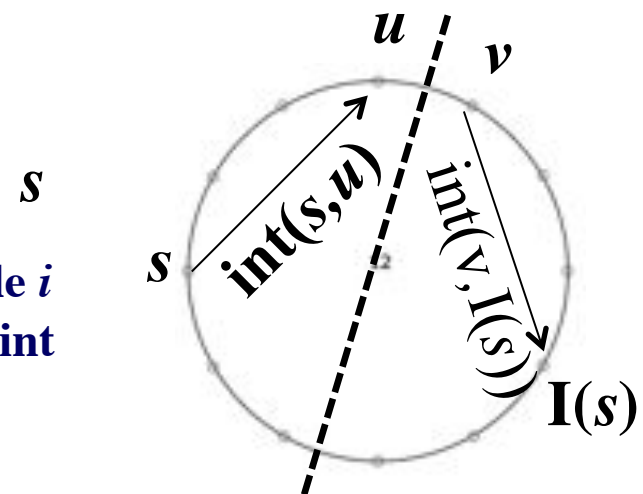
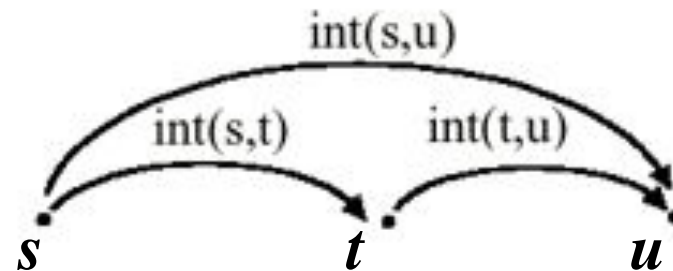
int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

1. Pour tout objets s, t, u dans S :

$$\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$$

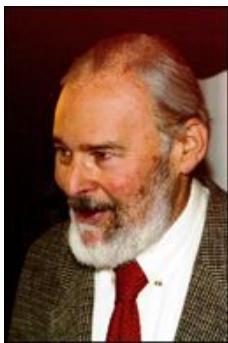
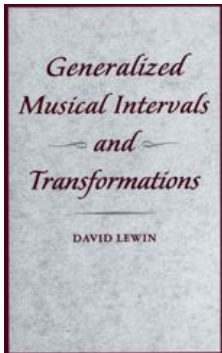
2. Pour tout objet s dans S et tout intervalle i dans G il y a un seul objet t dans S tel que $\text{int}(s,t) = i$



Généralisation de la notion d'inversion (par rapport à u et v)

Pour tous éléments u, v dans S , l'inversion I est une application

$$I_{u,v} : S \rightarrow S \quad \text{telle que} \quad \text{int}(s, u) = \text{int}(v, I_{u,v}(s))$$



Premières propriétés intervalliques

$$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$$

S = ensemble

(G, \bullet) = groupe d'intervalles

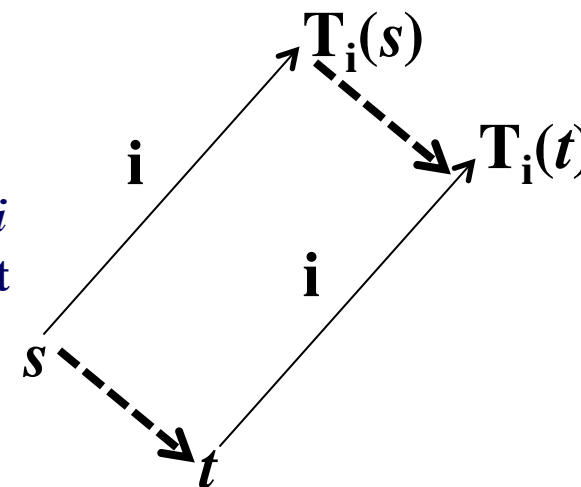
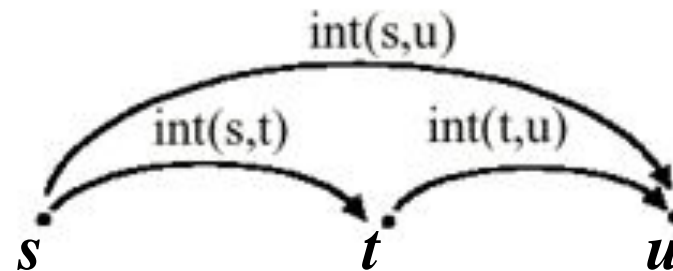
int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

1. Pour tout objets s, t, u dans S :

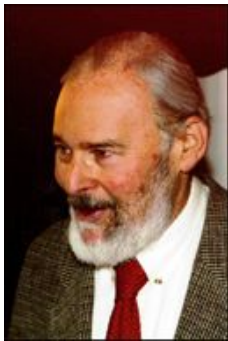
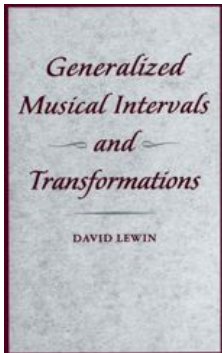
$$\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$$

2. Pour tout objet s dans S et tout intervalle i dans G il y a un seul objet t dans S tel que $\text{int}(s,t) = i$



Dans un GIS commutatif, la transposition préserve les rapports intervalliques

$$\text{int}(s, t) = \text{int}(T_i(s), T_i(t))$$



Premières propriétés d'un GIS non commutatif

$$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$$

S = ensemble

(G, \bullet) = groupe non commutatif

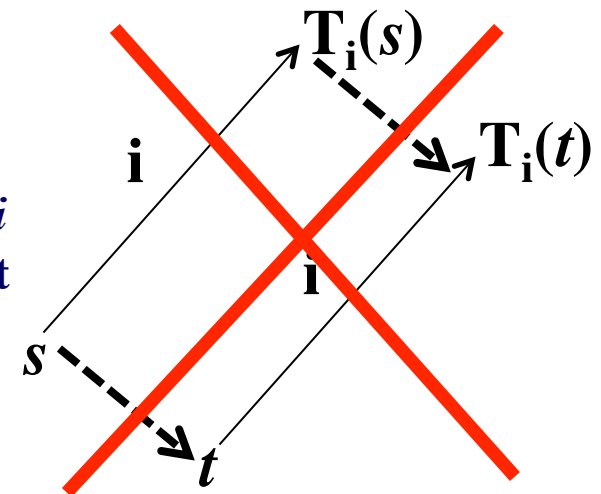
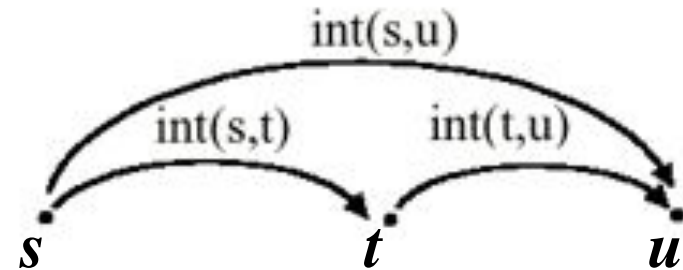
int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

1. Pour tout objets s, t, u dans S :

$$\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$$

2. Pour tout objet s dans S et tout intervalle i dans G il y a un seul objet t dans S tel que $\text{int}(s,t) = i$



Il a des transpositions qui ne préservent pas les intervalles et il y a des transformations qui préservent les intervalles et qui ne sont pas des transpositions [GMIT, p. 50]

Equivalence entre GIS et action de groupe

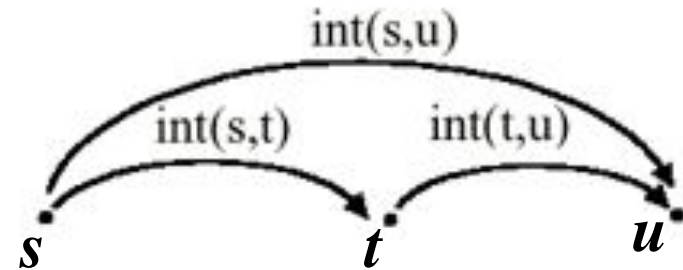
$$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$$

S = ensemble

(G, \bullet) = groupe d'intervalles

int = fonction intervallique

$$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$$

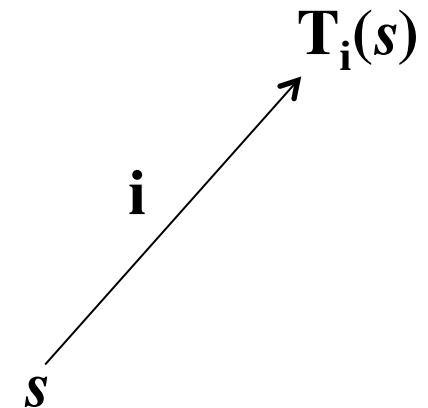


Action
simplement
transitive

1. Pour tous objets s, t, u dans S :

$$\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$$

2. Pour tout objet s dans S et tout intervalle i dans G il y a un seul objet t dans S tel que $\text{int}(s,t) = i$

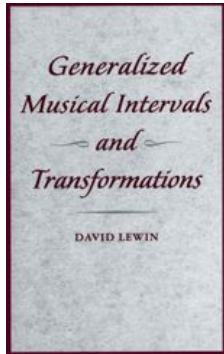


Soit $\tau = \{T_i ; i \in G\}$ le groupe des transpositions

$$\text{GIS} = (S, G, \text{int}) \Leftrightarrow \tau \times S \rightarrow S \text{ telle que } (T_i, s) \rightarrow T_i(s)$$

Terminologies équivalentes :

- Un GIS est un G -torseur à gauche
- S est un ensemble principal homogène [Bourbaki]

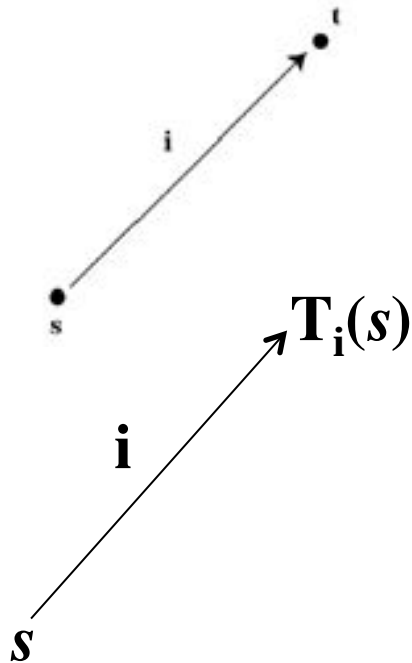


Premières implications philosophiques de l'équivalence

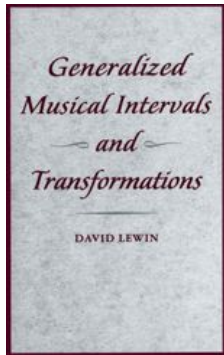
$\text{GIS} = (S, G, \text{int}) \iff$

Action simplement transitive

Cartésianisme vs anti-cartésianisme



« Plutôt que partir d'une structure de GIS (= système d'intervalles généralisés) et dériver de celui-ci certaines transformations caractéristiques, il est possible de partir d'une famille de transformations caractéristiques et dériver d'elles une structure de GIS. Cela signifie qu'au lieu de regarder la *i*-flèche (flèche intervalle) comme une mesure d'une *extension* entre des points *s* et *t* observés passivement "out there" dans une *res extensa* cartésienne, on peut regarder la situation *activement*, comme un chanteur, un instrumentiste, un compositeur qui se dit : « Je suis dans *s* ; quelle transformation particulière dois-je opérer [*perform*] pour arriver dans *t* ? » [C'est là qu'on trouve une] « intrication conceptuelle [*conceptual interrelation*] entre l'intervalle en tant qu'*extension* [*interval-as-extension*] et la transposition en tant que déplacement caractéristique à l'intérieur d'un espace [*transposition-as-characteristic-motion-through-space*] »



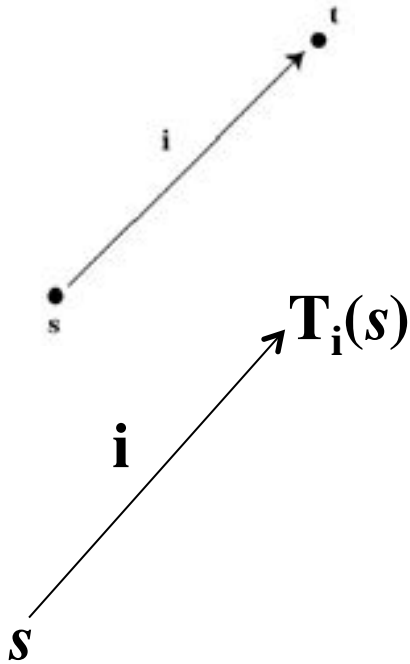
Premières implications philosophiques de l'équivalence

$$\text{GIS} = (S, G, \text{int}) \iff$$

Action simplement transitive

L'attitude transformationnelle et le concept d'espace

« Nous n'avons pas l'intuition de quelque chose qu'on pourrait appeler l'« espace musical ». Plutôt nous avons l'intuition d'une multiplicité et une variété d'espaces musicaux au même temps. Les structures de GIS et les réseaux transformationnels peuvent nous aider à explorer l'une de ces intuitions et à étudier la façon avec laquelle elles interagissent, aussi bien d'un point de vue logique que à l'intérieur d'une œuvre musicale particulière. »



Fonction Intervallique IFUNC dans un GIS

$\text{GIS} = (S, G, \text{int})$

S ensemble

H et H' dans S

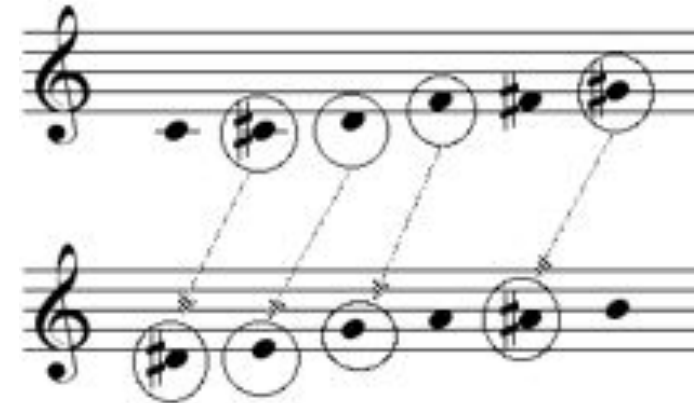
$$\text{IFUNC}(H, H')(i) = \#\{(a, b) \in H \times H' \mid \text{int}(a, b) = i\}$$

$$\text{IFUNC}(H, H')(2) = 4$$

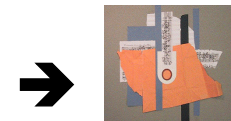
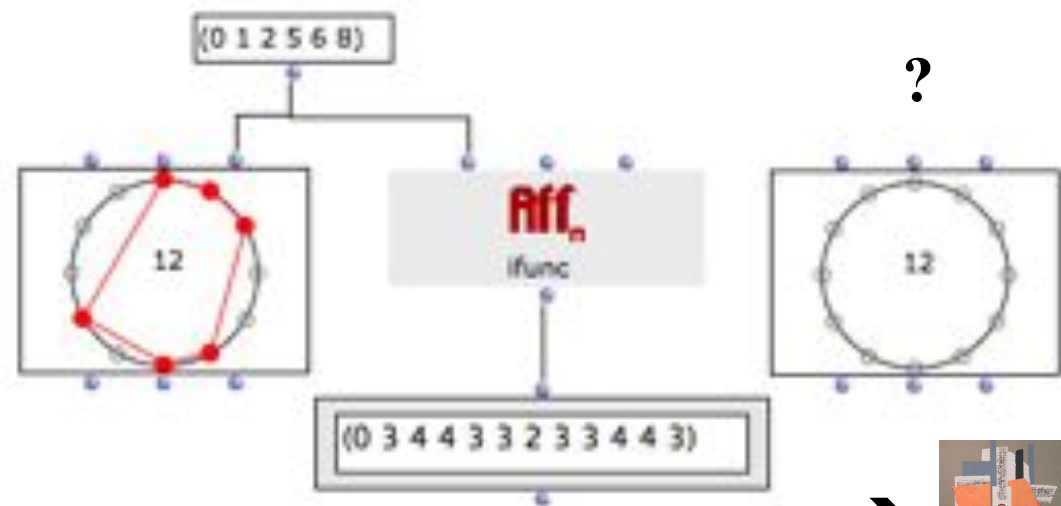
Problème de Lewin (1959)

Est-on capable, si l'on connaît l'ensemble H et, pour tout i , les valeurs $\text{IFUNC}(H, H')(i)$ de reconstruire H' ?

$$H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$$



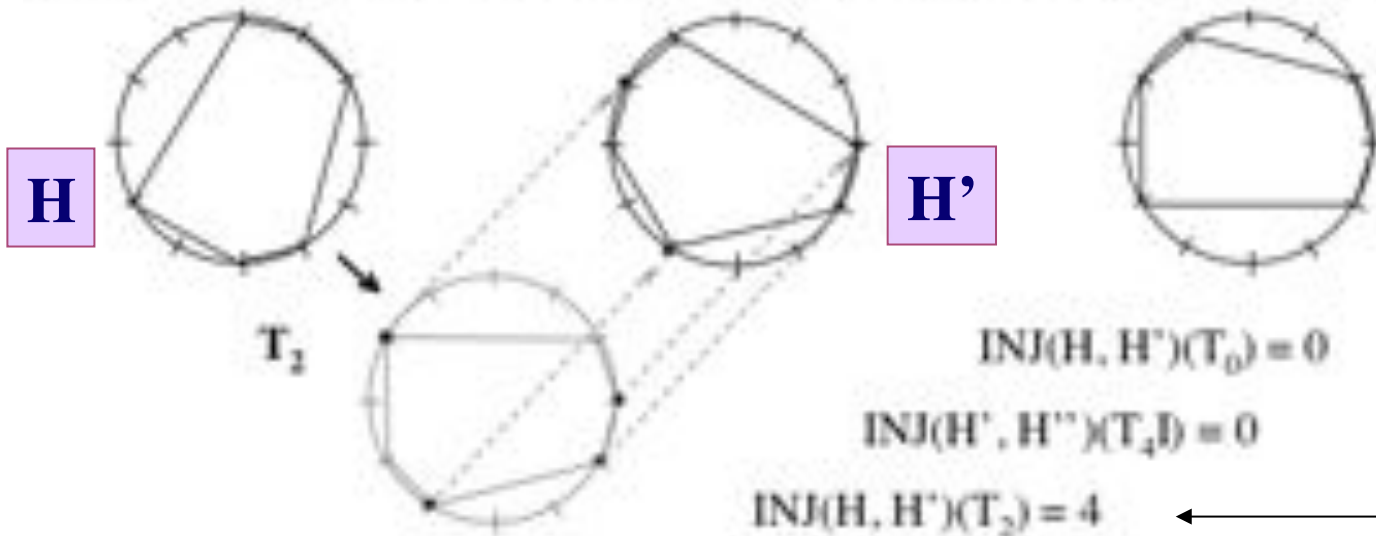
$$H' = \{3, 4, 7, 9, 10, 11\}$$



Fonction d'Injection comme généralisation de relation d'inclusion



$H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$ $H' = \{3, 4, 7, 9, 10, 11\}$ $H'' = T_4(H) = \{2, 3, 4, 8, 10, 11\}$



$INJ(H, H')(T_0) = 0$

$INJ(H', H'')(T_4) = 0$

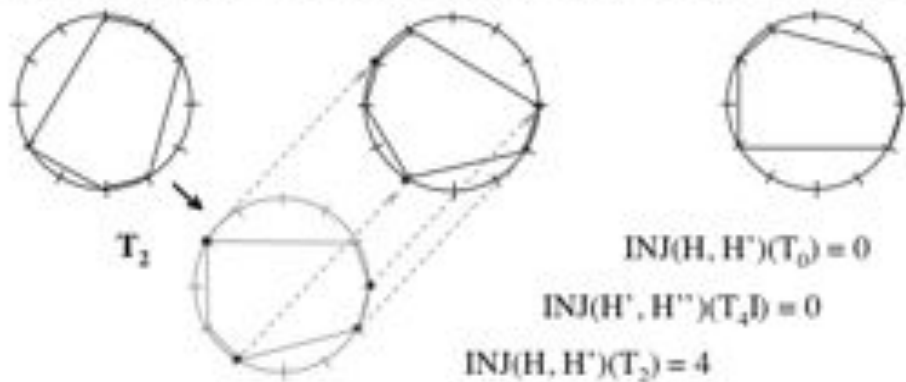
$INJ(H, H')(T_2) = 4$

$INJ(H, H')(T_i) = \#\{a \in H \mid T_i(a) \in H'\}$

$i=2$

Fonction d'Injection (INJ) et fonction intervallaire (IFUNC)

$H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$ $H' = \{3, 4, 7, 9, 10, 11\}$ $H'' = T_2(H) = \{2, 3, 4, 8, 10, 11\}$



$INJ(H, H')(T_i) =$
 nombre d'éléments a
 de H tels que $T_i(a) \in H'$

||

H

H'

$IFUNC(H, H')(i) =$
 nombre d'éléments
 (a, b) dans $H \times H'$ tels
 que $int(a, b) = i$

« *Here the basic hierarchical scope of the (twelve-tone) system is contained essentially in the simple theorem that:*

Given a collection of pitches (pitch classes), the multiplicity of occurrence of any interval (...) determines the number of common pitches between the original collection and the transposition by the interval »

(Milton Babbitt, Past and Present Concepts, 1961)

« *...on peut remplacer entièrement le concept d'intervalle dans un GIS avec le concept de transposition dans un espace »*

« ...on peut remplacer le concept même de GIS avec l'idée d'un espace S sur lequel on a un groupe d'opérations qui opère »

(David Lewin, Generalized Musical Intervals and Transformations, 1987)

Babbitt

↕ $GIS = Z_{12}$

↕ GIS

Lewin

$$\mathbf{INJ}(A, B)(T_i) = \mathbf{IFUNC}(A, B)(i)$$

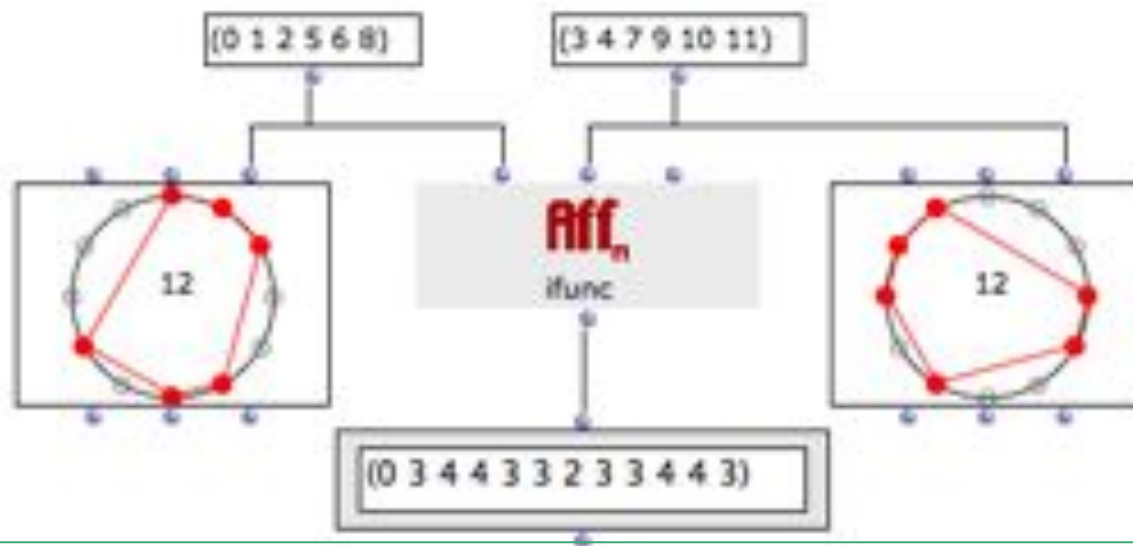
Approche transformationnelle et théorie de l'homométrie

$$\text{INJ}(A, B)(T_k) = \text{IFUNC}(A, B)(k)$$

- IFUNC peut s'écrire comme un produit de convolution de fonctions caractéristiques (Lewin, *JMT*, 1958)

$$\text{IFUNC}(A, B)(k) = \#\{(a, b) \in A \times B \mid a = b + k\}$$

$$\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_B(k) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_c} \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(k - x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_c} \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(x - k) = \sum_{\substack{(x, y) \in A \times B \\ y = x - k}} 1$$



$$\text{IFUNC}(A, B)(3) = \#\{(0, 9), (1, 10), (2, 11), (6, 3)\}$$

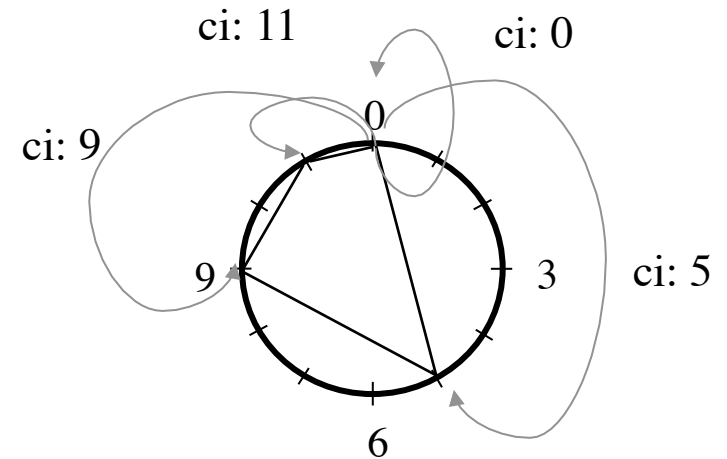
Approche transformationnelle et théorie de l'homométrie

- Dans le cas du GIS \mathbb{Z}_{12} si $A = B$ on obtient la définition de “contenu intervallique” d'un accord

$$\text{IFUNC}(A, A) = \text{IC}_A$$

- IC peut s'écrire comme un produit de convolution de fonctions caractéristiques (Lewin, *JMT*, 1958)

$$\text{IC}_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$



$$A = \{0, 5, 9, 11\} \Rightarrow \text{IC}_A(k) = 1 \quad \forall k$$

$$B = \{0, 1, 4, 6\}$$

$$C = \{0, 1, 3, 7\}$$

$$\Rightarrow \text{IC}_B(k) = \text{IC}_C(k) = \text{IC}_A(k) = 1 \quad \forall k$$

$$\mathbb{1}_A \star \mathbb{1}_{-B}(k) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_c} \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_{-B}(k - x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_c} \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x - k) = \sum_{\substack{(x,y) \in A \times B \\ y=x-k}} 1$$

Relation Z en musique et théorie de l'homométrie

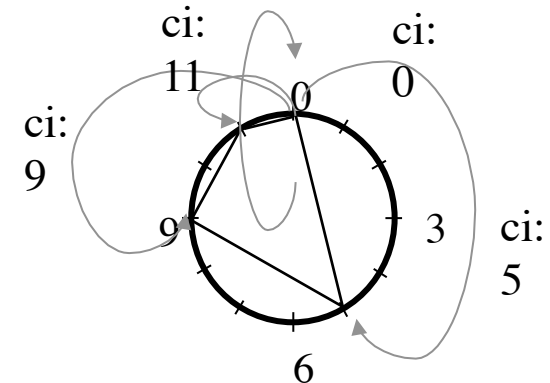
- Le contenu intervallique est équivalent à un produit de convolution de fonctions caractéristiques (Lewin, 1958)

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

$$1_A \star \tilde{1}_B(k) = \sum_i 1_A(i) \times 1_B(i - k) = \sum_{\substack{i \in A \\ i - k \in B}} 1$$

$$\mathcal{F}(1_A \star \tilde{1}_B) = \mathcal{F}(1_A) \times \mathcal{F}(\tilde{1}_B)$$



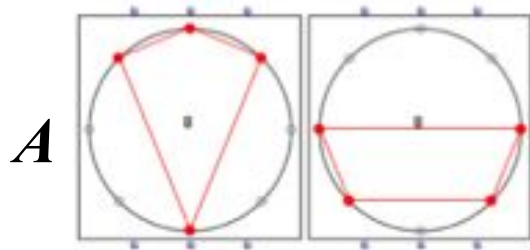
$$A = \{0, 5, 9, 11\} \Rightarrow IC_A(k) = 1 \forall k$$

$$\mathcal{F}(IC_A) = \mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_{-A} = |\mathcal{F}_A|^2$$

➔ **Relation Z**

$$\forall k \mathcal{F}(IC_{\mathbb{Z}_c \setminus A})(k) = \mathcal{F}(IC_A)(k)$$

➔ **Théorème de l'hexacorde**



$$A \rightarrow IC_A = IC_{A'}$$

• P. Beauguitte, *Transformée de Fourier discrète et structures musicales*, Master ATIAM, 2011

FIGURE 1.4 – Plus petite Z-relation non triviale

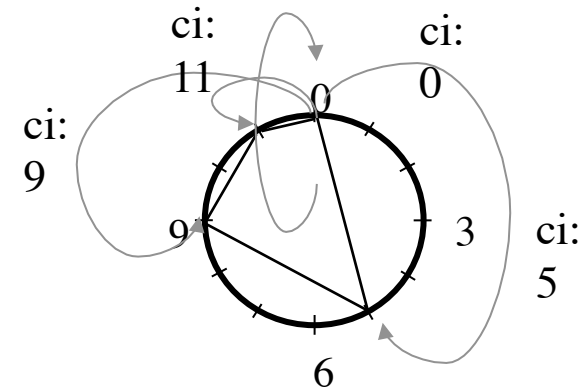
Z-relation, homométrie et reconstruction de la phase

- Deux ensembles sont en Z-relations s'ils ont le même module de la DFT

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$\mathcal{F}(IC_A) = \mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_{-A} = |\mathcal{F}_A|^2$$



$$A = \{0, 5, 9, 11\}$$

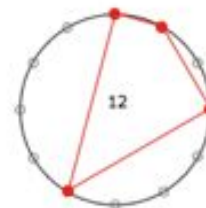
$$IC_A(k) = 1 \quad \forall k = 1 \dots 11$$

$\{0, 1, 4, 6\}_{12}$



$iv = [4, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1]$

$\{0, 1, 3, 7\}_{12}$



- Mandereau J., D. Ghisi, E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon, (2011a), « Z-relation and homometry in musical distributions », *Journal of Mathematics and Music*, vol. 5, n° 2, p. 83-98.
- Mandereau J, D. Ghisi, E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon (2011b), « Discrete phase retrieval in musical structures », *Journal of Mathematics and Music*, vol. 5, n° 2, p. 99-116.

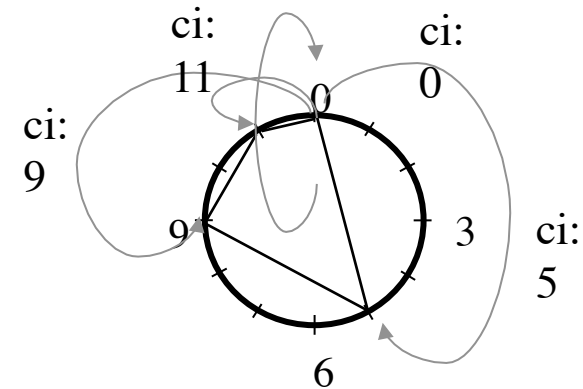
Z-relation, homométrie et reconstruction de la phase

- Deux ensembles sont en Z-relations s'ils ont le même module de la DFT

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

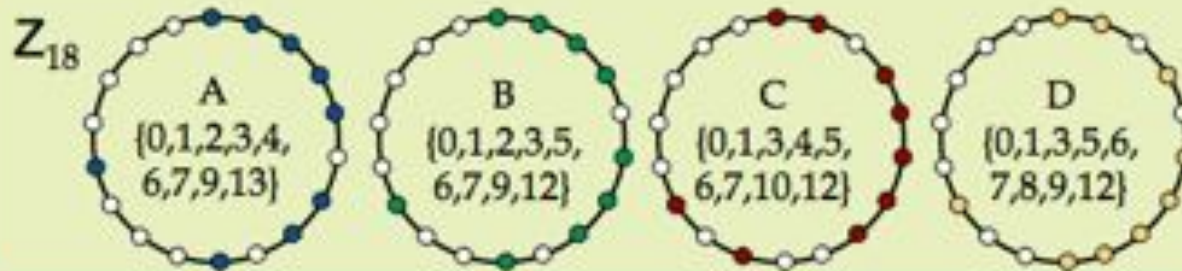
$$\mathcal{F}(IC_A) = \mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_{-A} = |\mathcal{F}_A|^2$$



$$A = \{0, 5, 9, 11\}$$

$$IC_A(k) = 1 \quad \forall k = 1 \dots 11$$

Not only do we have Z-couples, but we also have Z-related t-uples for all t's.



- Daniele Ghisi, "From Z-relation to homometry: an introduction and some musical examples", Séminaire MaMuX, 10 décembre 2010 [<http://repmus.ircam.fr/mamux/saisons/saison10-2010-2011/2010-12-10>]

Z-relation, homométrie et reconstruction de la phase

■ Contenu intervallaire et Fonction de Patterson

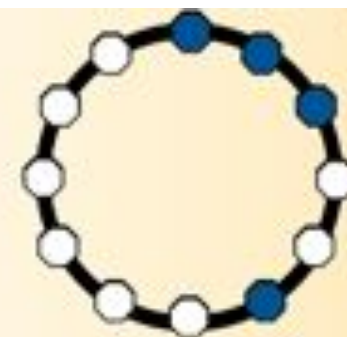
$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

Expression polynomiale :

$$D(x) = 1 + x + x^2 + x^5$$

Fonction de Patterson (ou d'autocorrelation):

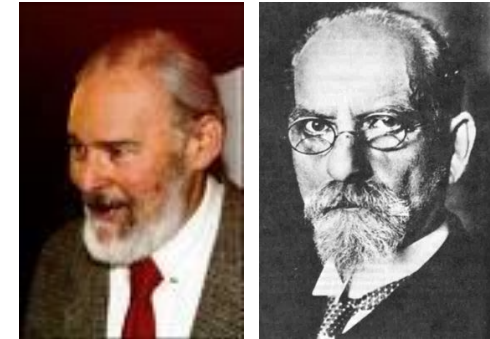
$$\begin{aligned} D(x)D(x^{-1}) &= \\ &= (1 + x + x^2 + x^5)(1 + x^{11} + x^{10} + x^7) \\ &= 1 + x + x^2 + x^5 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + 2x^{11} + 3x^{12} + x^{13} + x^{15} + x^{16} \\ &= 4 + 2x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + 2x^{11} \end{aligned}$$



• Daniele Ghisi, "From Z-relation to homometry: an introduction and some musical examples", Séminaire MaMuX, 10 décembre 2010 [<http://repmus.ircam.fr/mamux/saisons/saison10-2010-2011/2010-12-10>]

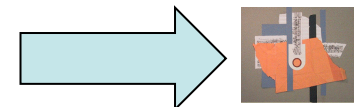
(1) Interprétation rythmique de la fonction IFUNC

- David Lewin, “Some Investigations into Foreground Rhythmic and Metric Patterning,” *Music Theory: Special Topics*, ed. Richmond Browne (New York: Academic Press, 1981), 101–136.
- David Lewin (1986), « Music Theory, Phenomenology, and Modes of Perception », *Music Perception*, 3, 327-382.



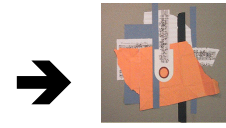
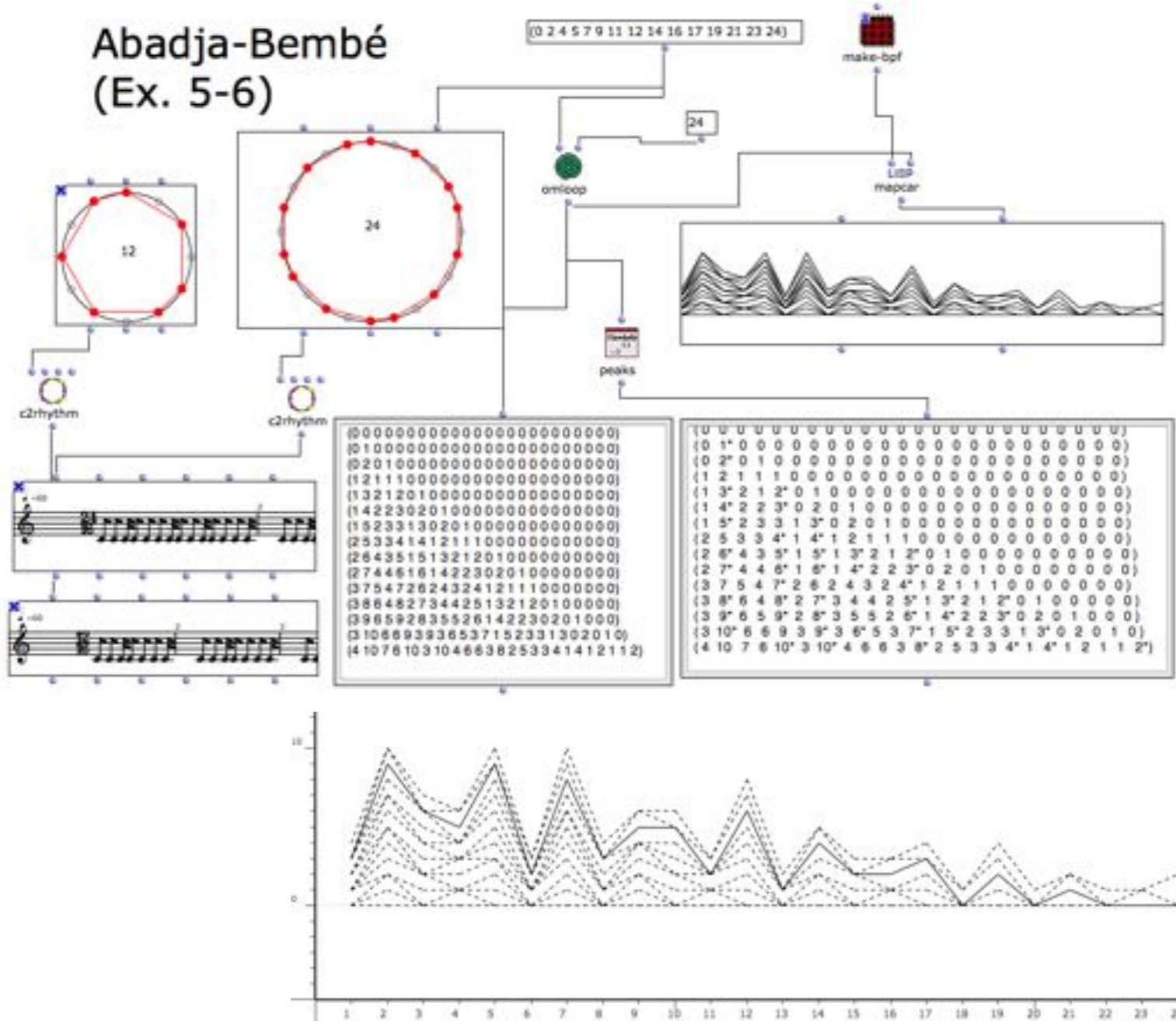
« L'article [Lewin 1981] développe un modèle numérique qui compte, à chaque position-comme-maintenant t [“*now*”-*time t*] le nombre de laps de temps [*time-spans*] que je retiens d'un passé récent pertinent ayant (eu) durée égale à d . On construit ainsi une fonction $W(d,t)$ qui donne un vecteur progressif d'intervalles de durées [“*unfolding durational-interval vector*”] au fur et à mesure que le curseur-présent t avance. Le concept à la base de cette construction utilise un modèle husserlien bidimensionnel de la perception du temps [*Husserlian two-dimensional model of perceptual time*], un modèle qui exprime aussi bien les « impressions primaires » chez Husserl, impressions qui suivent le curseur-présent t , mais aussi les « retentions » chez Husserl, projections d'instants temporels passés [*projections of remembered past times*] (ainsi que durées passées) dans ma conscience présente [*into my present consciousness*]. Ensuite, dans le même article, j'envisage en quelque sorte les « protentions » chez Husserl, des projections d'attentes futures dans la conscience du présent » (Lewin, 1986/2006) »

- Rythme « Abadja » (Afrique) = Rythme Bembé (Cuba) – cf. Handout EXAMPLE 5 + EXAMPLE 6
- Richard Wagner, *Parsifal* (Prédule Act 1) – cf. Handout EXAMPLE 7 + EXAMPLE 8
- Luciano Berio, *Six Encores* (« Brin », 1990) – cf. Handout Example 12

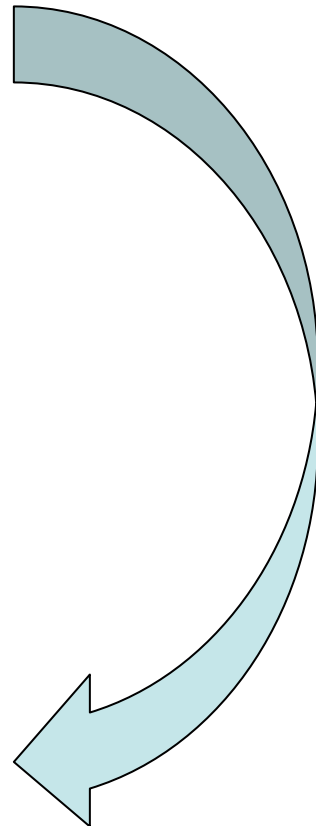


Exemple de modélisation : le rythme Abadja/Bembé

Abadja-Bembé
(Ex. 5-6)

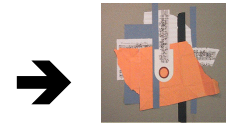


10-abadja-bembe



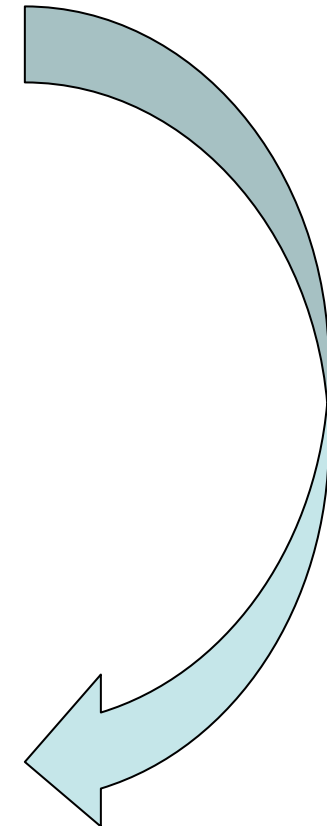
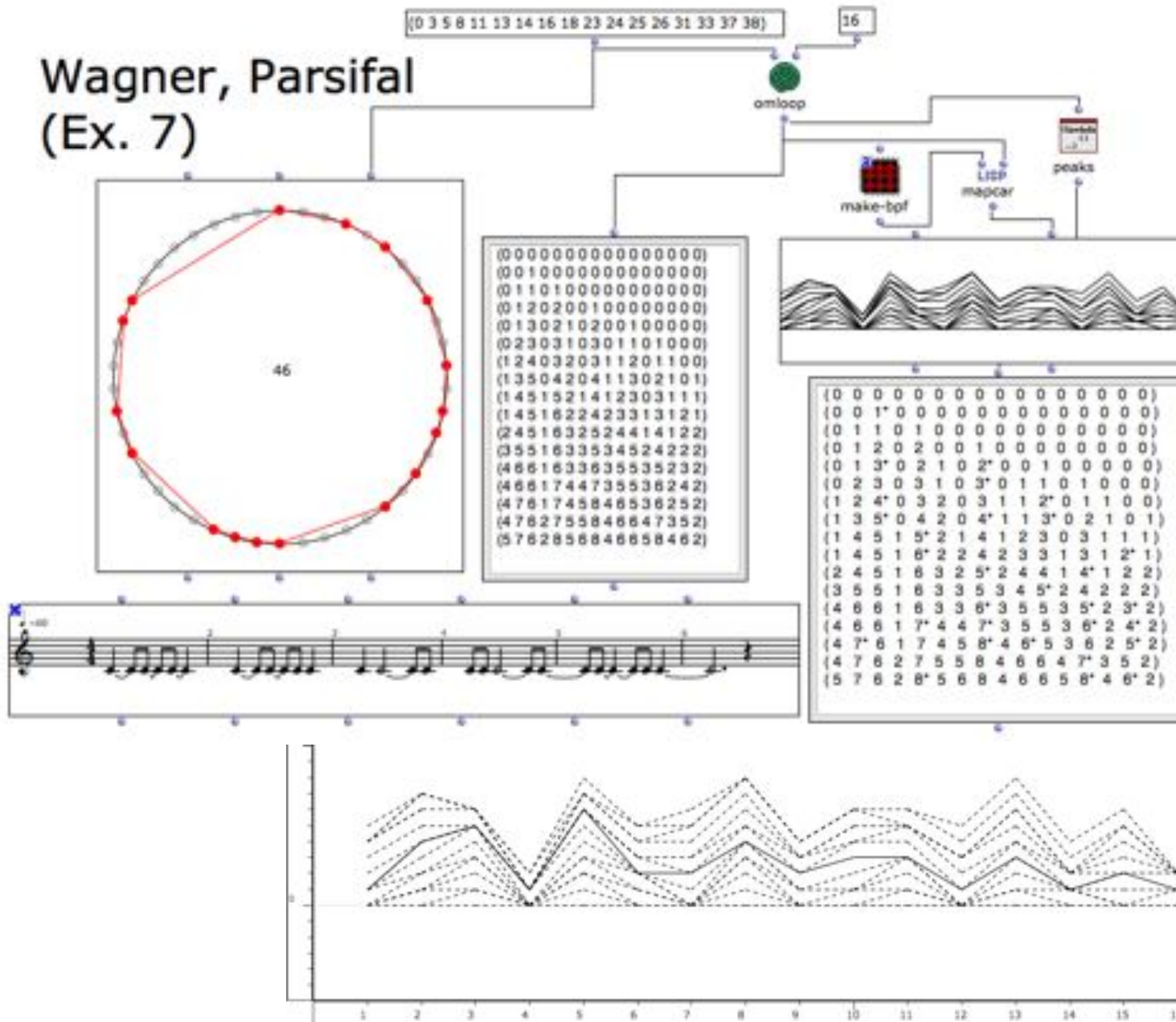
Unfolding Rhythmic Interval Vector

Ex. de modélisation : R. Wagner, *Parsifal* (Prélude, Acte 1)



11-parsifal

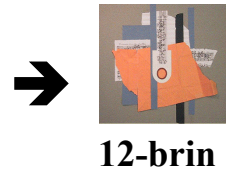
Wagner, *Parsifal*
(Ex. 7)



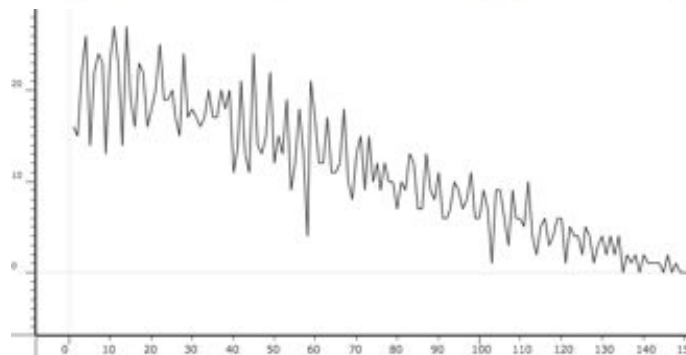
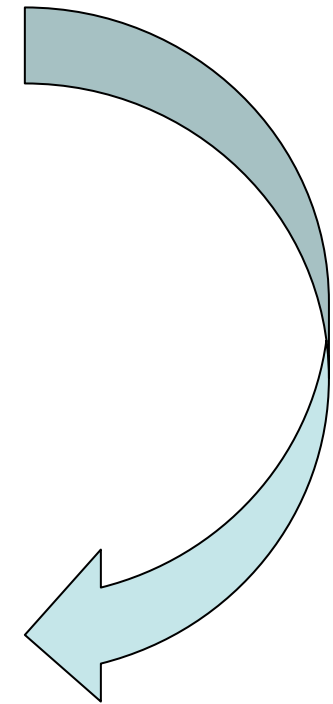
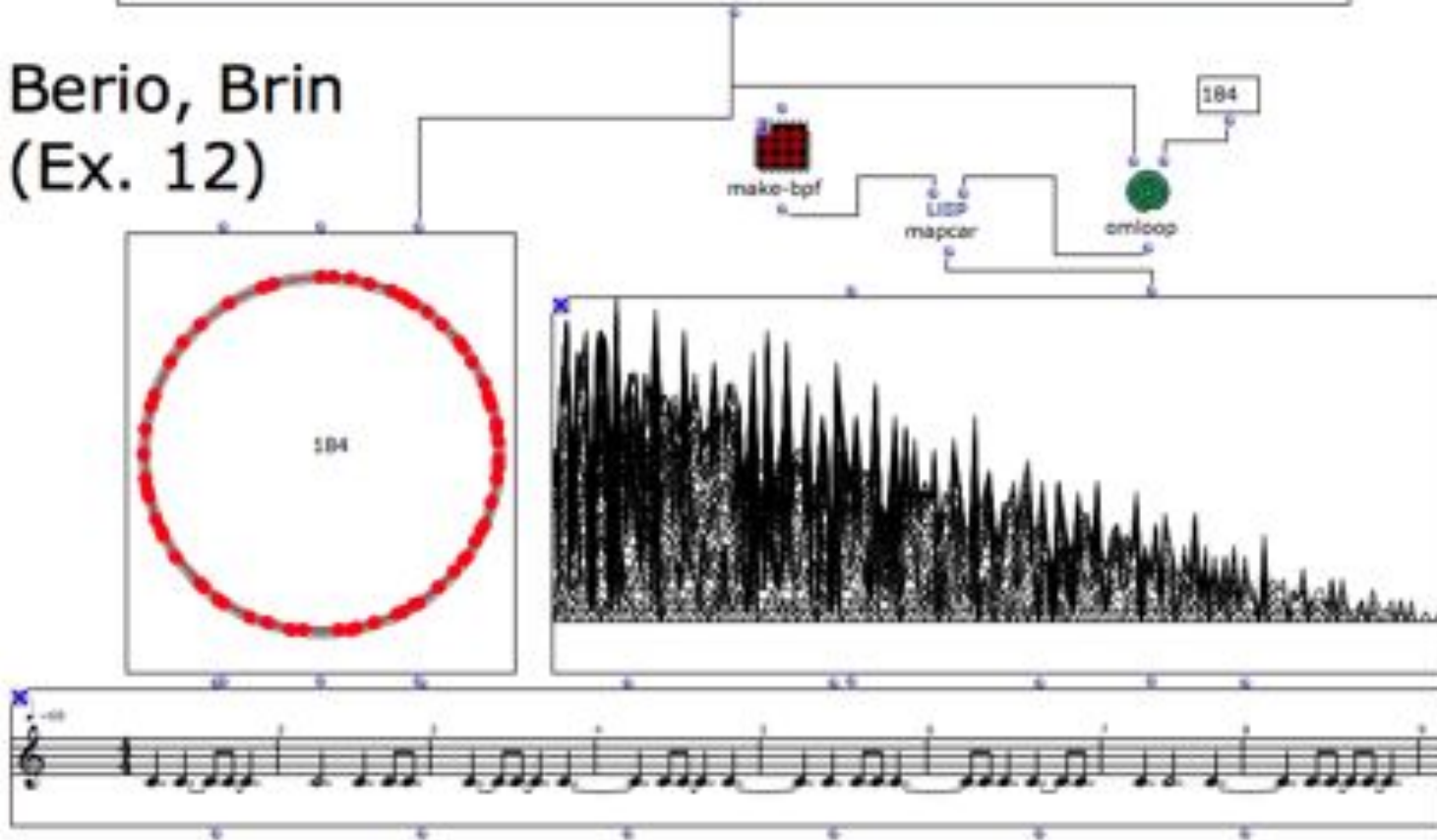
Unfolding Rhythmic Interval Vector

Ex. de modélisation : L. Berio, *Six Encores* (« Brin »)

(0 2 5 8 12 14 15 16 19 22 26 27 30 34 36 37 38 41 42 44 47 48 50 54 58 59 61 64 65 67 71 75 76 78 79 83 86 87 89 95 97 101 104 109 110 113 114 120 124 125 127 131 132 134 138 142 146 148 154 158 162 168 174 176 184)

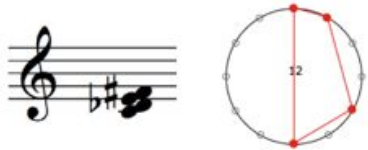



Berio, Brin
(Ex. 12)



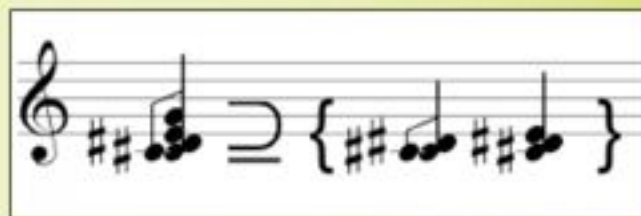
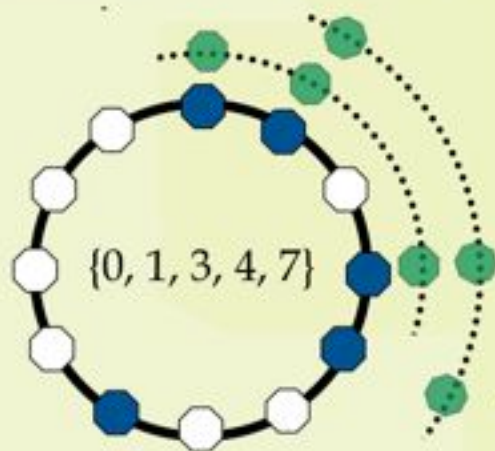
Unfolding Rhythmic Interval Vector

Relation Z d'ordre supérieur (vecteur mv^k de Lewin)

$\{0, 1, 4, 6\}_{12}$  $iv = [4, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1]$ → 2-homométrie

$\{0, 1, 3, 7\}_{12}$ 

Le vecteur mv^k (d'après Lewin) nous dit combien de copies d'un certain ensemble de cardinalité k sont contenues dans un ensemble



→ k-homométrie
(k-deck ou k-Deck)

- Daniele Ghisi, "From Z-relation to homometry: an introduction and some musical examples", Séminaire MaMuX, 10 décembre 2010 [<http://repmus.ircam.fr/mamux/saisons/saison10-2010-2011/2010-12-10>]

Relation Z d'ordre supérieur (vecteur mv^k de Lewin)

3-set (prime forms):

- {0, 1, 2} → 0 copies
- {0, 1, 3} → 2 copies
- {0, 1, 4} → 3 copies
- {0, 1, 5} → 0 copies
- {0, 1, 6} → 1 copie
- {0, 2, 4} → 0 copies
- {0, 2, 5} → 0 copies
- {0, 2, 6} → 1 copie
- {0, 2, 7} → 0 copies
- {0, 3, 6} → 1 copie
- {0, 3, 7} → 2 copies
- {0, 4, 8} → 0 copies

3-Subsets:

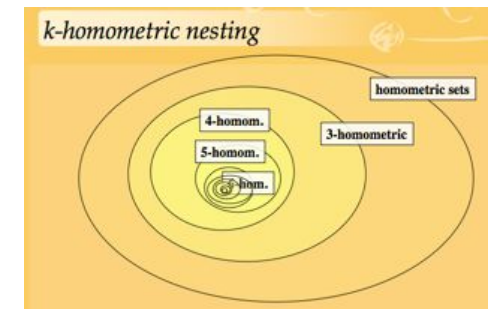
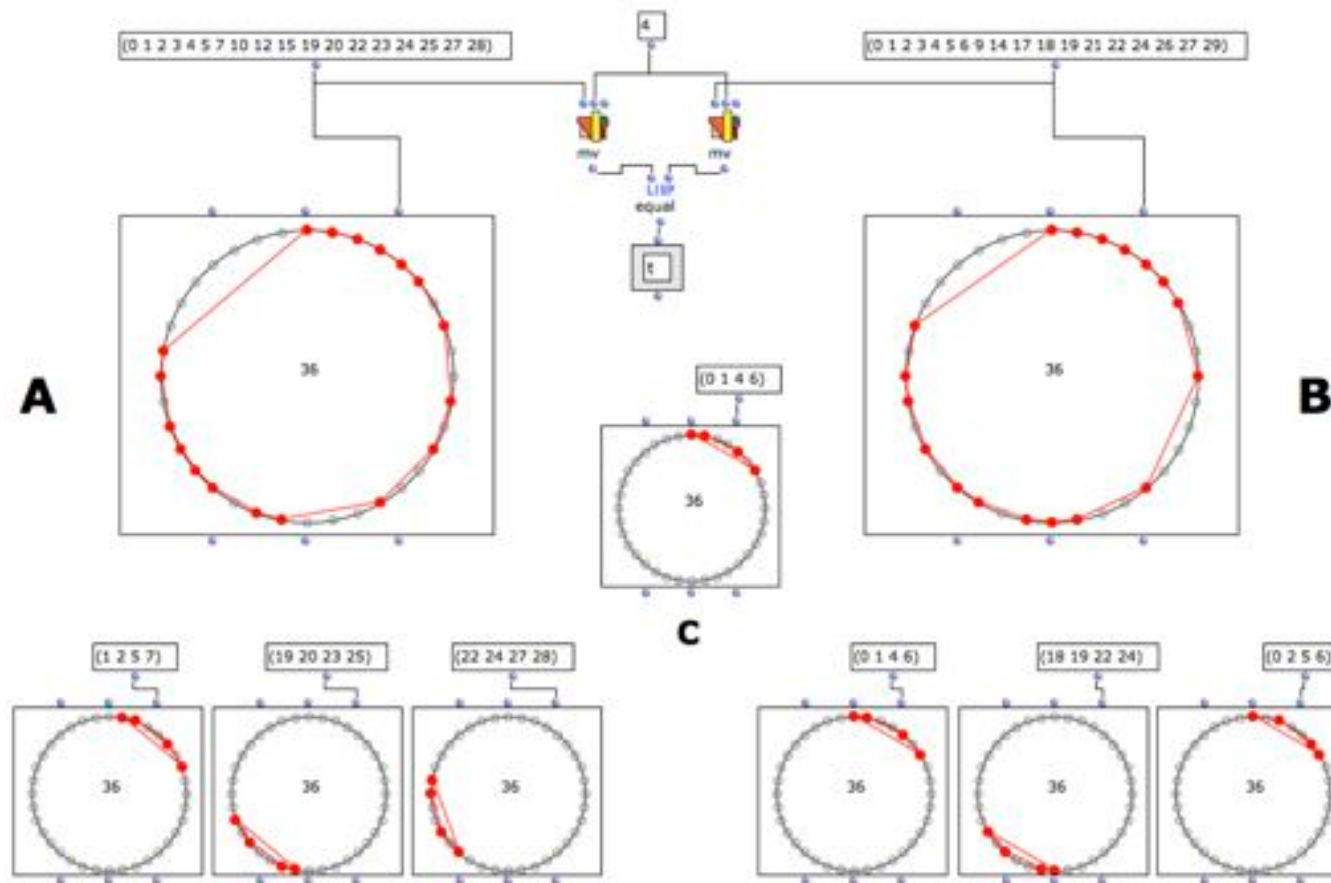
- 2 / {0, 1, 3} /
- 3 / {0, 1, 4} /
- 1 / {0, 1, 7} /
- 1 / {0, 2, 6} /
- 1 / {0, 3, 6} /
- 2 / {0, 3, 7} /

$mv^3(\{0, 1, 3, 4, 7\}) = [0, 2, 3, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 0]$

• Daniele Ghisi, "From Z-relation to homometry: an introduction and some musical examples", Séminaire MaMuX, 10 décembre 2010 [<http://repmus.ircam.fr/mamux/saisons/saison10-2010-2011/2010-12-10>]

Premiers résultats sur la k-hométrie

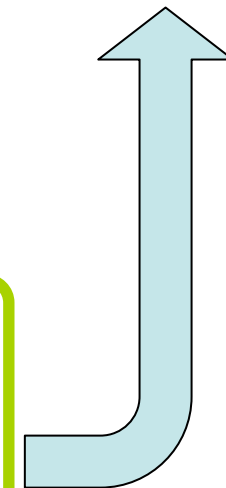
- Mandereau J., D. Ghisi, E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon, (2011a), « Z-relation and homometry in musical distributions », *JMM*, vol. 5, n° 2, p. 83-98.
- Mandereau J., D. Ghisi, E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon (2011b), « Discrete phase retrieval in musical structures », *JMM*, vol. 5, n° 2, p. 99-116.



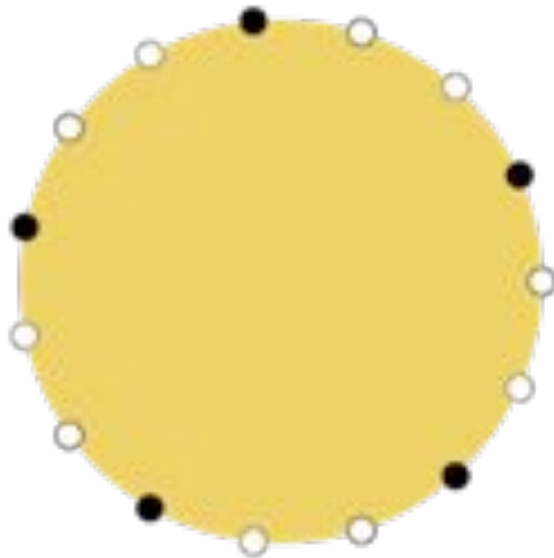
$$\mathbf{Z}_{36} \quad A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 15, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 28\}$$

$$\mathbf{Z}_{36} \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 26, 27, 29\}$$

$$mv^4(A) = mv^4(B) \rightarrow \mathbf{4\text{-homométrie}}$$



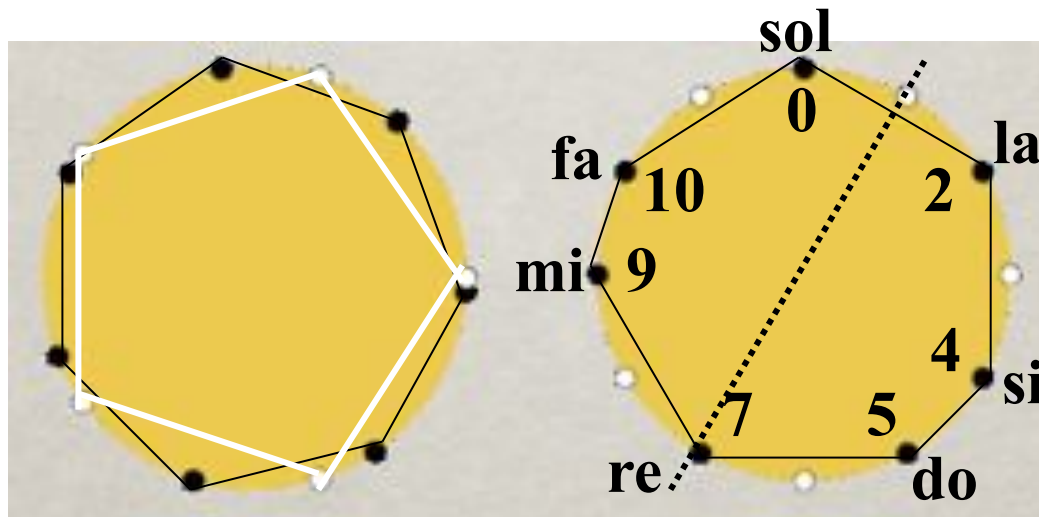
Maximally-Even Sets (ME-sets)



$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$|\mathcal{F}_A(5)| = 1+1+1+1+1=5$$

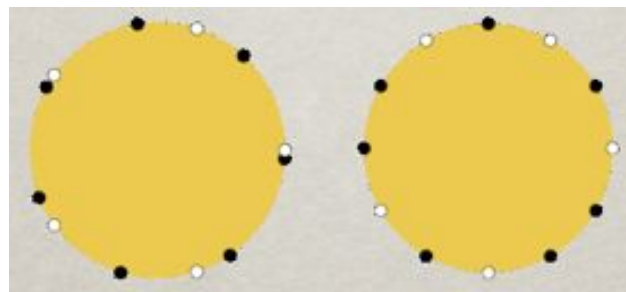
En général, $|\mathcal{F}_A(t)| \leq \#A$



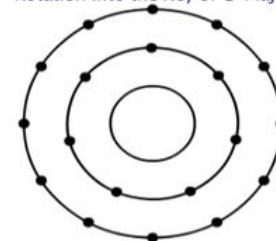
Gamme diatonique:
 $\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 10\}$

Gamme pentatonique:
 $\{1, 3, 6, 8, 11\}$

Nouvelle définition de ME sets



Rotation into the Key of C-Major

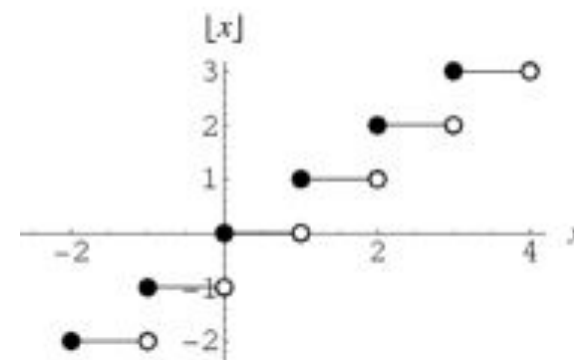


Definition (Clough-Myerson-Douthett) A set A with cardinality d in a given equal tempered space \mathbf{Z}_c is maximally even if $A = \{a_k\}$

$$a_k = J_{c,d}^\alpha(k) = \left\lfloor \frac{kc + \alpha}{d} \right\rfloor$$

where $\alpha \in \mathbf{R}$
 $\lfloor x \rfloor$ is the integer part of x

$$J_{12,7}^5 = \left\{ \left\lfloor \frac{12k + 5}{7} \right\rfloor \right\}_{k=0}^6 = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$$

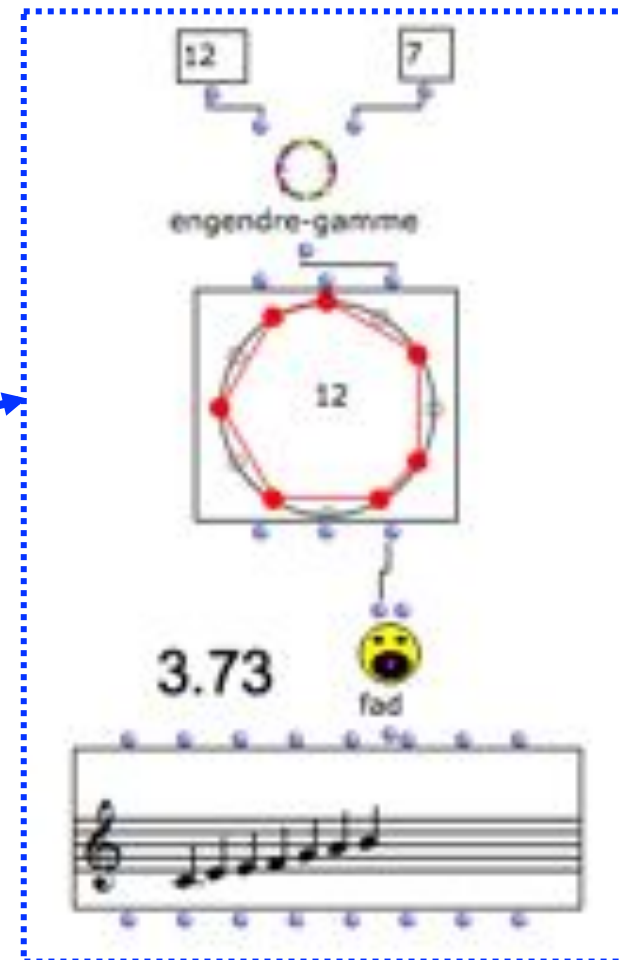
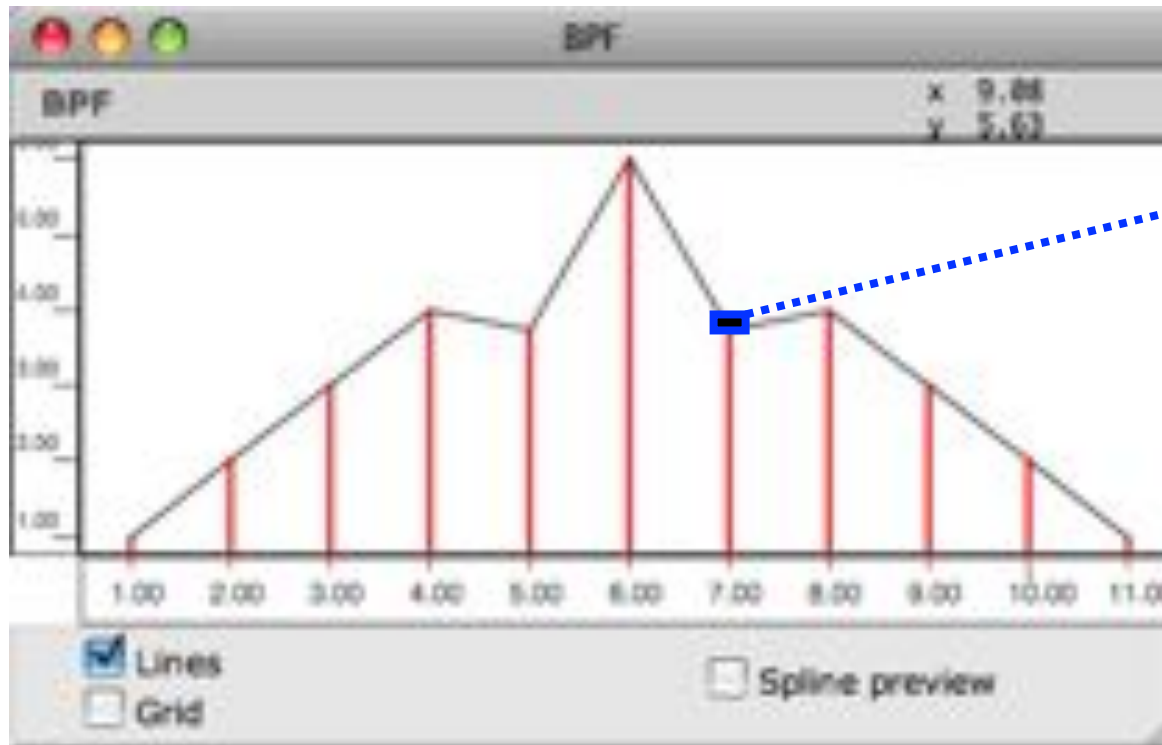


Definition (Amiot, 2005) A set A with cardinality d given equal tempered space \mathbf{Z}_c is maximally even if $|F_A(d)| \geq |F_B(d)|$ for all subsets B of cardinality d in \mathbf{Z}_c .

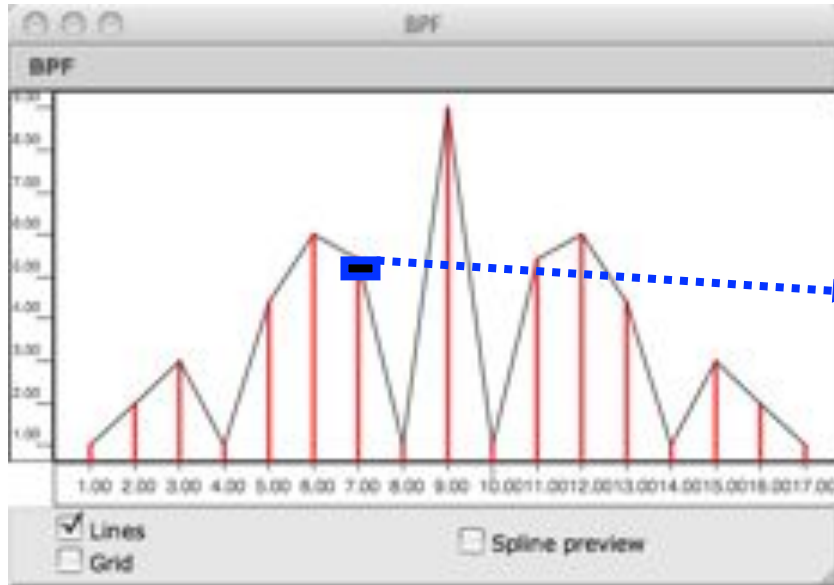
where $F_{set}(t) := \sum_{k \in set} e^{2i\pi kt/12}$

Nouvelle classification des structures musicales à l'aide de la DFT

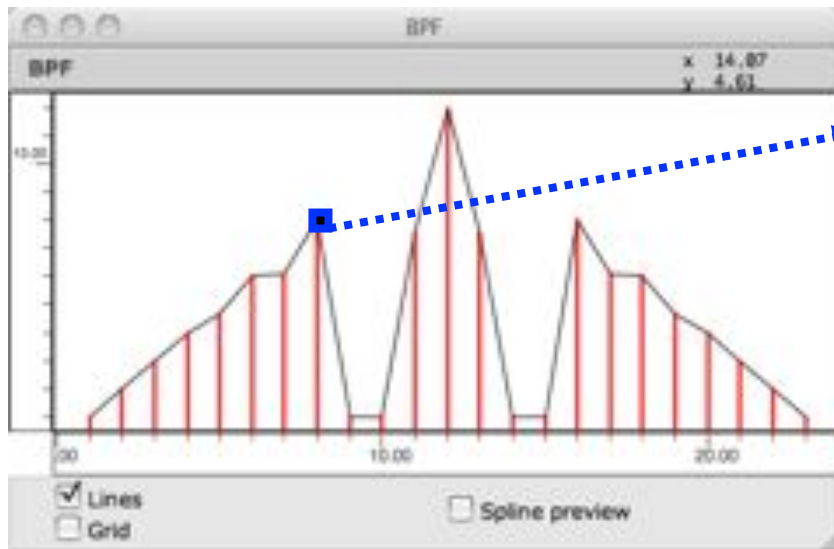
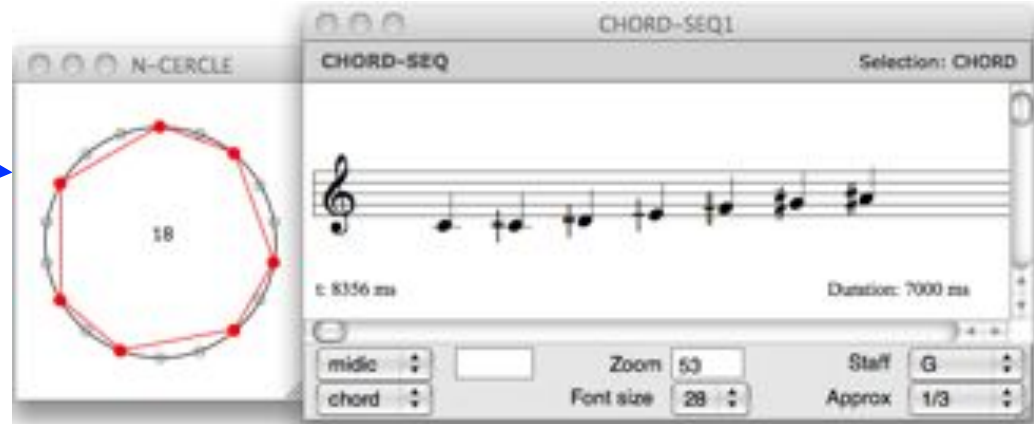
$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$



Classification des structures microtonales à l'aide de la DFT



Systeme en tiers de ton

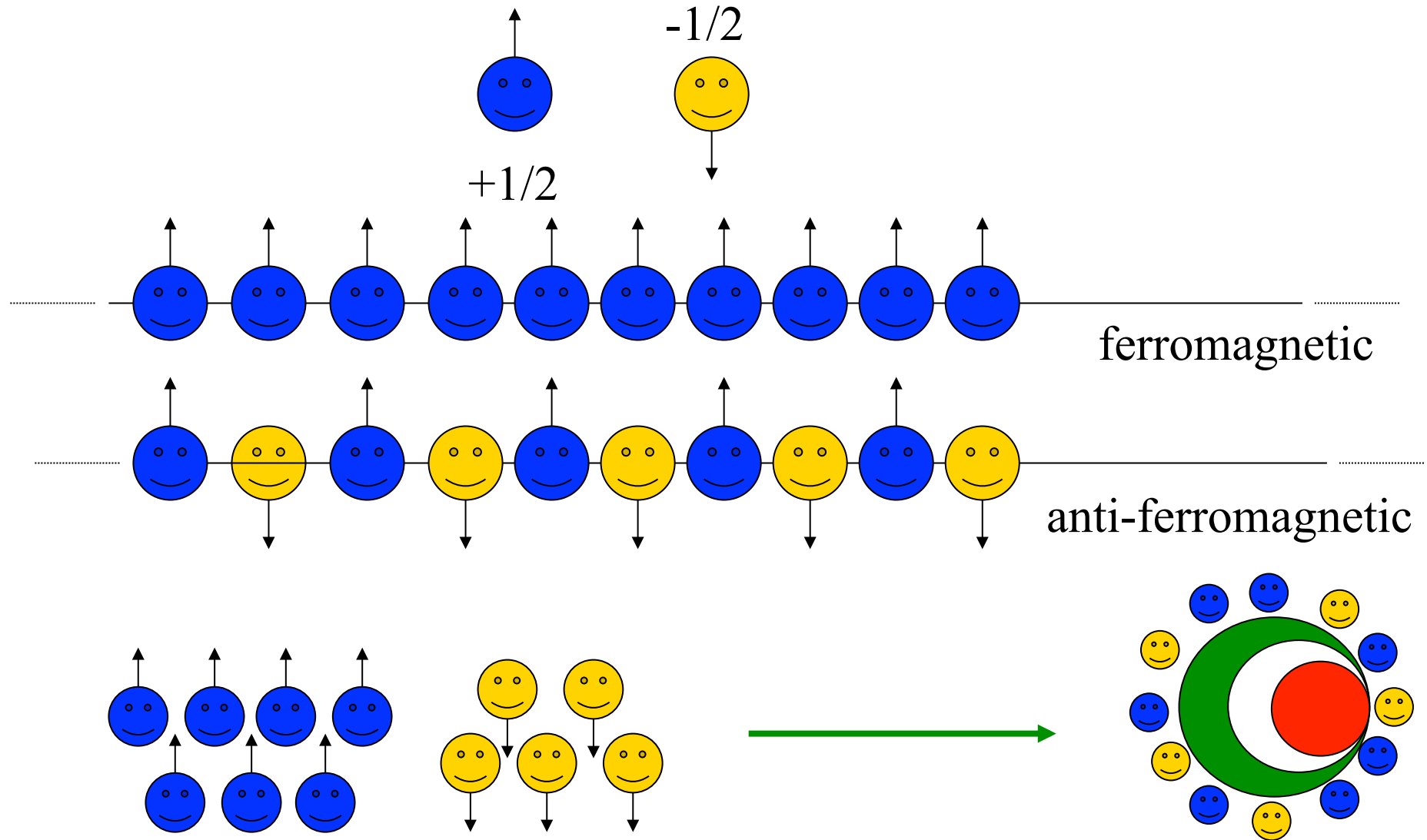


Systeme en quarts de ton



The one-dimensional antiferromagnetic spin-1/2 Ising Model

Jack Douthett & Richard Krantz, "Energy extremes and spin configurations for the one-dimensional antiferromagnetic Ising model with arbitrary-range interaction", *J. Math. Phys.* 37 (7), July 1996



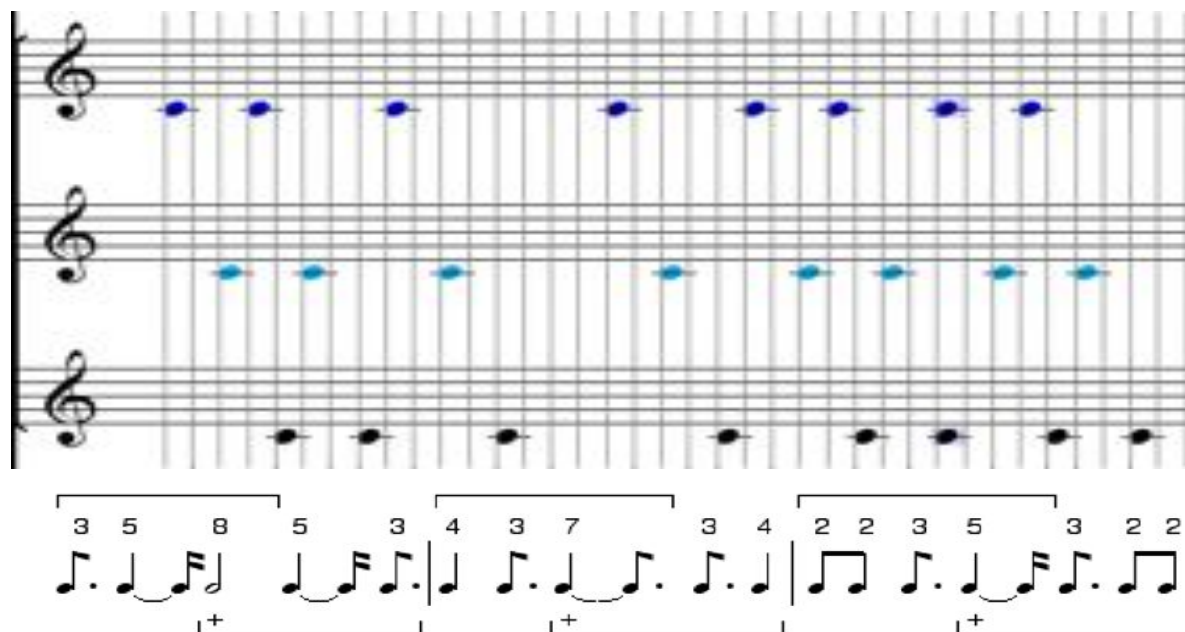
Olivier Messiaen et les canons rythmiques



Harawi (1945)

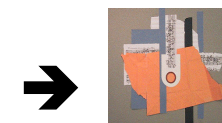


Visions de l'Amen (1943)



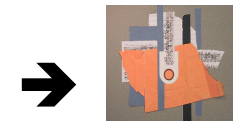
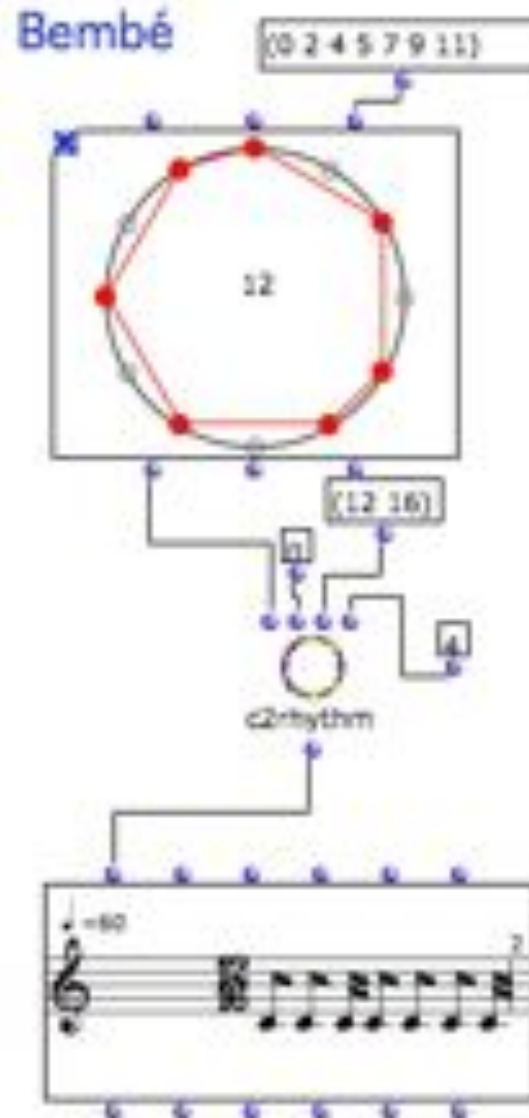
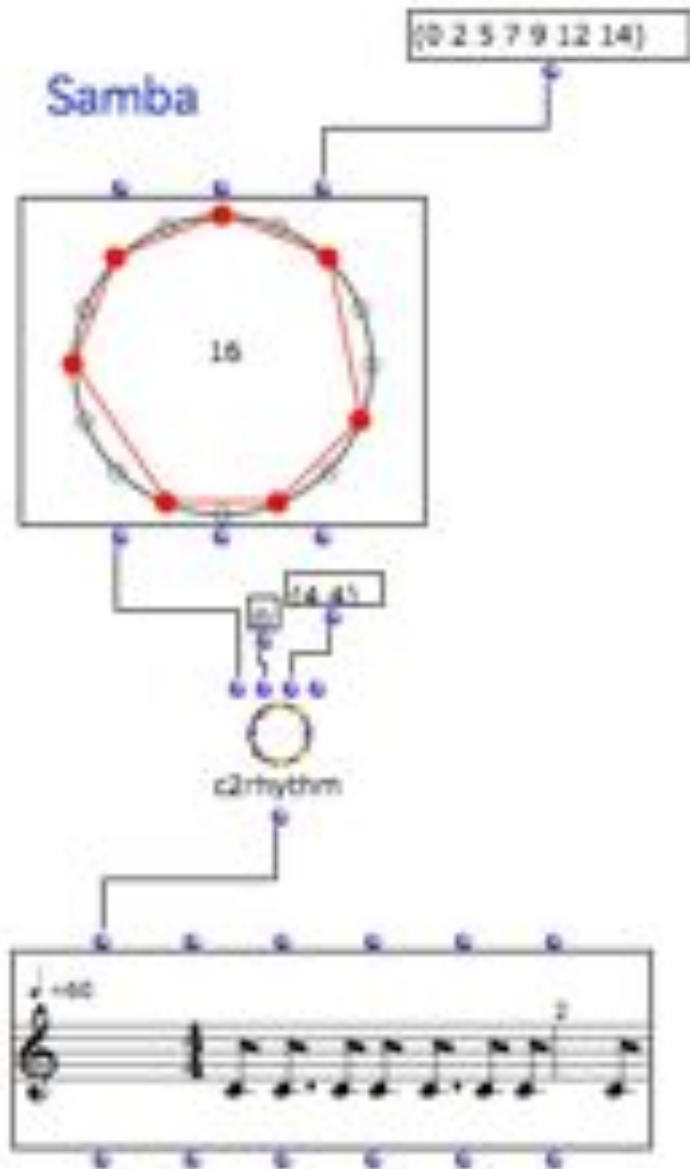
Modèle
rythmique

« ...il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, **jamais au même moment ni au même endroit [...]. C'est du désordre organisé** »



13-harawi

Théorie du rythme périodique

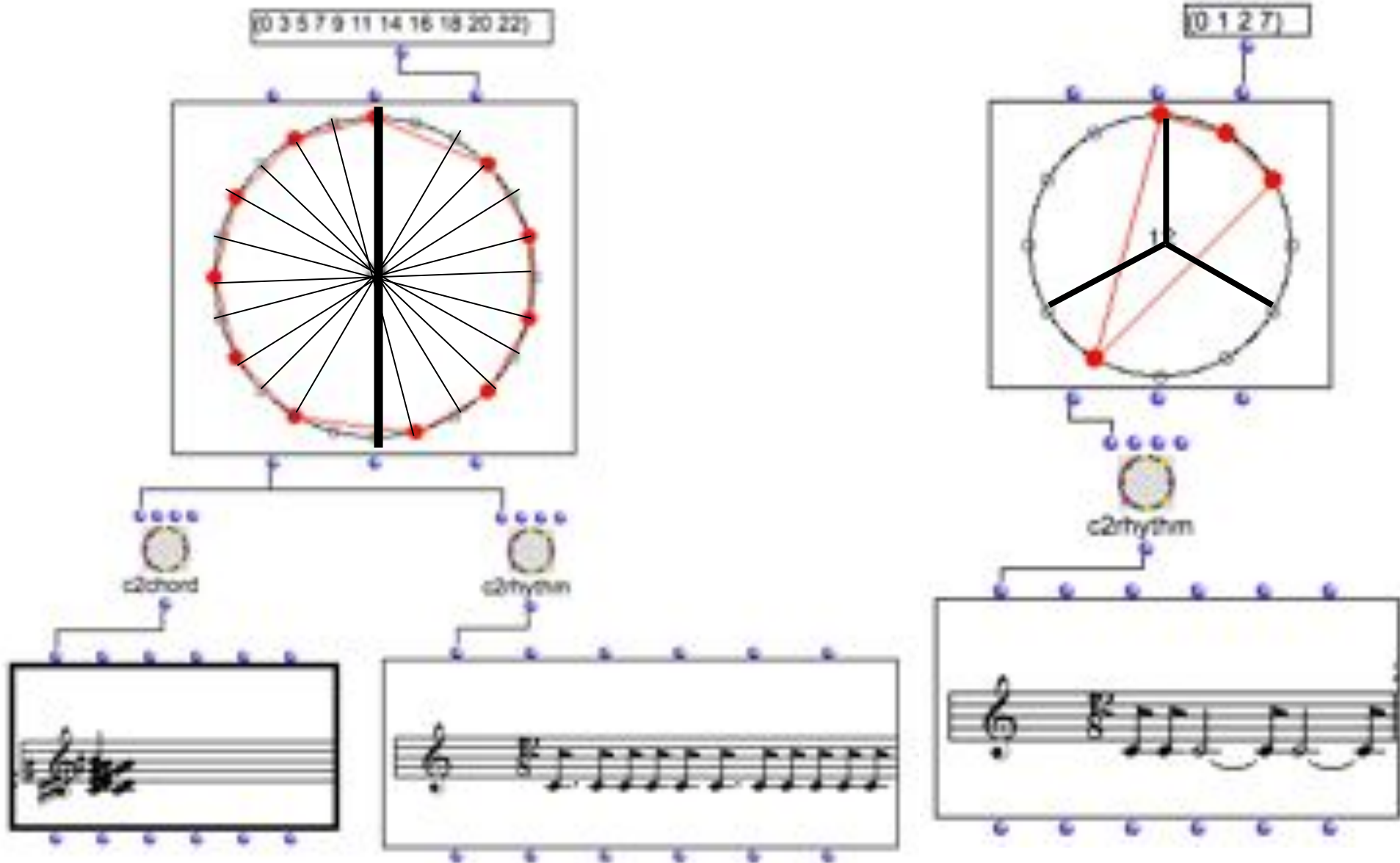


14-rhythms

The Oddity Property and a generalization

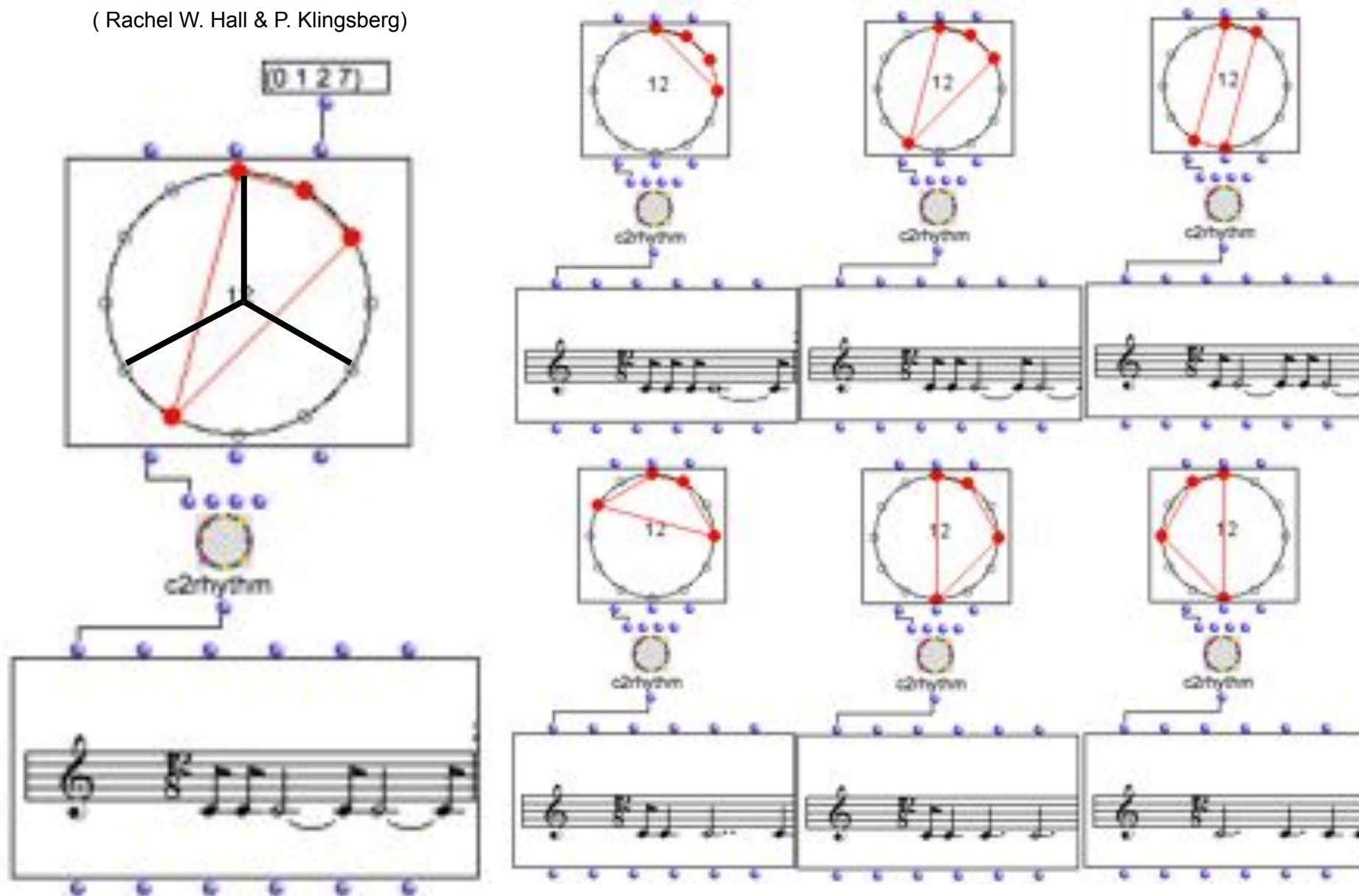
(Simha Arom & Marc Chemillier)

(Rachel W. Hall & P. Klingsberg)

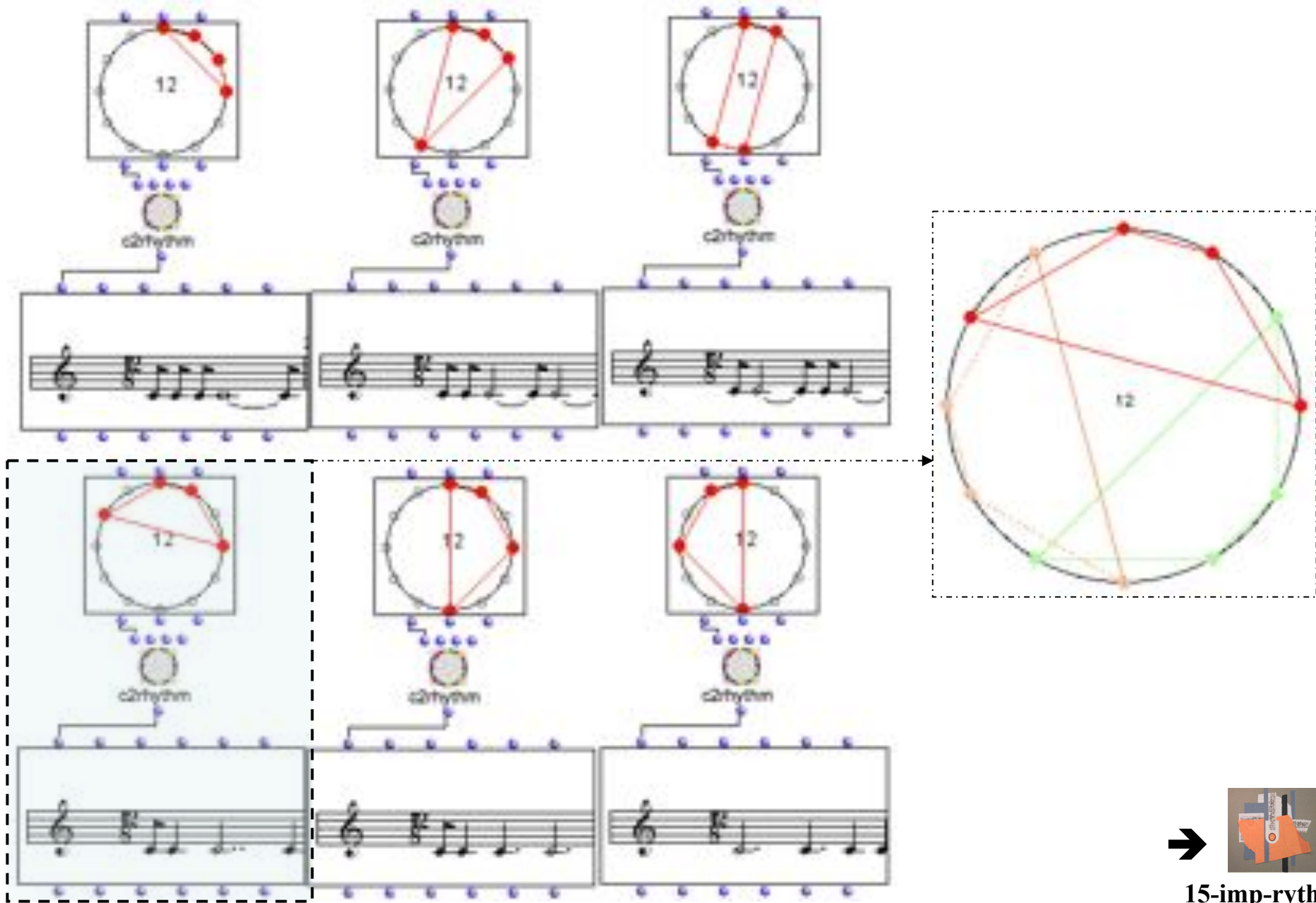


The 3-Oddity Property

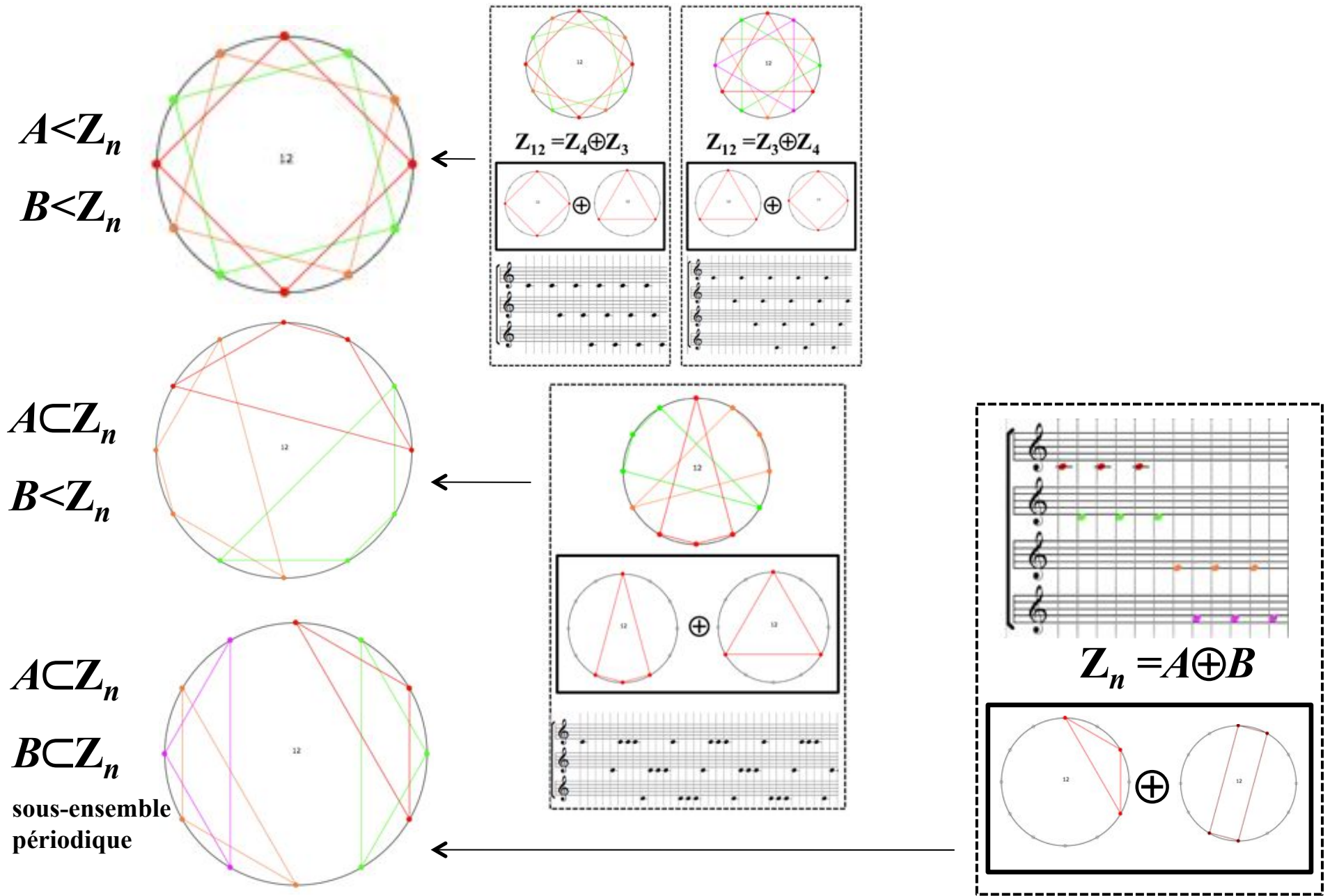
(Rachel W. Hall & P. Klingsberg)



3-asymmetric rhythmic pattern and tiling process



Factorisation de groupes et périodicités des facteurs

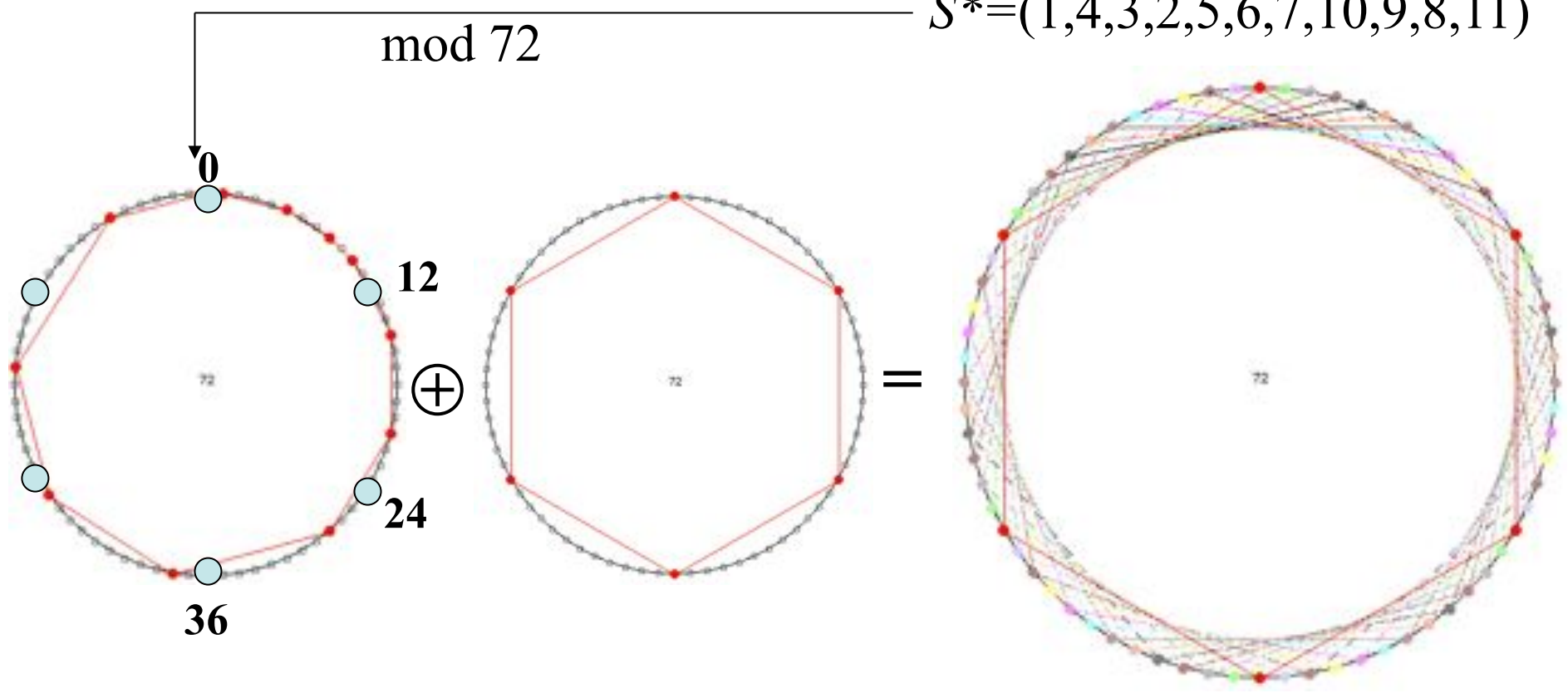


Canons rythmiques mosaïques et séries tous-intervalles

...
 ...
 36
 25
 24
 13
 12

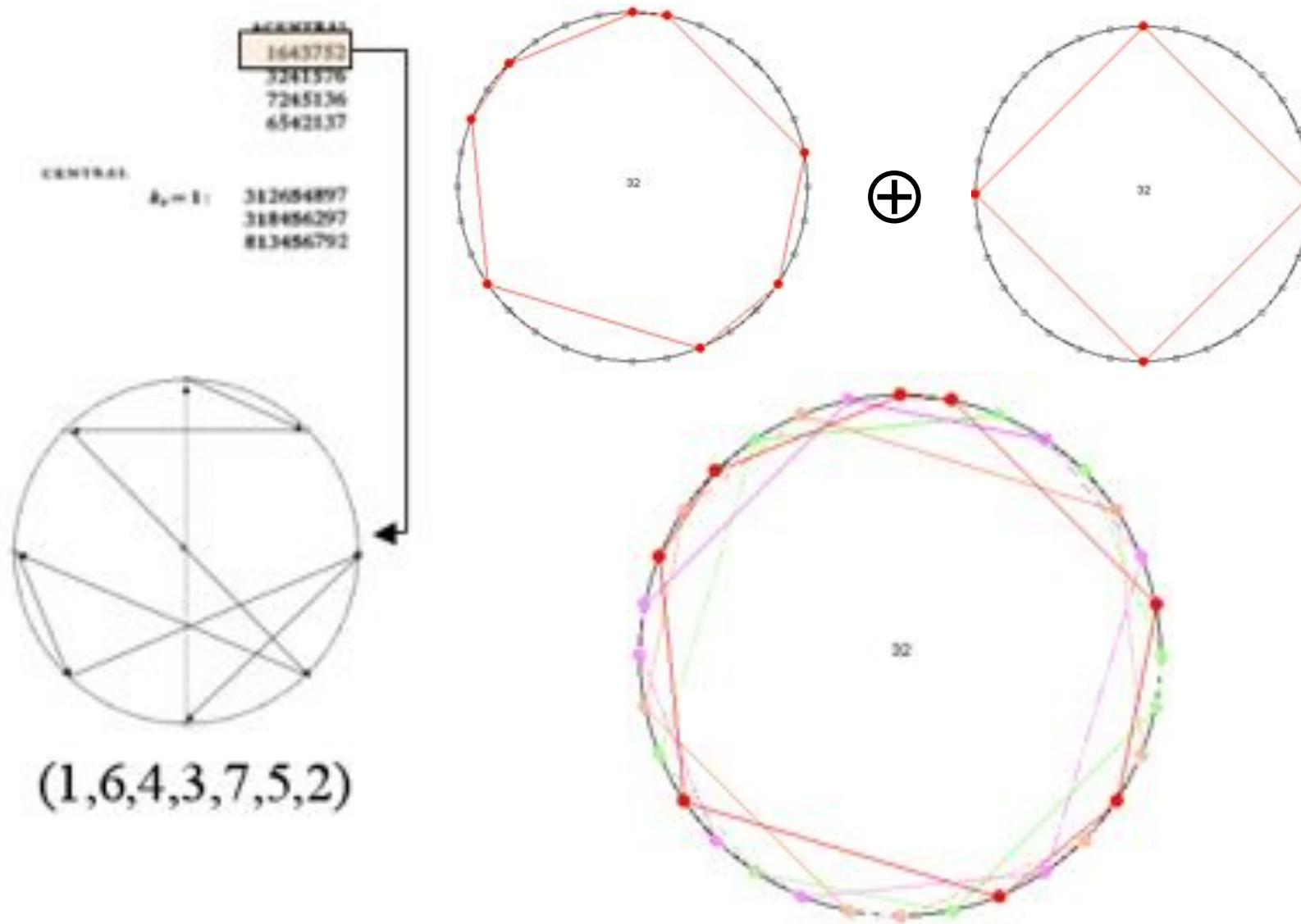
$S = \{0, 1, 3, 6, 7, 9, 8, 10, 11, 2, 4, 5\}$

$S^* = (1, 4, 3, 2, 5, 6, 7, 10, 9, 8, 11)$



Canons rythmiques mosaïques et séries tous-intervalles

Thorvald Ötterstrom, *A Theory of Modulation*, Chicago UP, 1935



n-asymmetric rhythmic pattern and tiling process

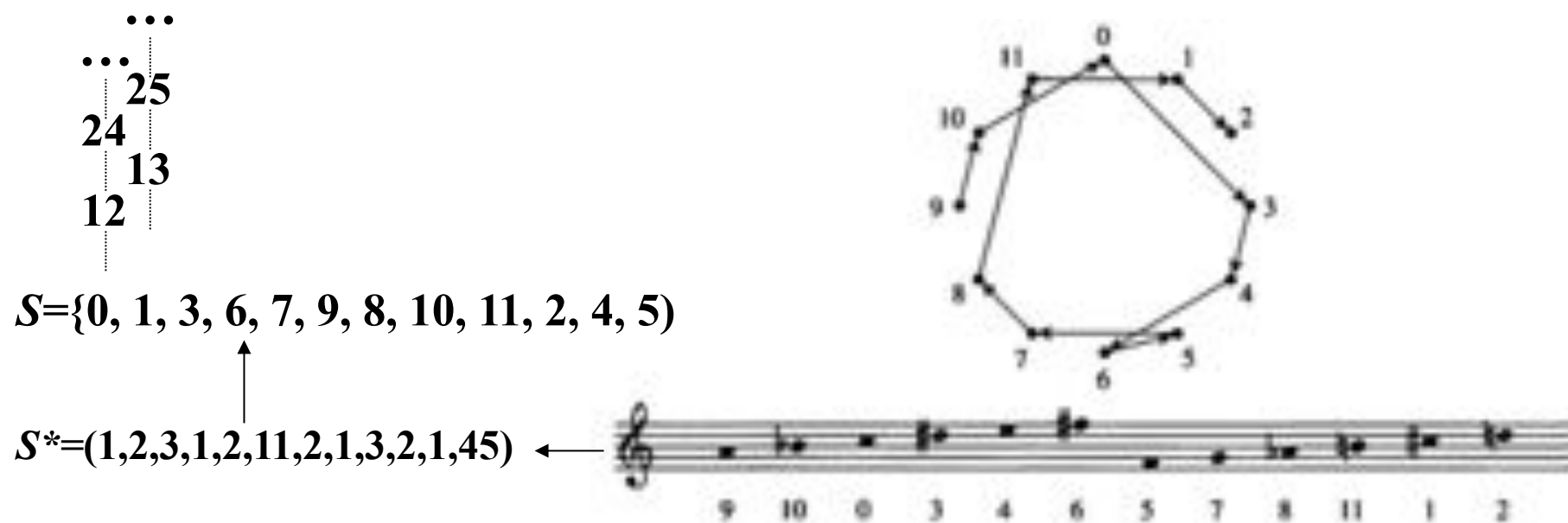
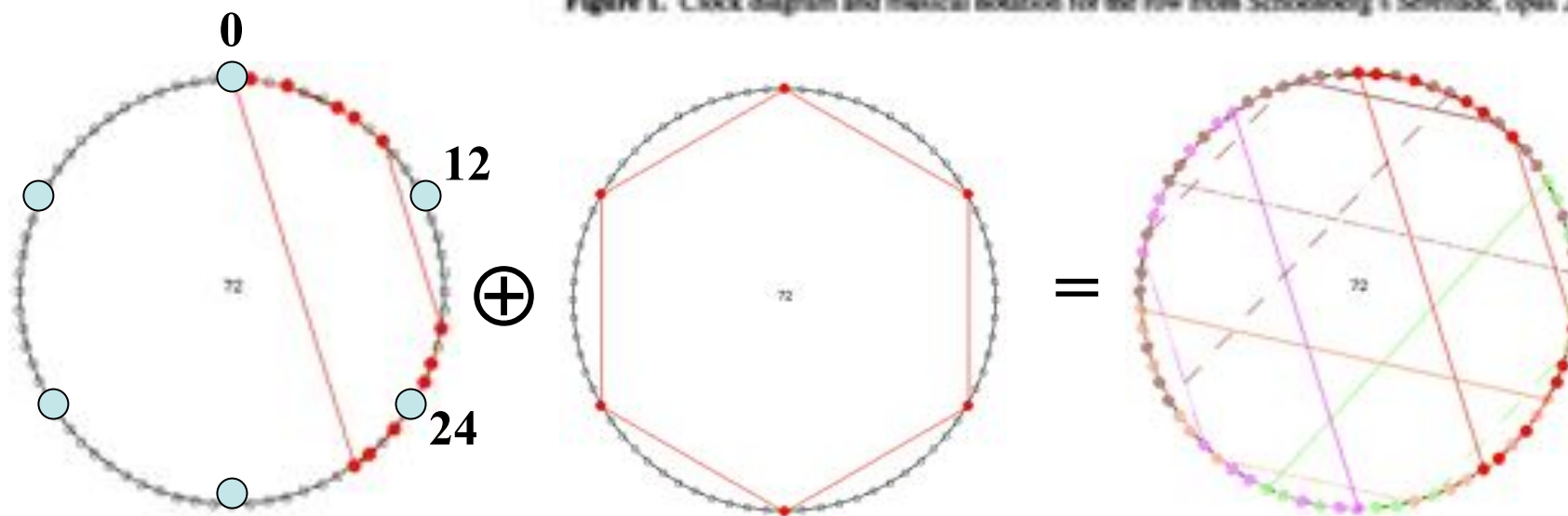
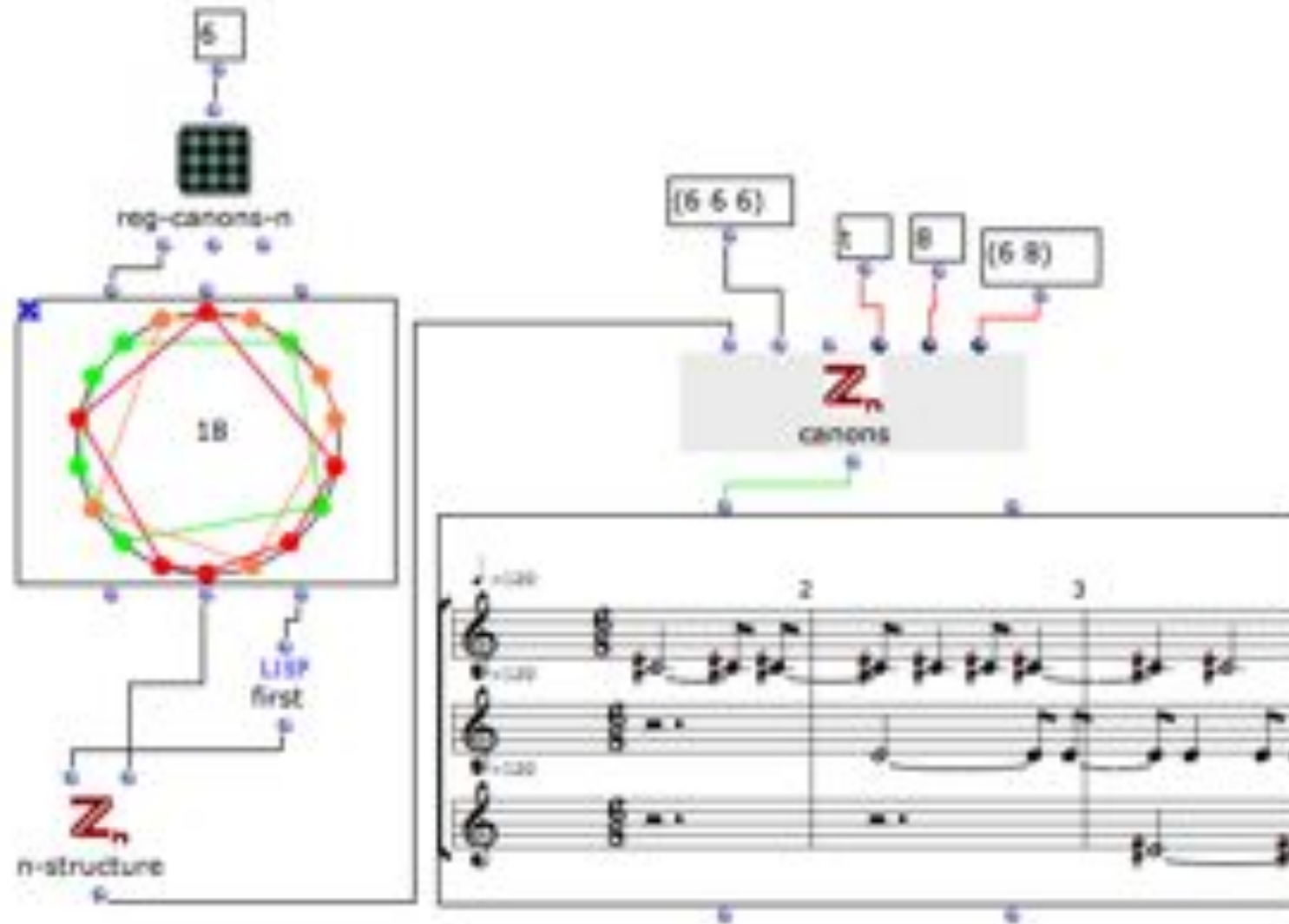


Figure 1. Clock diagram and musical notation for the row from Schoenberg's Serenade, opus 24, movement 5.



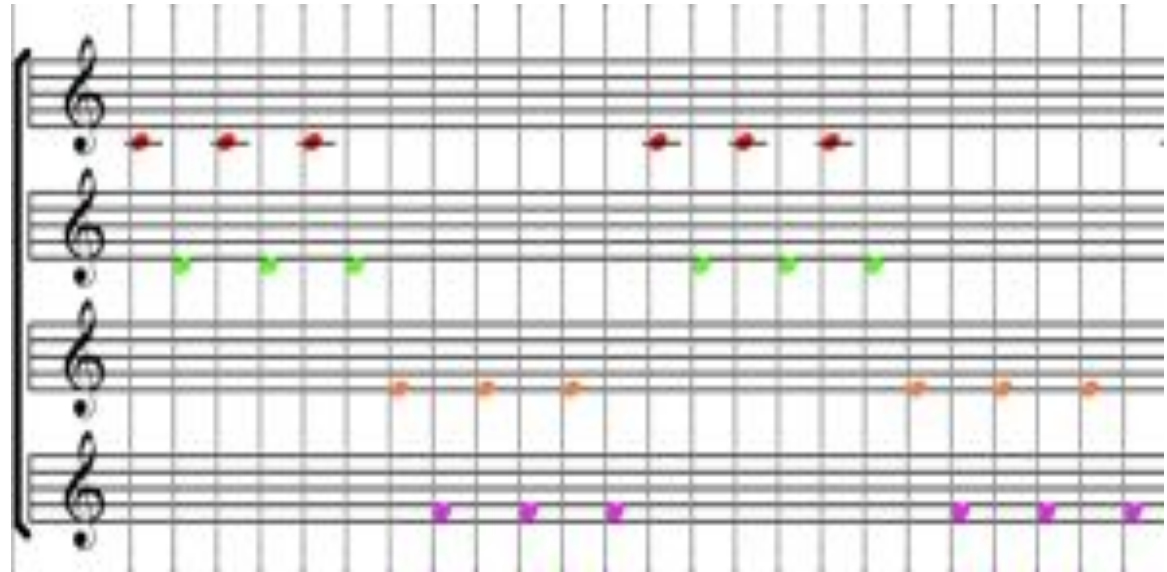
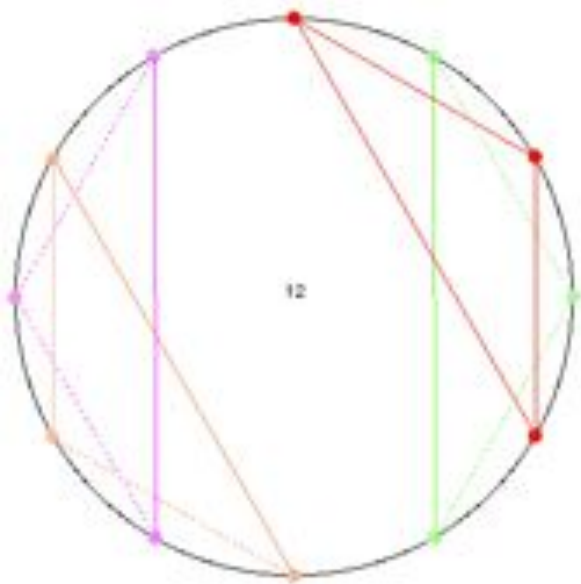
Pattern 8-asy m trique

n-asymmetric rhythmic pattern and tiling process



16-k-asymmetry-canon

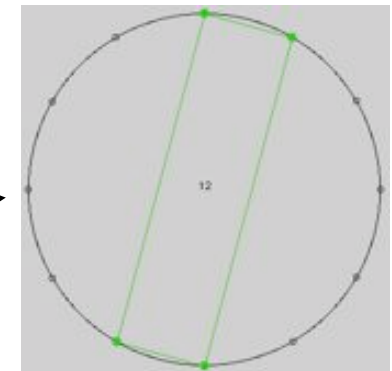
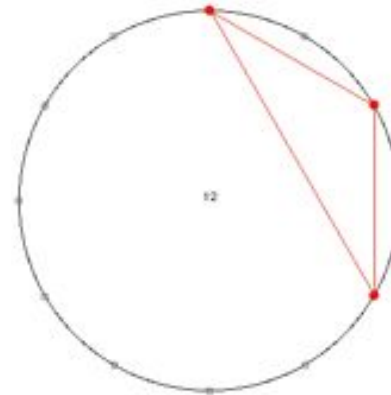
Canons mosaïques avec symétrie transpositionnelle



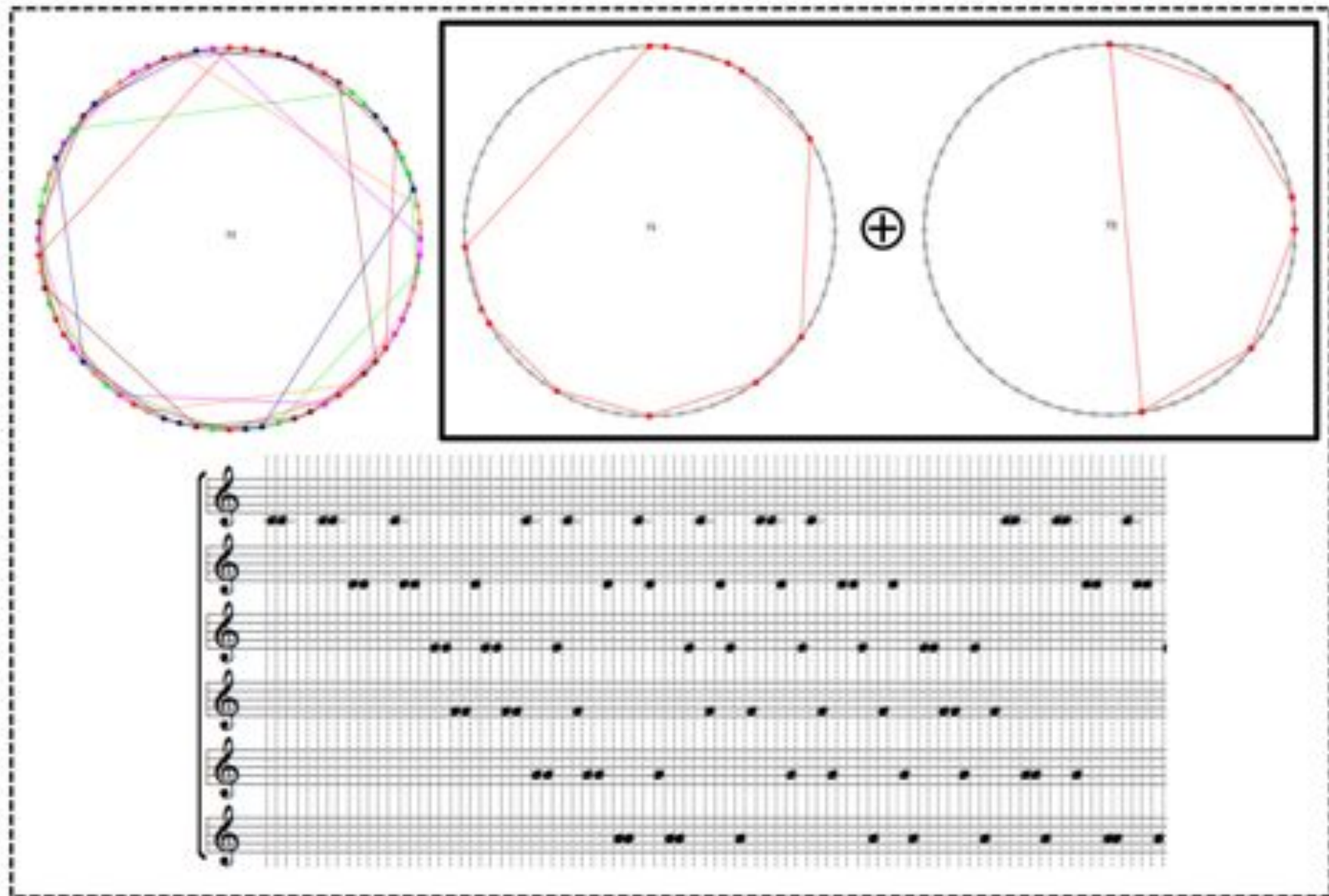
$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} = \{0, 2, 4\}$$

$$\mathbf{B} = \{0, 1, 6, 7\}$$

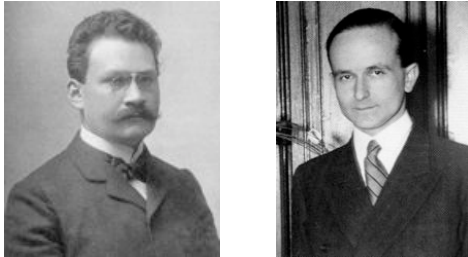


Factorisations sans périodicité interne (canons de Vuza)

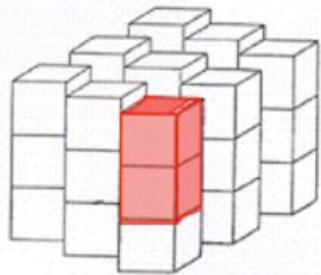


Les canons mosaïques comme problème « mathémusical »

Le problème de Minkowski/Hajos



Dans un pavage simple [*simple lattice tiling*] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.



1907-1942

Les canons mosaïques de Vieru/Vuza



Un canon de Vuza est une factorisation d'un groupe cyclique en somme directe de deux sous-ensembles non-périodiques

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = R \oplus S$$



1991

Lien entre Minkowski et Vuza (Andreatta, 1996)

Groupes de Hajós (*good groups*)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \in \{p^\alpha, p^\alpha q, pqr, p^2q^2, p^2qr, pqrs\}$ où p, q, r, s , sont des nombres premiers distincts



Groupes non-Hajós (*bad groups*)

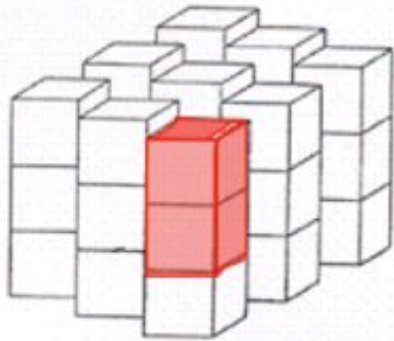
72
 108 120 144 168 180
 200 216 240 252 264 270 280 288
 300 312 324 336 360 378 392 396
 400 408 432 440 450 456 468 480
 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
 800 810 816 828 864 880 882 888...



1996

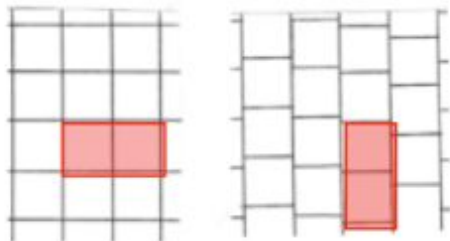
M. Andreatta, « Constructing and Formalizing Tiling Rhythmic Canons: a historical Survey of a “Mathemusical” Problem », invited paper, Special Issue « Tiling Problems in Music », *Perspectives of New Music*, J. Rahn (ed.), University of Washington, Seattle (2011).

De la Conjecture de Minkowski aux groupes de Hajos



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.



(Cf. S. Stein, S. Szabó : *Algebra and Tiling*, 1994)

Théorème de Hajós (1942)

Soit G un groupe abélien fini et soient a_1, a_2, \dots, a_n n éléments de G . Si l'on suppose que le groupe admet comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_1 \dots A_n$

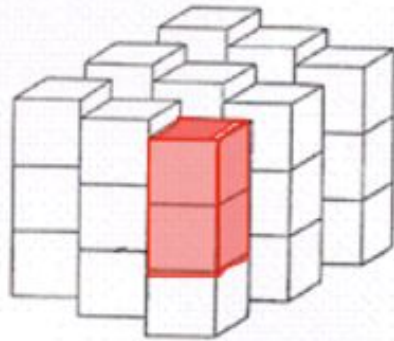
$$A_1 = \{1, a_1, \dots, a_1^{m_1-1}\}, A_2 = \{1, a_2, \dots, a_2^{m_2-1}\}, \dots, A_n = \{1, a_n, \dots, a_n^{m_n-1}\}$$

avec $m_i > 0$ pour tout $i=1, 2, \dots, n$, alors un des A_i est un groupe

Groupes de Hajos (good groups)

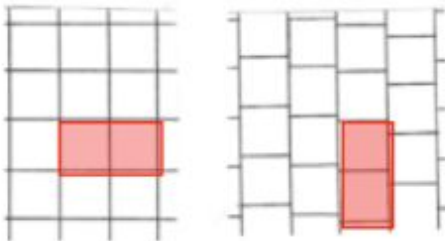
Rédei 1947	(p, p)	Sands 1962	$(p, 3, 3)$
Hajós 1950	\mathbb{Z}		$(p, 2^2, 2)$
De Bruijn 1953	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n=p^\alpha$		$(p, 2, 2, 2, 2)$
	(p^α, q)		$(p^2, 2, 2, 2)$
	(p, q, r)		$(p^3, 2, 2)$
Sands 1957	(p^2, q^2)		$(p, q, 2, 2)$
	(p^2, q, r)		
	(p, q, r, s)	Sands 1964 Q	$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
Sands 1959	$(2^2, 2^2)$		$\mathbb{Q} + \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
	$(3^2, 3)$		
	$(2^n, 2)$		

Quelques versions faibles de la conjecture de Minkowski



Conjecture de Minkowski (1896/1907)

Dans un pavage simple [simple lattice tiling] d'un espace à n dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$.



- *Les quatre conditions de la Conjecture de Minkowski*
 - [1] Les cubes sont tous obtenus par translation
 - [2] Les vecteurs de translations forment un réseau [lattice]
 - [3] Les parties internes des cubes sont disjointes
 - [4] Tout point de l'espace qui n'est pas dans le bord d'un cube est contenu exactement dans un cube

- *Conjecture de Keller (1930) = Minkowski – [2]*
 - Vraie pour $n \leq 6$ (Perron, 1940)
 - Fausse pour $n \geq 10$ (Lagarias et Shor, 1992)
 - Fausse pour $n=8$ et $n=9$ (Mackey, 2000)
 - Ouverte pour $n=7$

- *Conjecture de Furtwangler = Minkowski – [3 et 4] + nouvelle condition :*
 - [4'] Tout point de l'espace qui n'est pas dans le bord de chaque cube est contenu dans exactement k cubes
 - La conjecture est vraie ssi $n \leq 3$ (Hajos 1941)

- *Conjecture semi-périodique de Hajos (1950) : toute factorisation d'un groupe $G = A+B$ est semipériodique i.e. $B=B_1, \dots, B_m$ et s'il existe un sousgroupe $G'=\{g_1, \dots, g_m\}$ telle que $A+B_i=g_i+A+B_1$.*

Groupes non Hajós et Canons de Vuza

Groupes non-Hajós (bad groups)

72
 108 120 144 168 180
 200 216 240 252 264 270 280 288
 300 312 324 336 360 378 392 396
 400 408 432 440 450 456 468 480
 500 504 520 528 540 552 560 576 588 594
 600 612 616 624 648 672 675 680 684 696
 700 702 720 728 744 750 756 760 784 792
 800 810 816 828 864 880 882 888...

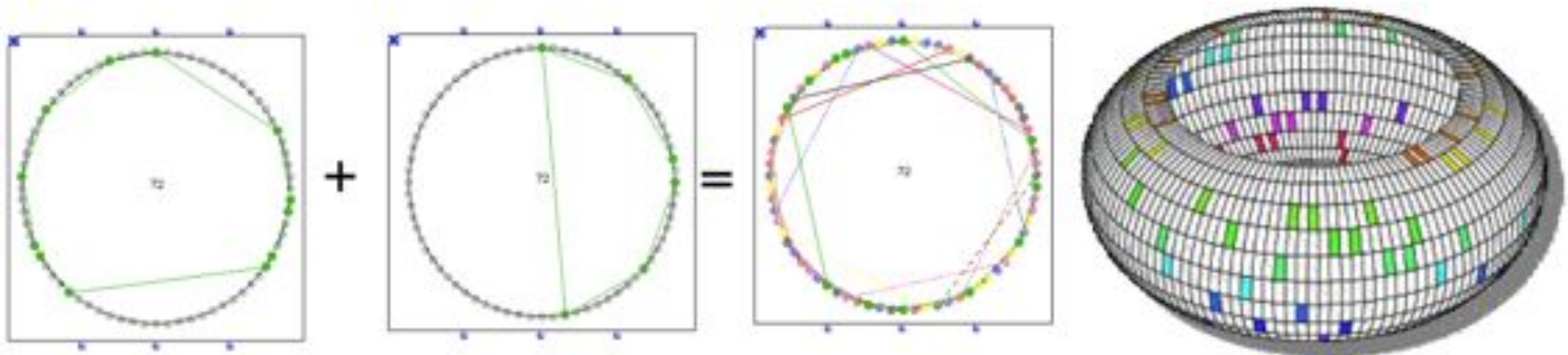
Groupes Hajós (good groups)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec

$n \in \{p^\alpha, p^\alpha q, pqr, p^2q^2, p^2qr, pqrs\}$

où p, q, r, s , sont des nombres premiers distincts

Problème ouvert : Trouver un algorithme qui permet d'obtenir toutes les factorisations d'un groupe cyclique non-Hajós en somme directe de deux sous-ensembles non périodiques (i.e. classifier tous les Canons de Vuza).



Factorisations sans périodicité interne (canons de Vuza)

