Algorithme de Vuza (PNM)

1. $(n,m)=1$ (i.e., n and m are relatively prime);
2. $n=n_1 n_2, m=m_1 m_2$;
3. n_1, n_2, m_1, m_1, k are all greater than 1.

In order to apply the construction proposed by de Bruijn to $72=n\cdot m\cdot k$ $=4\cdot 9\cdot 2$, one needs the following subsets:

1. $R_k=\mathbf{Z}_N/k\mathbf{Z}_N$ (i.e., $R_k=0,1,2,\ldots,k-1$, for every $k\in N$) ;
2. $C_1=k_n n_1 R_{n_2} \oplus k_{n_1 n_2 m_1} \mathbf{Z}_N$;
3. $C_2=k_{m_1} R_{m_2} \oplus k_{m_1 m_2 n_1} \mathbf{Z}_N$.

Since $n_1=n_2=2$ and $m_1=m_2=3$, one obtains the following factorization of $\mathbf{Z}/72\mathbf{Z}$ into non-periodic subsets S and T:

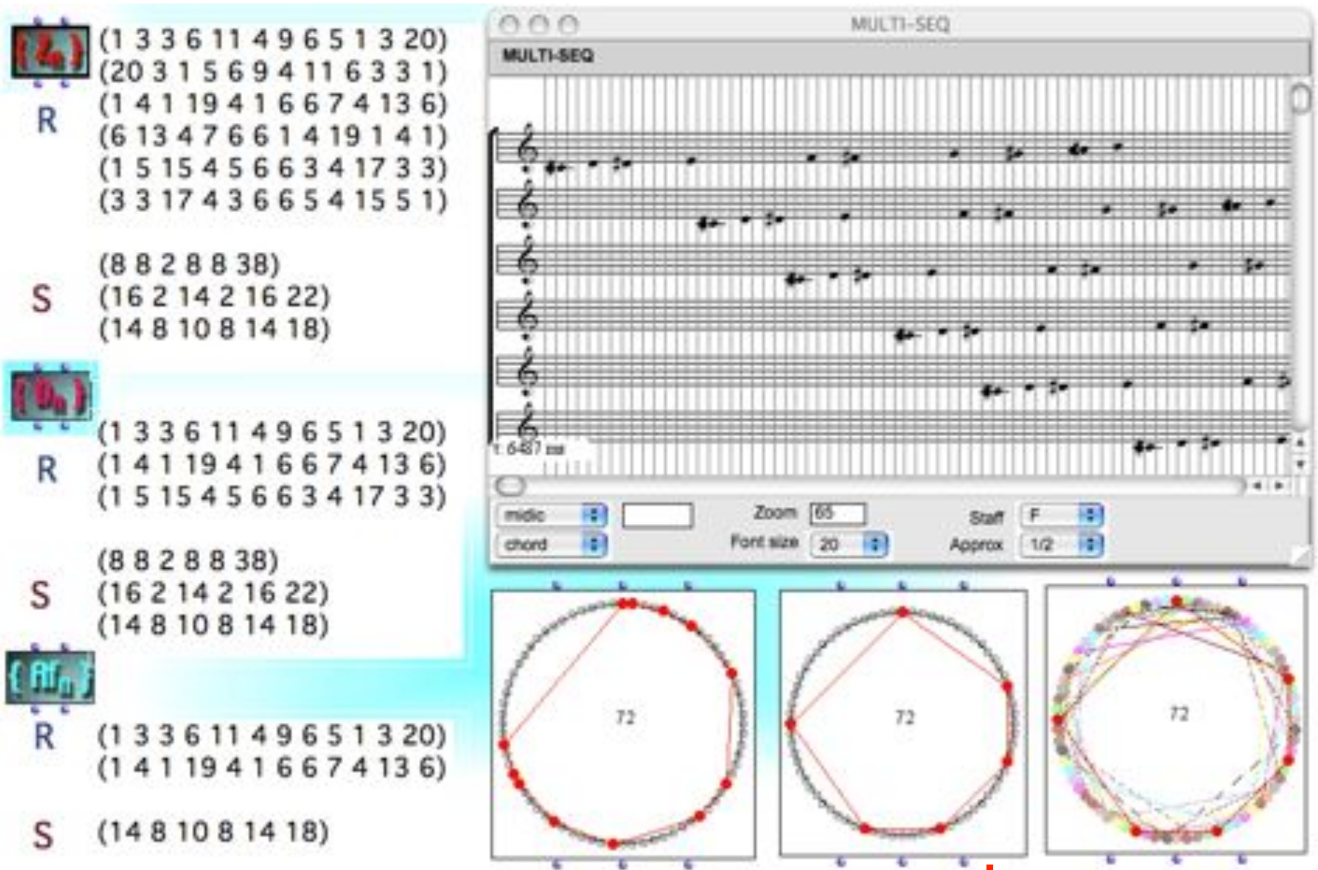
$$\begin{aligned}
S &= C_2 \cup \{1,2,\ldots,k-1\} \oplus C_1 \\
&= k_{m_1} R_{m_2} \oplus k_{m_1 m_2 n_1} \mathbf{Z}_N \cup \{1,2,\ldots,k-1\} \oplus k_{n_1} R_{n_2} \oplus k_{n_1 n_2 m_1} \mathbf{Z}_N \\
&= 6\{0,1,2\} \oplus 36\mathbf{Z}/72\mathbf{Z} \cup \{1\} \oplus 4\{0,1\} \oplus 24\mathbf{Z}/72\mathbf{Z} \\
&= \{0,6,12,36,42,48\} \cup \{1\} \oplus \{0,4,24,28,48,52\} \\
&= \{0,1,5,6,12,25,29,36,42,48,49,53\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T &= k_{m_1 m_2} R_{n_1} \oplus k_{n_1 n_2} R_{m_1} \\
&= 18\{0,1\} \oplus 8\{0,1,2\} \\
&= \{0,8,16,18,26,34\}
\end{aligned}$$

Classification « paradigmatique » des canons mosaïques de Vuza

**Résultat : uniquement deux « types » de canons différents (à une *transformation affine* près, i.e.
$f : Z_{72} \rightarrow Z_{72}$ t.q.
$f(x)=ax+b$ avec $a \in (Z_{72})^*$ et $b \in Z_{72}$**

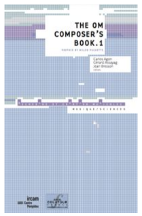
- **R. Tijdeman: "Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets", *Number Theory*, Cambridge University Press, 1995.
The fundamental Lemma: *R* pave Z_n => *aR* pave Z_n
$<a,n>=1$**



$Z/72Z = R \oplus S$

1999

Collection « Musique/ Sciences » (dir. J.-M. Bardez & <u>M. Andreatta</u>)

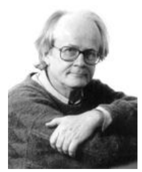




F. Lévy


G. Bloch


M. Lanza

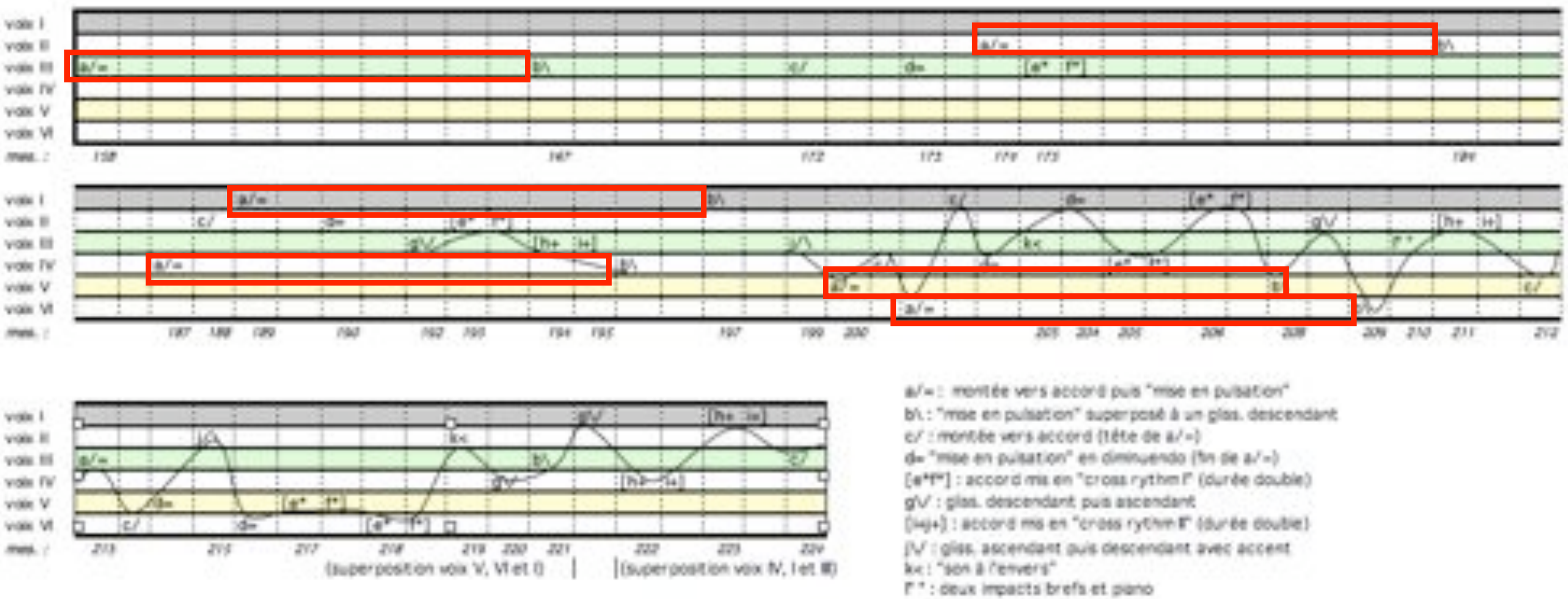

T. Johnson


18-Catalogue-Z72

Fabien Lévy

Première utilisation des canons de Vuza

- *Coïncidences* (pour 33 musiciens, 1999-2007)



Coïncidences - Fabien Levy : déroulement du canon (mes. 158 à 226)
(chaque impact fait 3 temps)

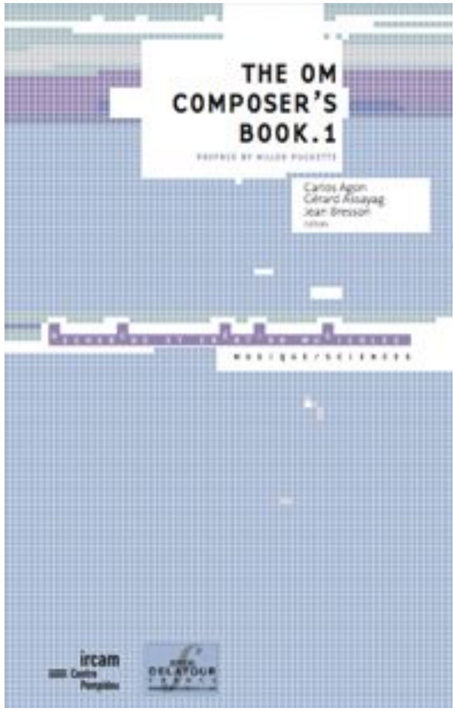
Interprètes : Tokyo Symphony Orchestra, Dir.: Kazuyoshi Akiyama, 05/09/2007, Suntory Hall, Tokyo, Japon

Georges Bloch

Stratégies compositionnelles à partir d'un modèle formel

- **Organisation métrique d'un canon mosaïque**
- **Réduction d'un canon par auto-similarité**
- **Modulation métrique entre canons**
- **Transformation d'un canon dans une texture**
- **Canons mosaïques et IAO (*OMax*)**

- ***Projet Beyeler* (2001)**
- ***Projet Hitchcock***
- ***Visite des tours de la cathédrale de Reims***
- ***Noël des Chasseurs***
- ***Canons à marcher***
- ***Canon à eau***
- ***Harawun* (2004)**
- ***L'Homme du champ* (2005)**
- ***A piece based on Monk* (2007)**
- ***Peking Duck Soup* (2008)**



- ***A piece based on Monk* (2007) (« Well You Need'nt »)**

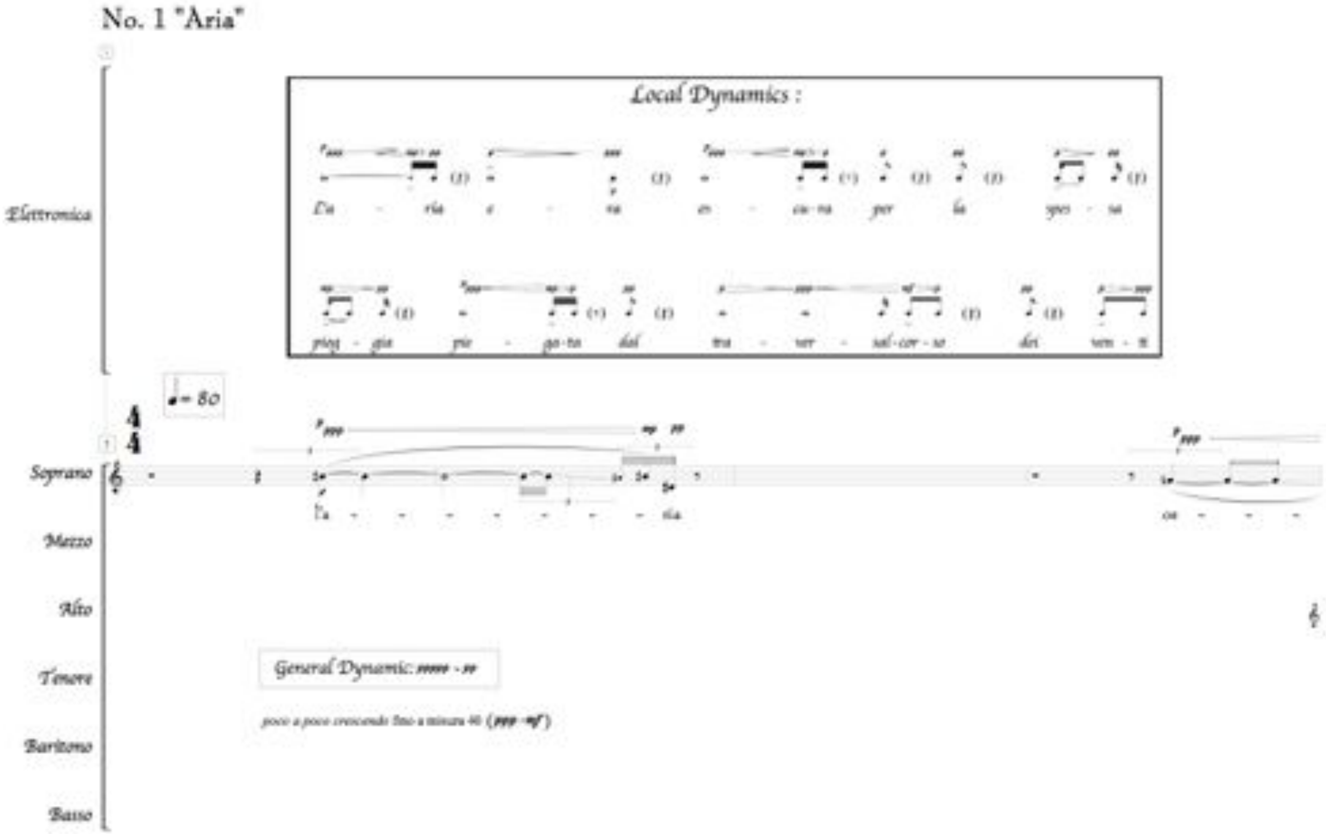
Mauro Lanza

Canons de Vuza et périodicités locales

• *La descrizione del diluvio* (Ricordi, 2007-2008)

Canon à 14 voix sur le pattern rythmique :

(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)



6 voix sont en live et 8 dans l'électronique. L'unité est la double-croche de triolet. Le choix des notes et des durées est fait en cherchant à souligner certaines ***quasi-périodicités*** *du canon de Vuza, et cela donne à chaque voix un caractère beaucoup plus "redondant".*

Mauro Lanza

Canons de Vuza et périodicités locales

• *La descrizione del diluvio* (Ricordi, 2007-2008)

[…] Le choix des notes et des durées est fait en cherchant à souligner certaines quasi-périodicités du canon de Vuza, et cela donne à chaque voix un caractère beaucoup plus "redondant".

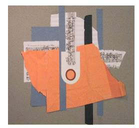
(1 3 25 27 1 3 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 1 3 25 27 1 3 52)

(<u>*1 3 25 27 1 3*</u> 11 14 27 1 3 25 27 4 25 27 1 3 25 14 13 <u>*1 3 25 27 1 3*</u> 52)

(<u>*1 3 25 27*</u> 1 3 11 14 27 <u>*1 3 25 27*</u> 4 25 27 1 3 25 14 13 <u>*1 3 25 27*</u> 1 3 52)

(<u>*1 3 25*</u> 27 1 3 11 14 27 <u>*1 3 25*</u> 27 4 25 27 <u>*1 3 25*</u> 14 13 <u>*1 3 25*</u> 27 1 3 52)

(<u>*1 3*</u> 25 27 <u>*1 3*</u> 11 14 27 <u>*1 3*</u> 25 27 4 25 27 <u>*1 3*</u> 25 14 13 <u>*1 3*</u> 25 27 <u>*1 3*</u> 52)

➔ 

19-mauro-diluvio

Conjecture spectrale et problème de Minkowski/Hajos

La conjecture de Fuglede

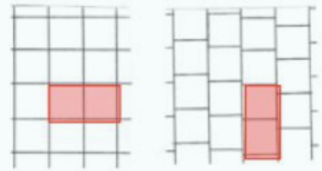
Un sous-ensemble de R*ⁿ* pave par translation *ssi* il est spectral (i.e. il admet une décomposition hilbertienne d'exponentiels complexes)

***J. Func. Anal.* 16, 1974.**

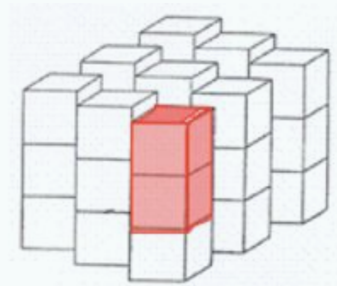
Fausse en dim. *n*≥3
Ouverte en dim. 1 et 2

?

Le problème de Minkowski/Hajos



Dans un pavage simple [*simple lattice tiling*] d'un espace à *n* dimensions par des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension *n*-1.



DEFINITION 6 *A subset A of some vector space (say $\mathbb{R}^n$) is spectral iff it admits a Hilbert base of exponentials, i.e. if any map $f \in L^2(A)$ can be written*

$$f(x) = \sum f_k \exp(2i\pi\lambda_k.x)$$

for some fixed family of vectors $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ where the maps $e_k : x \mapsto \exp(2i\pi\lambda_k.x)$ are mutually orthogonal (i.e. $\int_A \overline{e_k} e_j = 0$ whenever $k \neq j$).

(M. Andreatta et C. Agon, eds 2009)

Les conjectures de Minkowski/Fuglede et les canons rythmiques

- Minkowski's conjecture and Hajos algebraic solution
- The classification of Hajos groups (Hajos, de Bruijn, Sands, …) and polynomial representations (Redei)
- Vuza Canons and their enumeration (Vuza, Fripertinger, …)
- The « Foundamental Lemma » in group factorization (Tijdeman)
- Classification of factorizations for non-Hajos groups (Vuza, Andreatta, Agon, Amiot, Fripertinger, …)
- Computational model (Andreatta, Agon, Amiot, Noll, Jedrzejewski…)
- The Tiling of the line problem and Fuglede's Conjecture (Tijdeman, Lagarias, …)
- Link between C&M conditions and Fuglede Conjecture (Laba, Kolountzakis; …)
- Given a finite set that tiles **Z**, what will be the period (Kolountzakis, Steinberger, …)
- Fuglede's Conjecture and Vuza's Canons (Amiot, Matolcsi, Kolountzakis, …)
- …

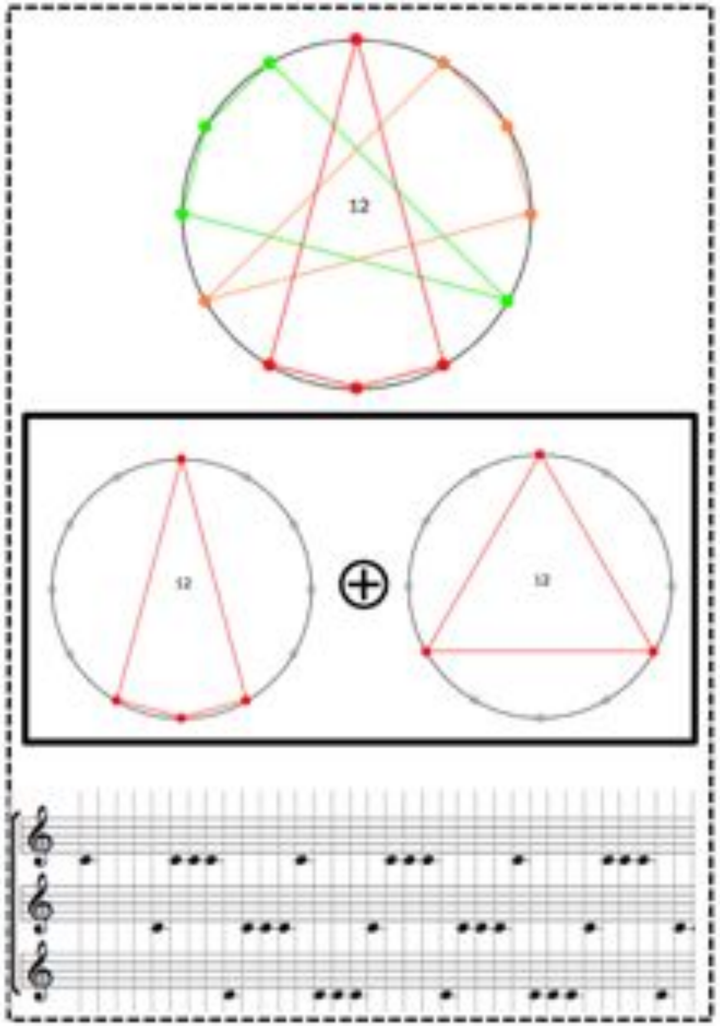
• R. Tijdeman: "Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets", *Number Theory*, Cambridge University Press, 1995. The fundamental Lemma:
A tiles $\mathbf{Z}_n$ => pA tiles $\mathbf{Z}_n$ when $<p,n>=1$

• I. Laba : "The spectral set conjecture and multiplicative properties of roots of polynomials", *J. Lond Math Soc*, 2002
T1 + T2 => spectral
T2 => spectral
spectral => T1

• E. Coven & A. Meyerowitz: "Tiling the integers with translates of one finite set", *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999
T1 + T2 => tile
Tile => T1

• E. Amiot : "A propos des canons rythmiques", *Gazette des Mathématiciens,* n°106, Octobre 2005.
if A tiles with period n and $\mathbf{Z}_n$ is Hajos
=> A has T2 (=> A is spectral)

Representation polynômiale



$$\mathrm{Z}_n \longleftrightarrow 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1}$$

$$A=\{0,5,6,7\} \longleftrightarrow A(X)=1 + X^5 + X^6 + X^7$$

$$B=\{0,4,8\} \longleftrightarrow B(X)=1 + X^4 + X^8$$

$$\boxed{\Delta_{12} = 1 + X + \ldots + X^{11} = A(X) \times B(X) \bmod X^{12}-1}$$

Racines de l'unité et polynomes cyclotomiques

Racines n-ièmes de l'unité : $z^n = 1$

$n=3 \longrightarrow \left\{1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

$n=4 \longrightarrow \{1, +i, -1, -i\}$

Le racines n-ièmes de l'unité peuvent s'écrire sous la forme :

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k, n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k < n)$$

Elles sont exactement les racines du polynôme : $P(X) = X^n - 1$

Le racines n-ièmes primitives de l'unité : $e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ $(n,k)=1$

Elles sont exactement les racines du polynôme cyclotomique :

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

Pavage de la ligne et polynômes cyclotomiques

$$\Phi_n(X) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (X - z_k) \longleftrightarrow X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

$\Phi_1(X) = X - 1 \longleftrightarrow$?

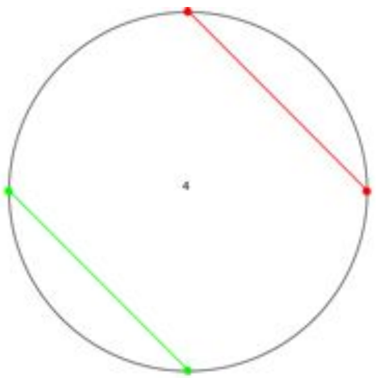
$\Phi_2(X) = 1 + X \longleftrightarrow \{0,1\}$

$\Phi_3(X) = 1 + X + X^2 \longleftrightarrow \{0,1,2\}$

$\Phi_4(X) = 1 + X^2 \longleftrightarrow \{0,2\}$

$\Phi_5(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \longleftrightarrow \{0,1,2,3,4\}$

$\Phi_6(X) = 1 - X + X^2 \longleftrightarrow$?



$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$$\Delta_4 = 1 + X + X^2 + X^3 = \Phi_2(X) \times \Phi_4(X)$$

$$A(x) \times B(x) = (A \oplus B)(x) \equiv 1 + x + \ldots x^{n-1} \pmod{X^n - 1}$$

Bonnes et mauvaises factorisations

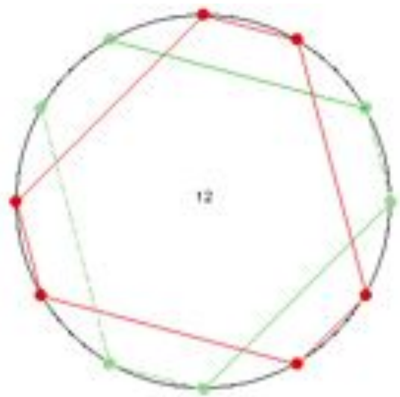
$$\Delta_n = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n\text{-}1} = \prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} \Phi_d(X)$$

$\Phi_2(X) = \quad 1 + X \longleftrightarrow (1, 1)$

$\Phi_3(X) = \quad 1 + X + X^2 \longleftrightarrow (1, 1, 1)$

$\Phi_4(X) = \quad 1 + X^2 \longleftrightarrow (1, 0, 1)$

$\Phi_6(X) = \quad 1 - X + X^2 \longleftrightarrow (1, -1, 1)$



$$\Delta_{12} = 1 + X + \ldots + X^{11} = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_4 \times \Phi_6 \times \Phi_{12}$$

$A(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 \times \Phi_{12} = 1 + X + X^4 + X^5 + X^8 + X^9$

$B(X) = \Phi_4 = 1 + X^2$

$S = \{0, 2\}$

$R = \{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$

Conditions de C& M

$\Phi_2(X) = \quad 1 + X$

$\Phi_3(X) = \quad 1 + X + X^2$

(T1) $A(1) = 6 = \Phi_2(1) \times \Phi_3(1) = 2 \times 3$

(T2) $\Phi_2 \mid A(X)$ **et** $\Phi_3 \mid A(X) \Rightarrow \Phi_{2\times 3} \mid A(X)$

Les conditions de Coven-Meyerowitz

• E. Coven & A. Meyerowitz : “Tiling the integers with translates of one finite set”, *J. Algebra*, 212, pp.161-174, 1999

There is no loss of generality in restricting attention to translates of a finite set A of *nonnegative* integers. Then $A(x) = \sum_{a \in A} x^a$ is a polynomial such that $\#A = A(1)$. Let S_A be the set of prime powers s such that the s-th cyclotomic polynomial $\Phi_s(x)$ divides $A(x)$. Consider the following conditions on $A(x)$.

(T1) $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$.

(T2) If $s_1, \ldots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \cdots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

Theorem A. *If $A(x)$ satisfies (T1) and (T2), then A tiles the integers.*

Theorem B1. *If A tiles the integers, then $A(x)$ satisfies (T1).*

Theorem B2. *If A tiles the integers and $\#A$ has at most two prime factors, then $A(x)$ satisfies (T2).*

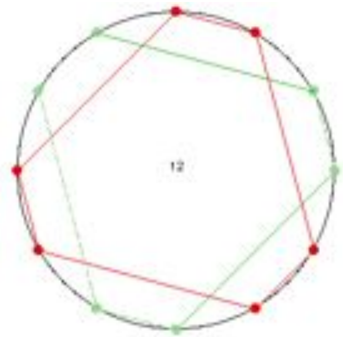
Corollary. *If $\#A$ has at most two prime factors, then A tiles the integers if and only if $A(x)$ satisfies (T1) and (T2).*

Les conditions de C&M, pavage et spectralité

(T1) $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$.
(T2) If $s_1, \ldots, s_m \in S_A$ are powers of distinct primes, then $\Phi_{s_1 \cdots s_m}(x)$ divides $A(x)$.

C&M (1999)

- T1 + T2 => pave
- pave => T1
- pave Z_n avec $n=p^\alpha q^\beta$ => T1 + T2



$$A^*(X) = \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_{12} = 1 + 2X + 2X^2 - X^3 - X^4 + X^5 + 2X^6 + X^7$$

$$A^*(1) = 7 \neq \Phi_2 \times (1) \times \Phi_3(1) = 6$$

Laba (2002)

- T1 + T2 => spectral
- T2 => spectral
- spectral => T1

Amiot (2009)

- pave avec périodicités internes => T2

La condition T2 est-elle nécessaire ?

Conjecture spectrale et canons de Vuza

La conjecture de Fuglede

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ pave par translation *ssi* il est spectral (i.e. il admet une décomposition hilbertienne d'exponentiels complexes)

J. Func. Anal. 16, 1974.

Fausse en dim. $n \geq 3$

Ouverte en dim. 1 et 2

Canons de Vuza de période n

- $n = p_1 p_2 n_1 n_2 n_3$
- $< p_1 n_1, p_2 n_2 > = 1$
- $n_3 > 1$

72

108 120 144 168 180

200 216 240 252 264 270 280 288

300 312 324 336 360 378 392 396

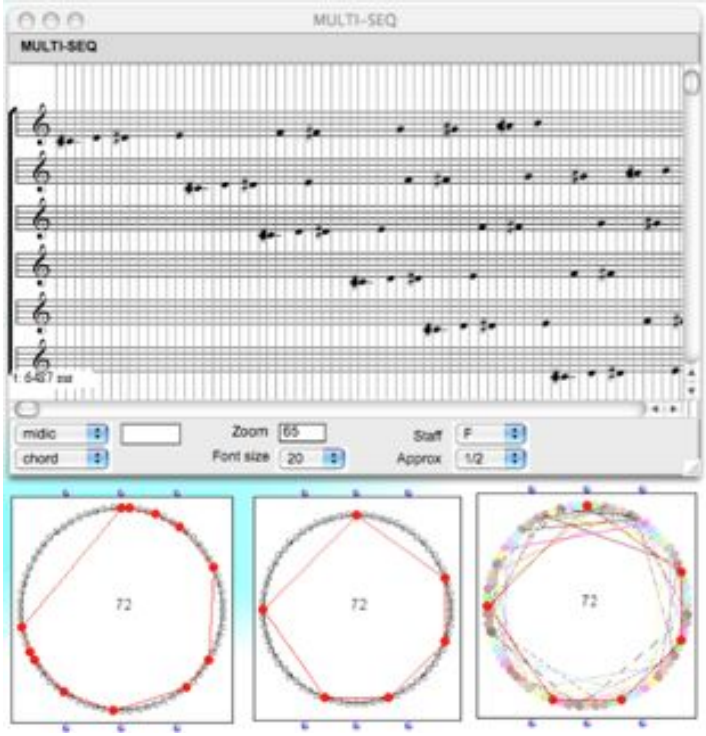
400 408 432 440 450 456 468 480

500 504 520 528 540 552 560 576 588 594

600 612 616 624 648 672 675 680 684 696

700 702 720 728 744 750 756 760 784 792

800 810 816 828 864 880 882 888…



Résultat (Amiot 2009) :
Si A pave mais il n'est pas spéctral
=> A est le rythme d'un canon de Vuza

Problème ouvert : Trouver un algorithme qui permet d'obtenir toutes le factorisations d'un groupe cyclique non-Hajos en somme directe de deux sous-ensembles non périodiques

Transformée de Fourier discrète et pavage

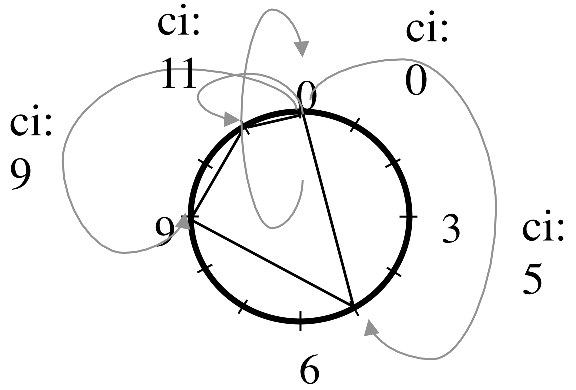
TILING

Let $Z_A = \{ t \in \mathbb{Z}_c, F_A(t)=0 \}$

A tiles $\mathbb{Z}_c$ when equivalently:

- There exists B, $A \oplus B = \mathbb{Z}_c$
- $1_A \star 1_B = 1$
- $F_A \times F_B(t) = 1 + e^{-2i\pi t/c} + \dots e^{-2i\pi t(c-1)/c}$ (0 unless t=0)
- $Z_A \cup Z_B = \{1,2 \dots c-1\}$ AND Card A $\times$ Card B = c
- $IC_A \star IC_B = IC(\mathbb{Z}_c)=c$ and Card A $\times$ Card B = c

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$



$A = \{0, 5, 9, 11\}$
$IC_A(k) = 1 \;\forall\; k = 1 \dots 11$

$$IC_A(k) = \mathrm{Card}\{(x,y) \in A \times A \mid x + k = y\}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

E. Amiot, « New Perspectives on Rhythmic Canons and the Spectral Conjecture », *Journal of Mathematics and Music*, 2009.

Homométrie et canons rythmiques mosaïques

Tiling

Let $Z_A = \{ t \in \mathbb{Z}_c, F_A(t)=0 \}$

A tiles $\mathbb{Z}_c$ when equivalently:

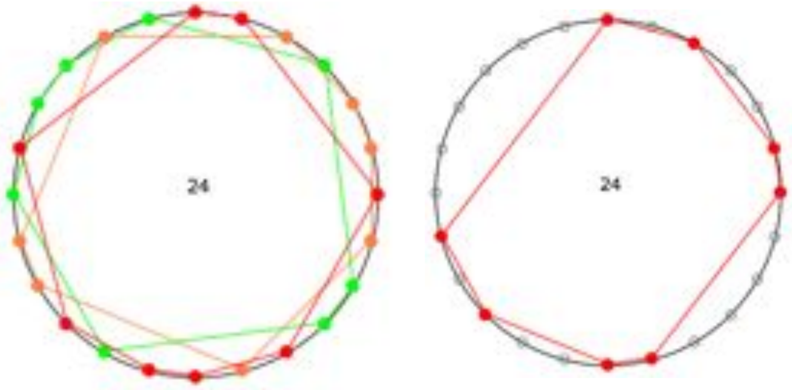
- There exists B, $A \oplus B = \mathbb{Z}_c$
- $1_A \star 1_B = 1$
- $F_A \times F_B\,(t) = 1 + e^{-2i\pi t/c} + \ldots\ e^{-2i\pi t(c-1)/c}$ (0 unless t=0)
- $Z_A \cup Z_B = \{1, 2 \ldots c-1\}$ AND Card A × Card B = c
- $IC_A \star IC_B = IC(\mathbb{Z}_c) = c$ and Card A × Card B = c

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

A musical offering:

- ***Theorem***:
  If A tiles with B and A' has the same IC, then A' tiles with B, too.



E. Amiot, « New Perspectives on Rhythmic Canons and the Spectral Conjecture », *JMM*, 2009.

Pavages et homométrie

TILING

Let $Z_A = \{ t \in \mathbb{Z}_c, F_A(t)=0 \}$

A tiles $\mathbb{Z}_c$ when equivalently:

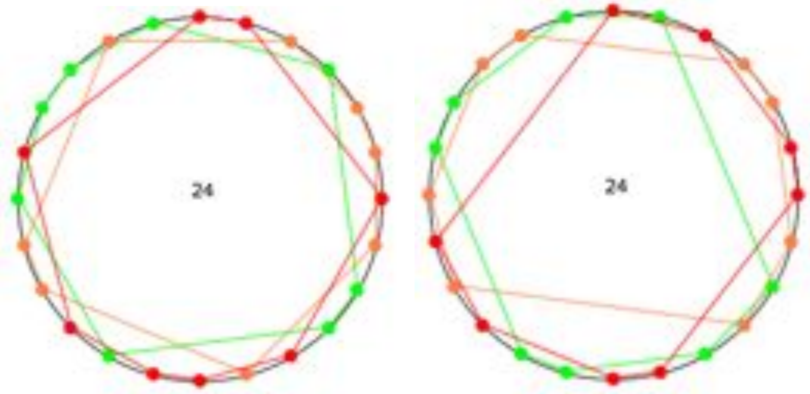
- There exists B, $A \oplus B = \mathbb{Z}_c$
- $1_A \star 1_B = 1$
- $F_A \times F_B(t) = 1 + e^{-2i\pi t/c} + \dots e^{-2i\pi t(c-1)/c}$ (0 unless t=0)
- $Z_A \cup Z_B = \{1,2 \dots c-1\}$ AND Card A × Card B = c
- $IC_A \star IC_B = IC(\mathbb{Z}_c)=c$ and Card A × Card B = c

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k\in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

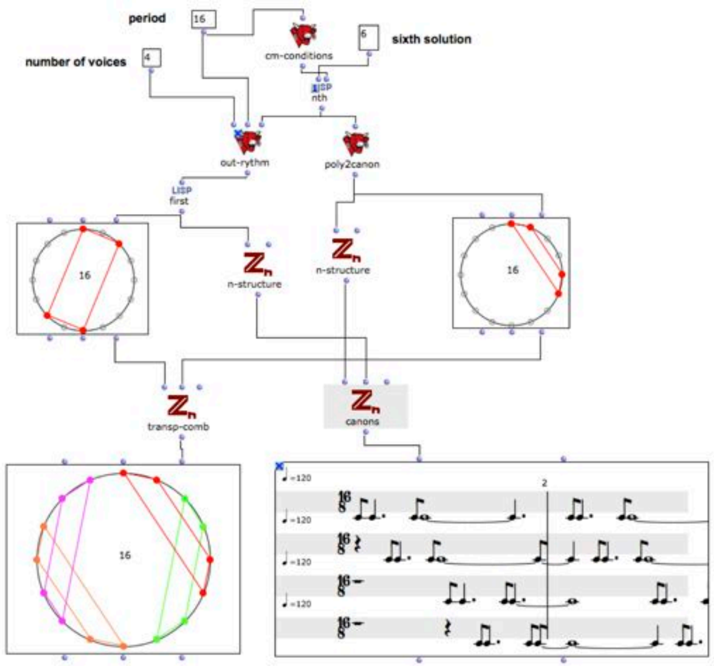
A musical offering:

- ***Theorem***:
 If A tiles with B and A' has the same IC, then A' tiles with B, too.



E. Amiot, « New Perspectives on Rhythmic Canons and the Spectral Conjecture », *JMM*, 2009.

La famille des « canons cyclotomiques »

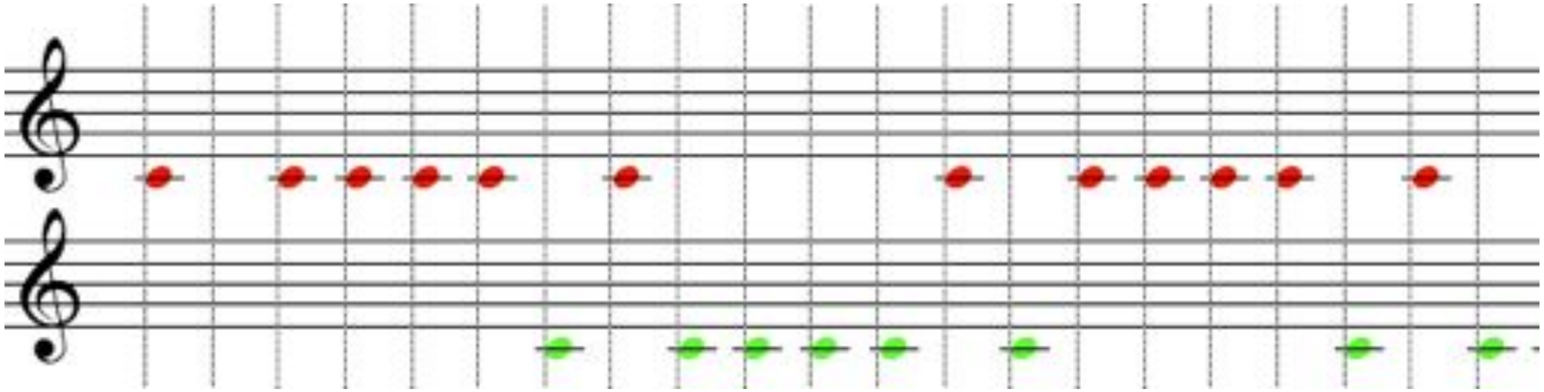


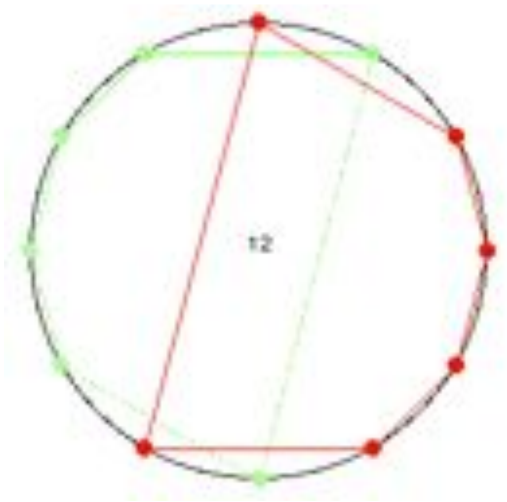
• E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon, « Tiling the (musical) line with polynomial: some theoretical and implementational aspects », *ICMC*, Barcelona, 2005, 227-230
• C. Agon, M. Andreatta, «Modelling and Implementing Tiling Rhythmic Canons in OpenMusic Visual Programming Language », Perspectives of New Music, Special Issue, vol. 1-2, n° 49.

➔ 

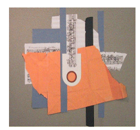
20-Canons-Cyclo

Canons mosaïques par translation et augmentation





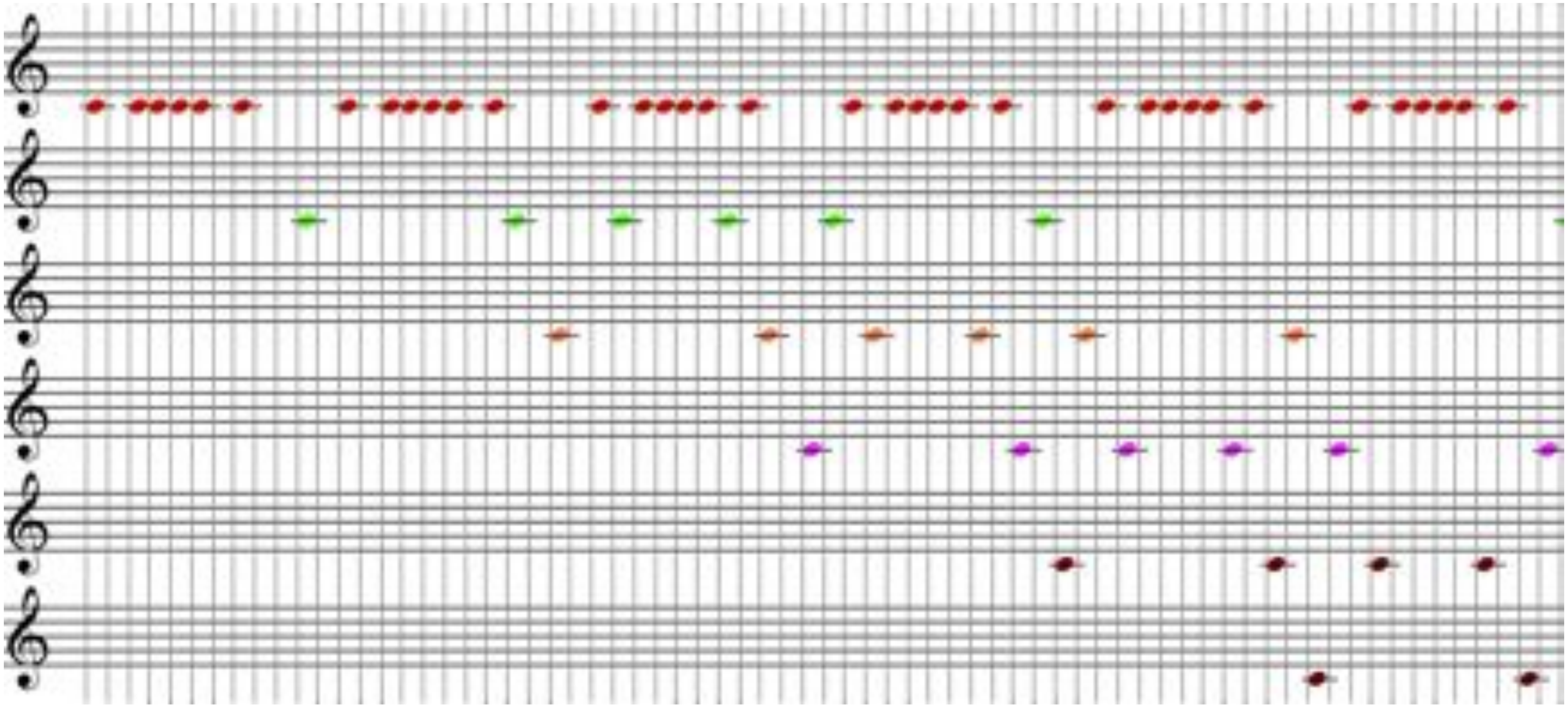
```
(((0 1 2 3 4 6) ((1 11)))
((0 1 2 3 4 5) ((1 11) (1 1)))
((0 1 2 3 5 7) ((1 11) (1 7)))
((0 1 3 4 7 8) ((1 5)))
((0 1 2 3 6 7) ((1 11)))
((0 1 3 4 6 9) ((1 11) (1 5)))
((0 1 3 6 7 9) ((1 11) (1 5)))
((0 1 2 6 7 8) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1)))
((0 1 4 5 8 9) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1)))
((0 1 2 5 6 7) ((1 7) (1 5)))
((0 2 3 4 5 7) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1)))
((0 1 4 5 6 8) ((1 11) (1 7)))
((0 1 2 4 5 7) ((1 5)))
((0 1 3 4 5 8) ((1 5) (1 1)))
((0 1 2 4 5 8) ((1 11)))
((0 1 2 4 6 8) ((1 11) (1 7)))
((0 2 3 4 6 8) ((1 11)))
((0 2 4 6 8 10) ((1 11) (1 7) (1 5) (1 1))))
```



21-Augmented-Canons

Augmented Tiling Canons ou l'action du groupe affine

(en collaboration avec Thomas Noll)



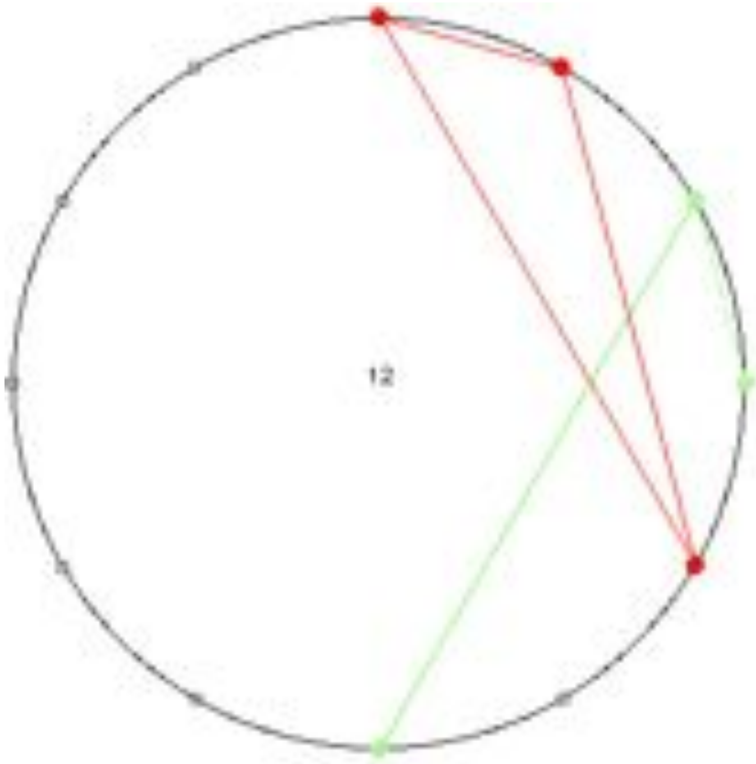
➔ 

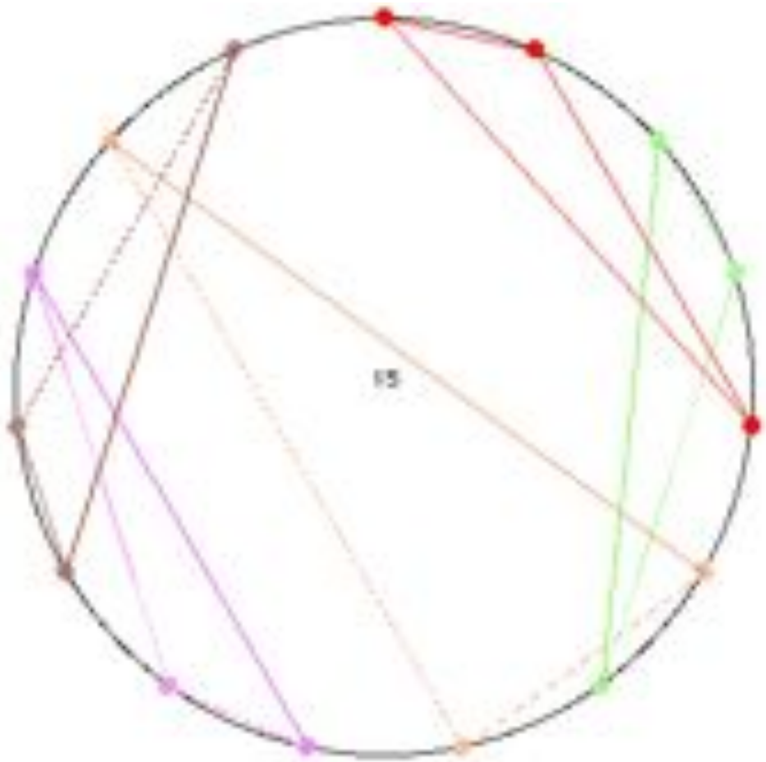
22-Augmented-Canons

Tiling the line and/or circle with augmentations

- **Tom Johnson (2001): tiling the line with a given rhythmic pattern**
  - **ex. (0 1 4). Does it tile? With augmentations? With which period?**

• Theorem (Amiot, 2002) : ***Any tiling of the line with the pattern* (0 1 4) *and its augmentations is periodic and the period is equal to a multiple of 15***



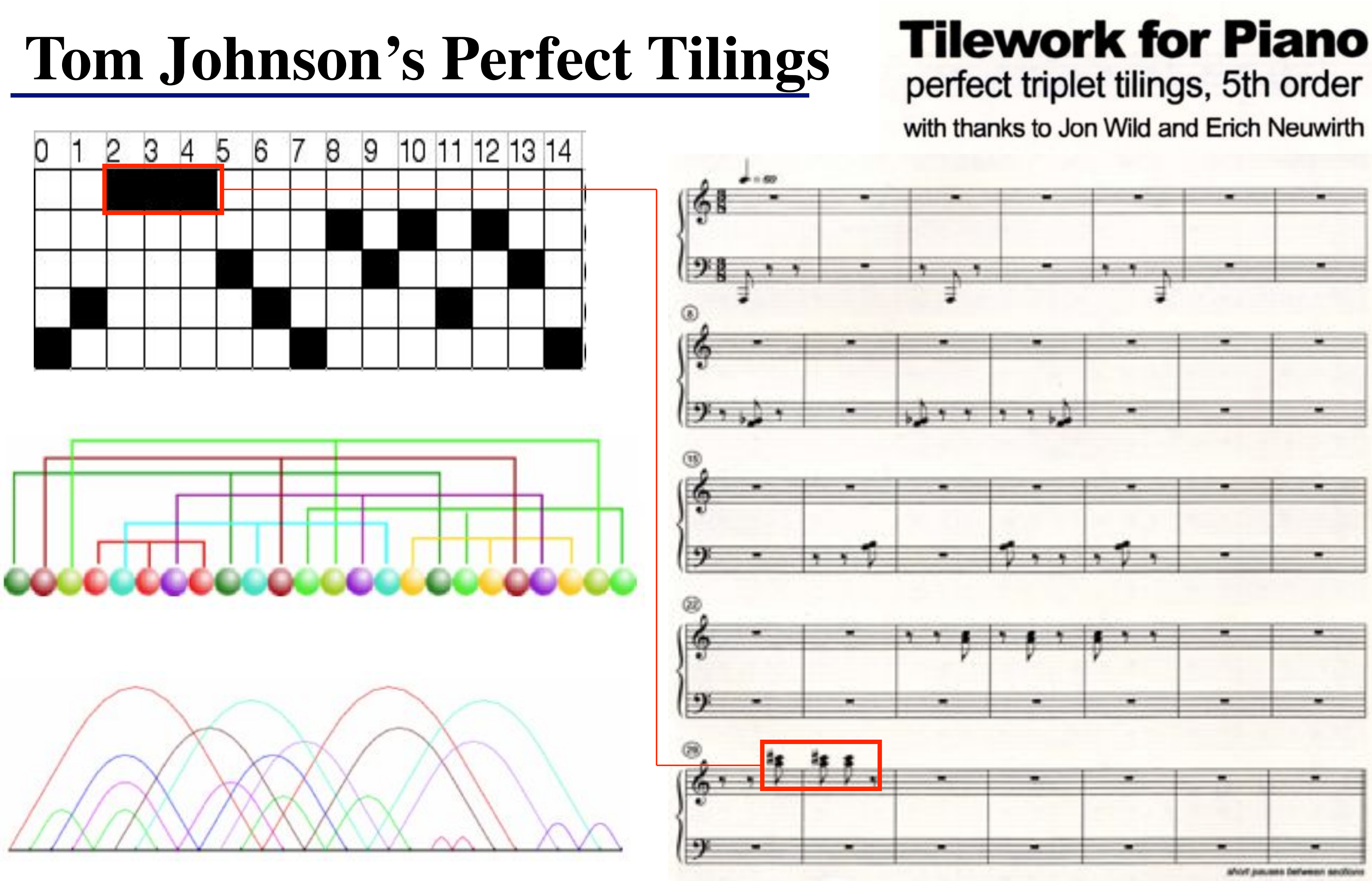


***n* = 12**

***n* = 15**

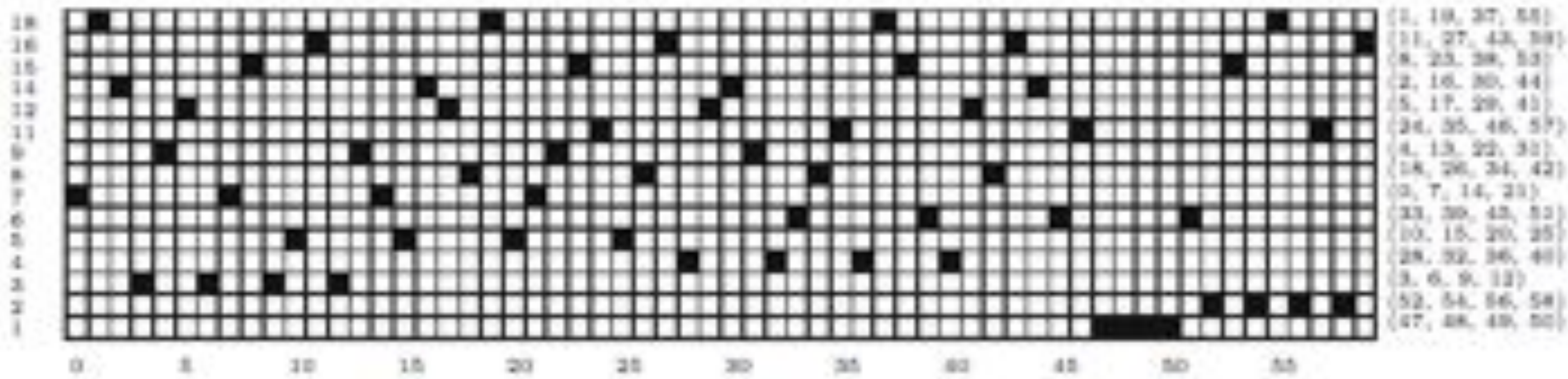
Tom Johnson’s « Self-Similar Melodies »

Tom Johnson's Perfect Tilings

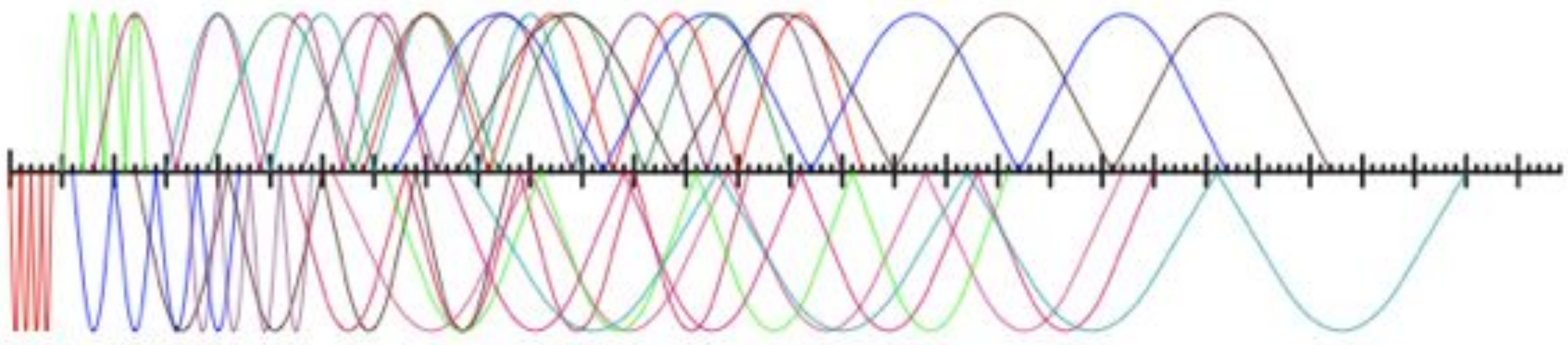


Jean-Paul Davalan, « Perfect Rhythmic Tilings » (to appear in *Tiling Problems in Music,* M. Andreatta & C. Agon eds., Collection « Musique/Sciences », 2008)

Perfect Rhythmic Tilings and open problems



Does it exist a quintuple perfect tiling canon?



Periodic sequences and finite difference calculus

$$Df(x) = f(x) - f(x-1).$$

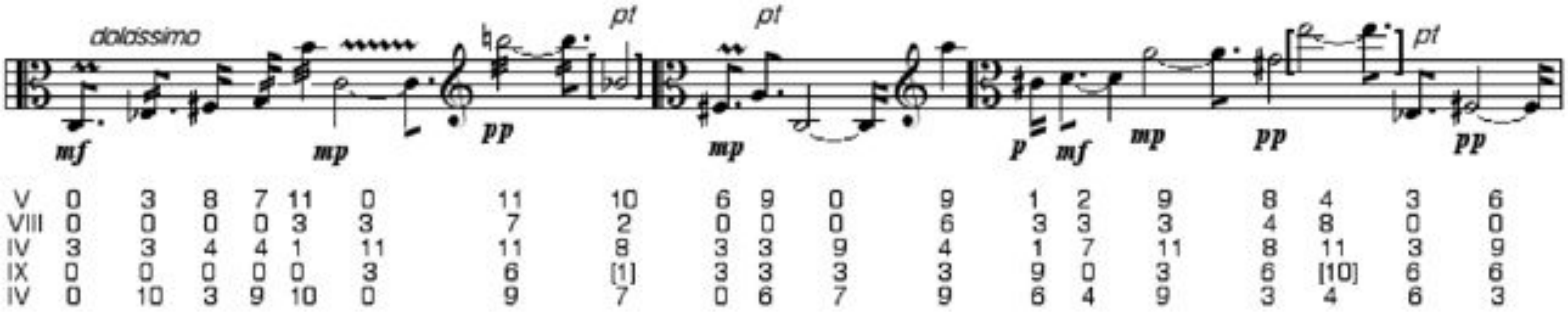
f = **7 11 10 11 7 2** 7 11 10 11 7 2 7 11…

Df = **4 11 1 8 7 5** 4 11 1 8 7 5 4 11…

$D^2 f$ = **7 2 7 11 10** 11 7 2 7 11 10 11…

$D^3 f$ = **7 5 4 11 1 8** 7 5 4 11 1 8…

$D^k f$ = ……



Anatol Vieru: *Zone d'oubli* pour alto (1973)

Periodic sequences and finite difference calculus

f = 11 6 7 2 3 10 11 6 …

Df = 7 1 7 1 7 1 7 1…

D^2f = 6 6 6 6 6…

D^4f = 0 0 0

Reducible sequences:
$\exists\, k \geq 1$ such that $D^k f = 0$

Théorème de décomposition: Toute sequence périodique (à valeurs dans un groupe cyclique **Z/nZ**) peut se décomposer de façon unique en somme d’une sequence reductible et d’une sequence reproductible (2001)

f = 7 11 10 11 7 2 7 11 …

Df = 4 11 1 8 7 5 4 11 1 …

D^2f = 7 2 7 11 10 11 7 2 7 …

D^3f = 7 5 4 11 1 8 7 5 4 11 1 8…

D^4f = 10 11 7 2 7 11 10 11 …

D^5f = 1 8 7 5 4 11 1 8 …

D^6f = 7 11 10 11 7 2 7 11 …

Reproducible sequences:
$\exists\, k \geq 1$ such that
$D^k f = f$

➔ 

23-Decompo

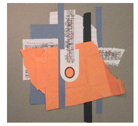
Growing by additions and proliferation of values

A^3g = 8 4 8 10 11 1 5 1 2 10 2 4 5 7 11 7 8 4 …

A^2g = 8 4 2 1 2 4 8 1 8 4…

Ag = 8 10 11 1 2 4 5 7 8 10 …

g = 2 1 2 1 2 1 2 1

➔ 

24-Growing

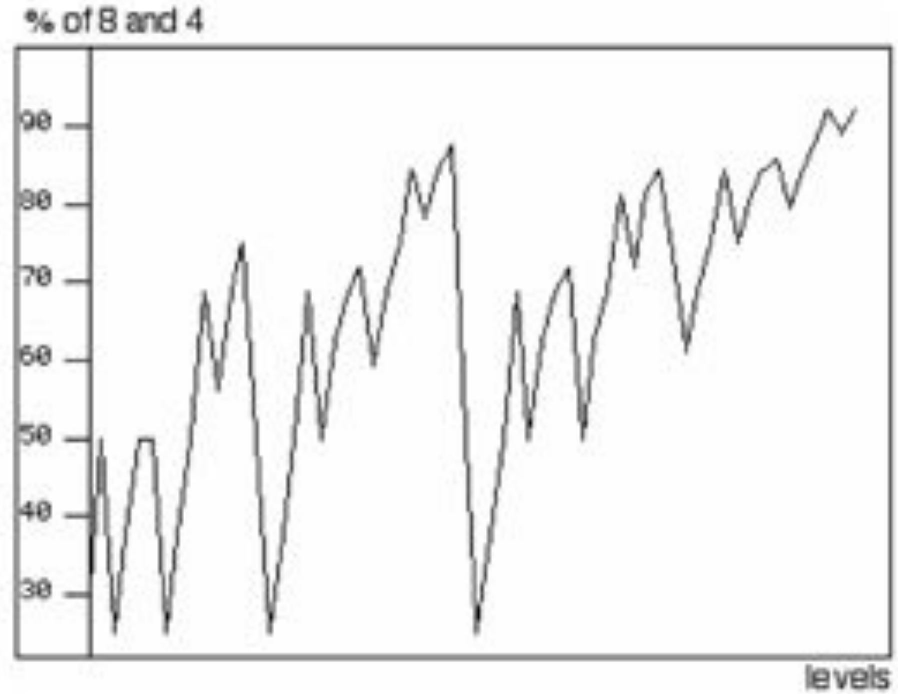


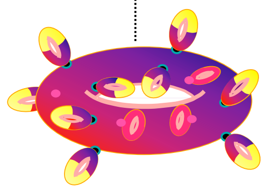
Fig. 11 Initial values equal to 8

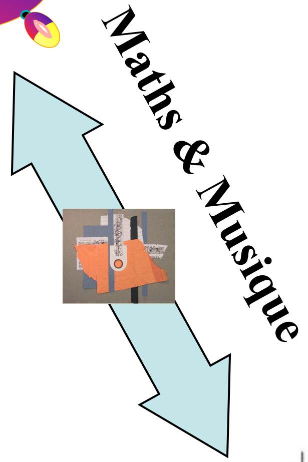
Fig. 15 Initial values equal to 4

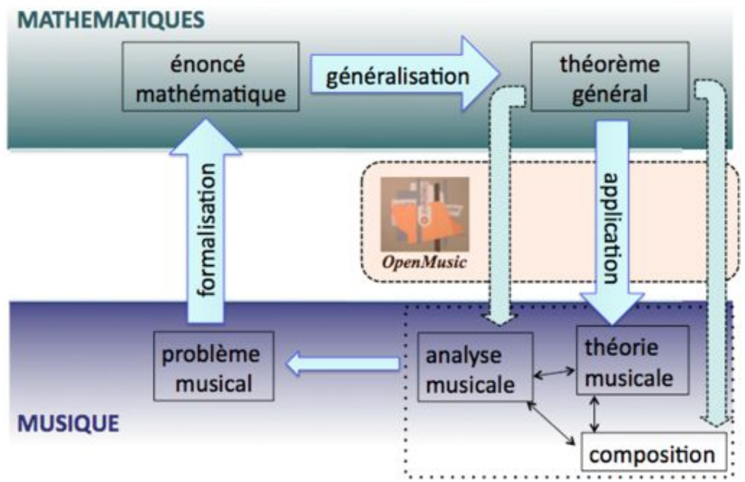
Quelle est la place de la cognition ?

http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html

Représentations mathématiques



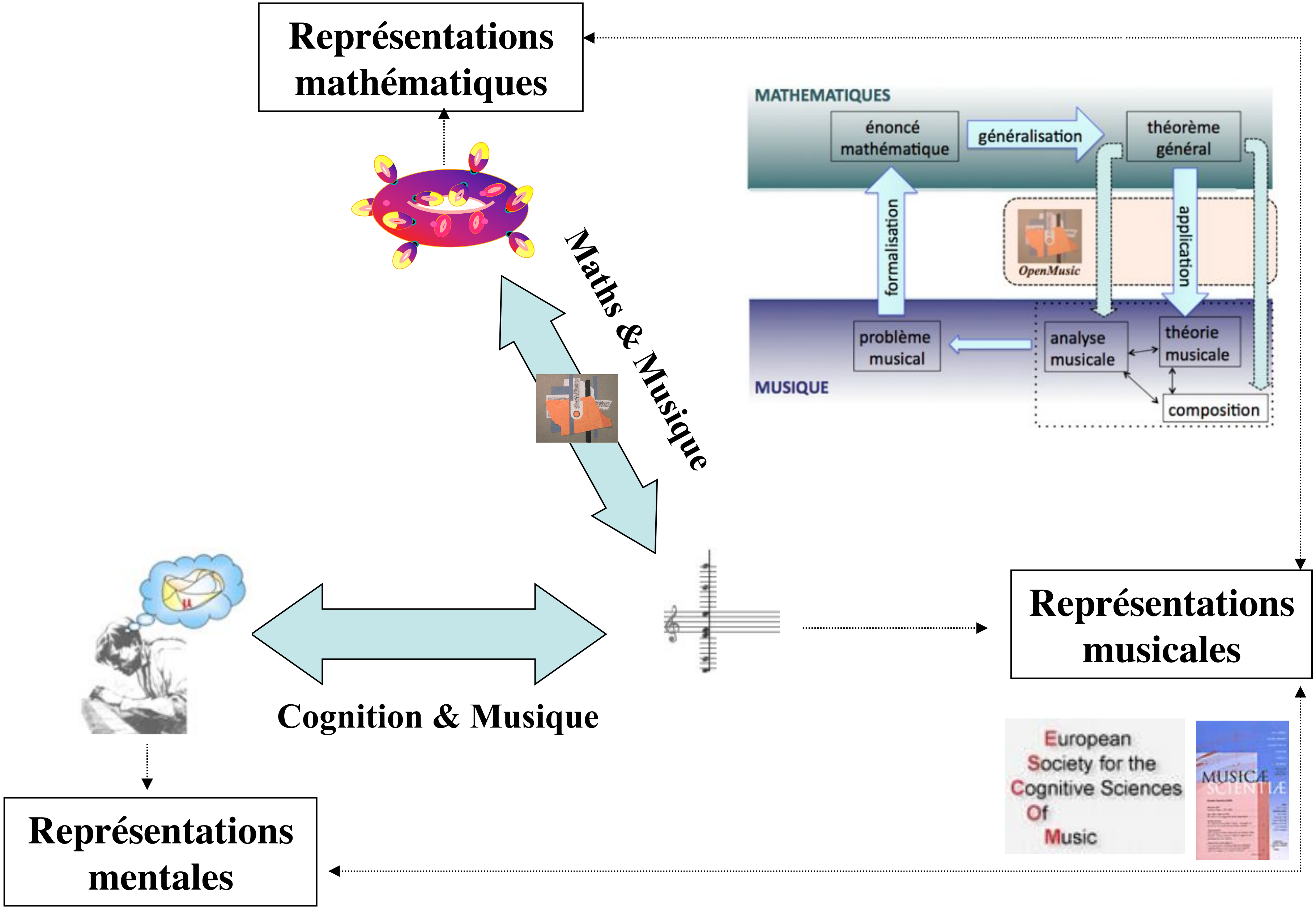




Représentations musicales

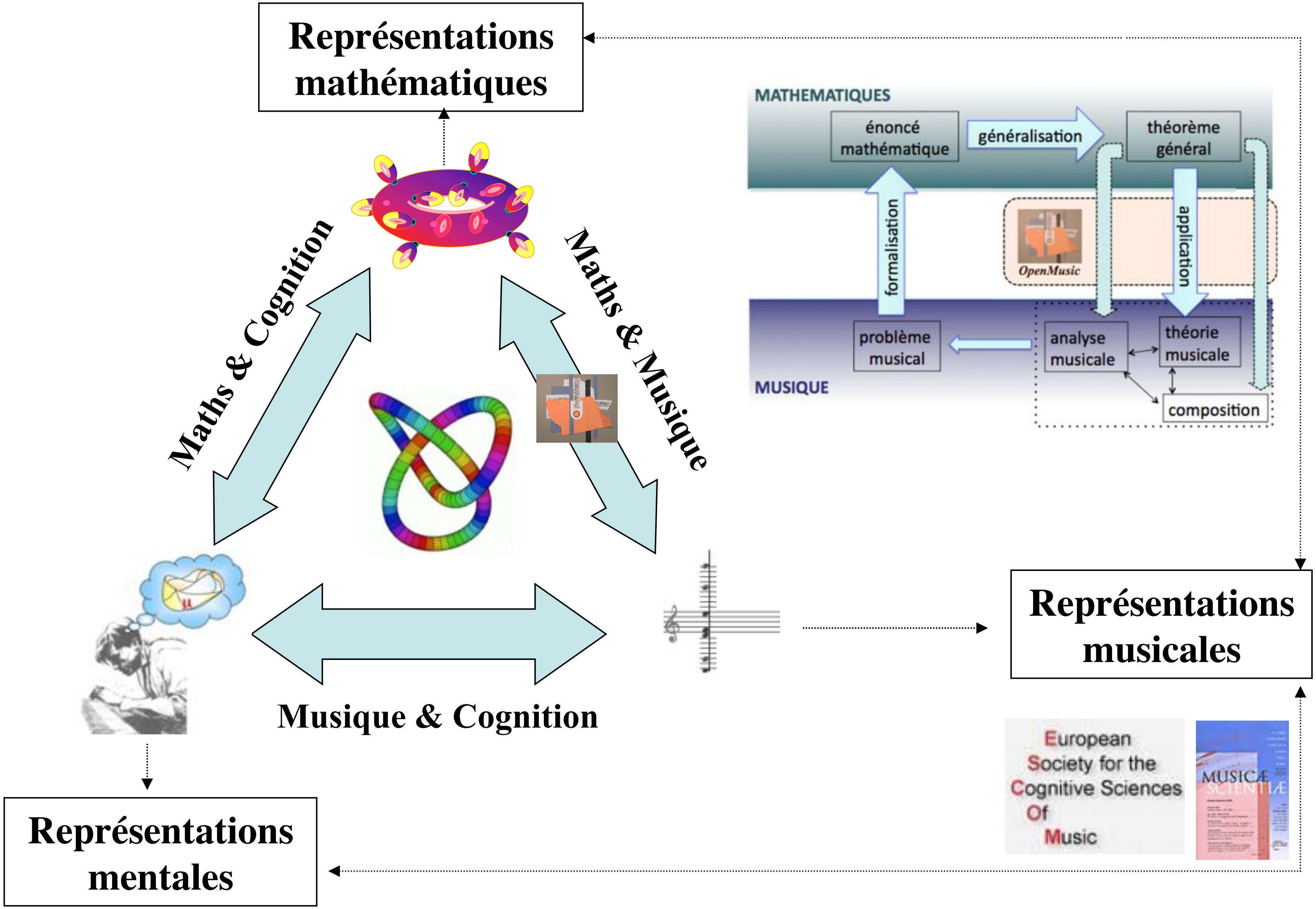
Quelle est la place de la cognition ?

http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html



Quelle est la place de la cognition ?

http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html



Sur les orientations théoriques (et/ou métathéoriques) de la tradition américaine

B. Boretz et E.T. Cone : *Perspectives on Contemporary Music Theory*, W.W. Norton and Company, New York, 1972.

« The recognition of music-theoretical questions as critical compositional ones is not, of course, unique to the twentieth century, nor to composers. But the uniquely explicit, uniquely consequential, and uniquely exposed contemporary involvement of composers in theory as writers and system builders has given the theoretical-compositional connection unprecedently wide, if not always benign or even accurate, publicity : we live, as every reader of the public musical print knows, in an age of **'theoretical composition'**. »

« Milton Babbitt, in particular, was the first to suggest that the force of any 'musical system' was not as universal constraints for all music but as alternative theoretical constructs, rooted in a communality of shared empirical principles and assumptions **validated** by tradition, experience, and experiment »

Cf. M. Andreatta : « Mathématiques, musique et philosophie dans la tradition américaine : la filiation Babbitt/Lewin » (Séminaire *MaMuPhi*, ENS, 18 Novembre 2006) www.diffusion.ens.fr/
A paraître dans les Actes du séminaire mamuphi (Collection Musique/Sciences, juin 2012)

Quelques traits caractéristiques du positivisme logique

James A. Davis : *Positivistic Philosophy and the Foundation of Atonal Music Theory*, 1993

• Empiricisme rigide qui mène à une émulation de la science dans sa méthodologie et sa terminologie

• Utilisation de l'analyse linguistique et logique (en particulier le recours à la logique formelle).

• Principe de vérification et reconstruction rationnelle

• Refus de l'interprétation subjective et rejet/élimination de la métaphysique

« There is no field of experience which cannot, in principle, be brought under some form of scientific law, and no type of speculative knowledge about the world which is, in principle, beyond the power of science to give […] **The propositions of philosophy are not factual, but linguistic in character** – that is, they do not describe the behavior of physical, or even mental, objects ; they express definitions, or the formal consequences of definitions. Accordingly, we may say that **philosophy is a department of logic**. » [AYER, 1952]

« Ce qui caractérise le néopositivisme logistique […] est la réduction de la philosophie à l'étude syntaxique des énoncés scientifiques »

Albert Lautman : *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, Vrin 2006 (en particulier le compte-rendu du Congrès International de philosophie des sciences, 1935)

Le transfert des idées du positivisme logique en musique

« For the essential elements of the above characterizations, involving the correlations of the syntactic and semantic domains, the notion of analysis, and – perhaps most significantly – the requirements of linguistic formulation and the differentiation among predicate types, beyond strongly suggesting that the proper object of our assigned investigation may be – in the light of these criteria – a vacuous class, and strongly reminding us of the systematic obligations attending our own **necessarily verbal presentation** and discussion of the presumed subject, provide the important reminder that **there is but one kind of language, one kind of method for the verbal formulation of 'concepts' and the verbal analysis of such formulations : 'scientific' language and 'scientific' method** »

M. Babbitt : « Past and Present Concepts », 1961

« Progressively from the concept to the law (synthetic generality) we arrive at the deductively interrelated system of laws that is a *theory*, statable as a **connected set of axioms, definitions, and theorems, the proof of which are derived by means of an appropriate logic**. A *musical theory* reduces, or should reduce, to such a **formal theory** when uninterpreted predicates and operations are substituted for the terms and operations designating musical observables »

M. Babbitt : « Past and Present Concepts », 1961

Vers une nouvelle orientation philosophique dans les rapports maths/musique

1. Les structure algébriques (en particulier les groupes) comme modèles soujacents à la formalisation musicale

2. L'action de groupe comme « paradigme » de la dualité objectale/opératoire

3. Aspects cognitifs de la formalisation catégorielle

4. Dépassement du cadre positivistico-logique

→ **Quelle philosophie pour l'analyse transformationnelle ?**

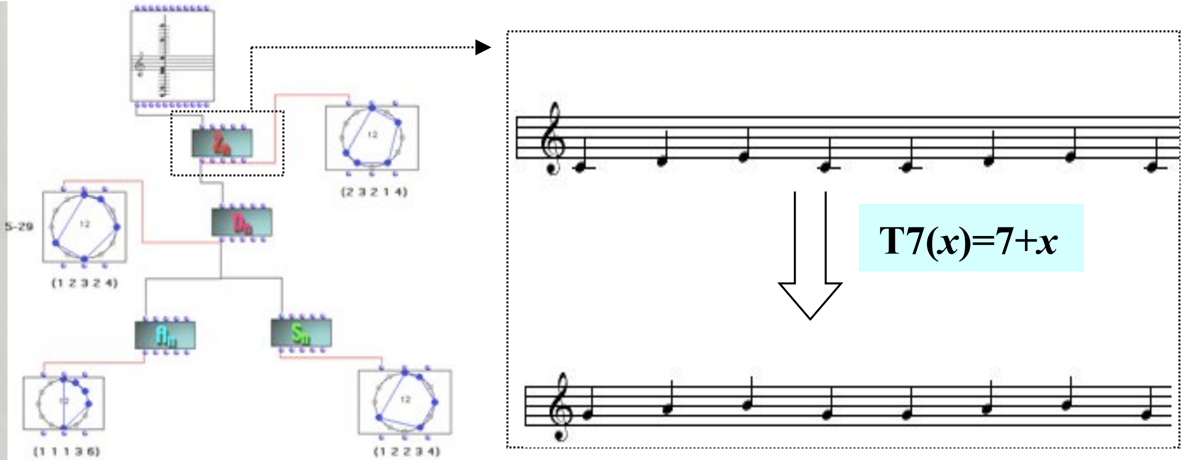
Théorie des groupes et cognition/perception (musicales)

The nature of a given geometry is […] defined by the *reference* to a determinate **group** and the way in which spatial forms are related within that type of geometry. [*Cf. Felix Klein Erlangen Program - 1872*][…] We may raise the question whether there are any concepts and principles that are, although in different ways and different degrees of distinctness, necessary conditions for both the *constitution* of the **perceptual world** and the construction of the universe of geometrical thought. It seems to me that the concept of **group** and the concept of **invariance** are such principles.

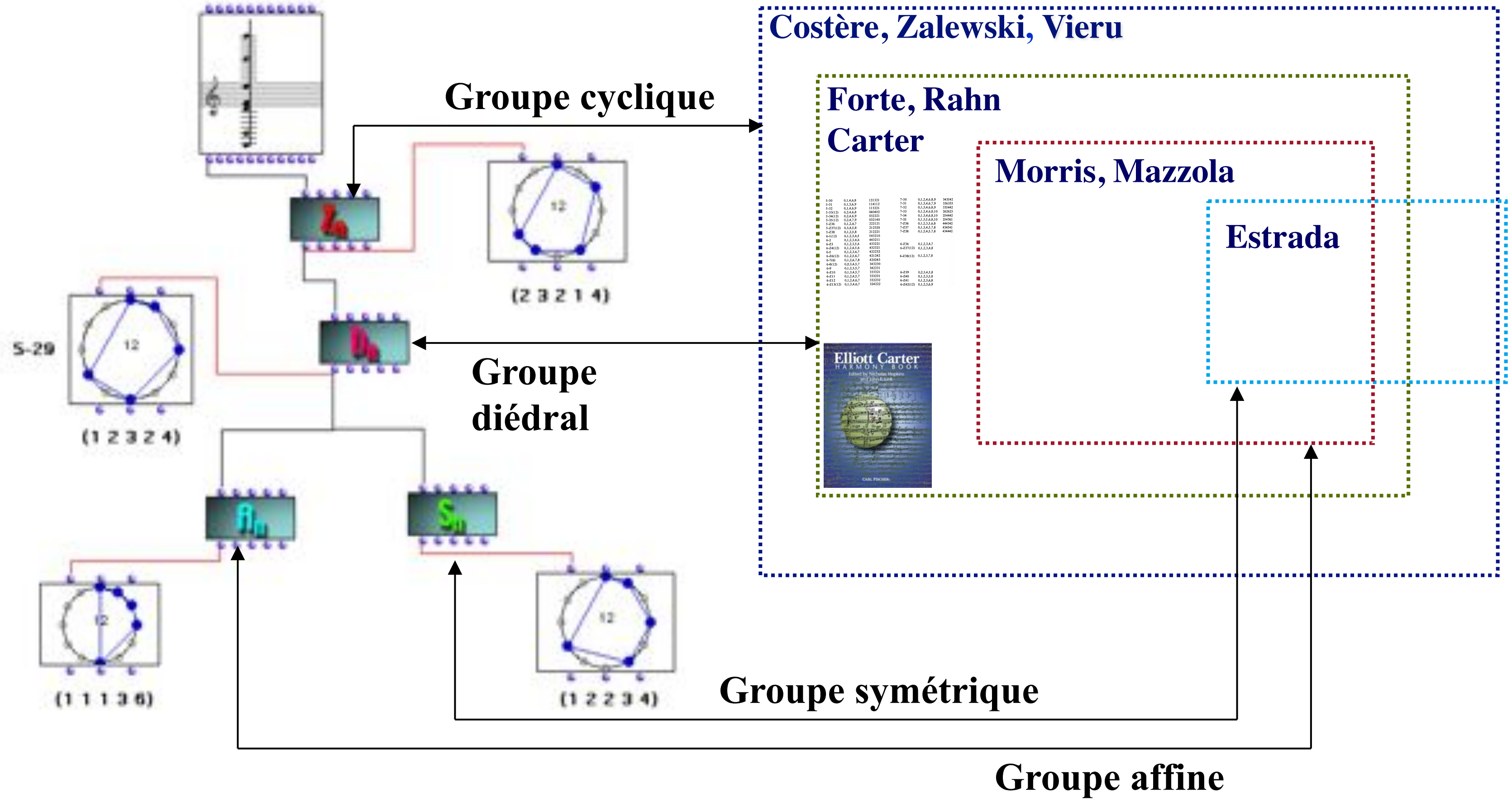
E. Cassirer, "The concept of group and the theory of perception", 1944

Felix Klein

Ernst Cassirer



Architecture paradigmatique et dualité objectale/opératoire

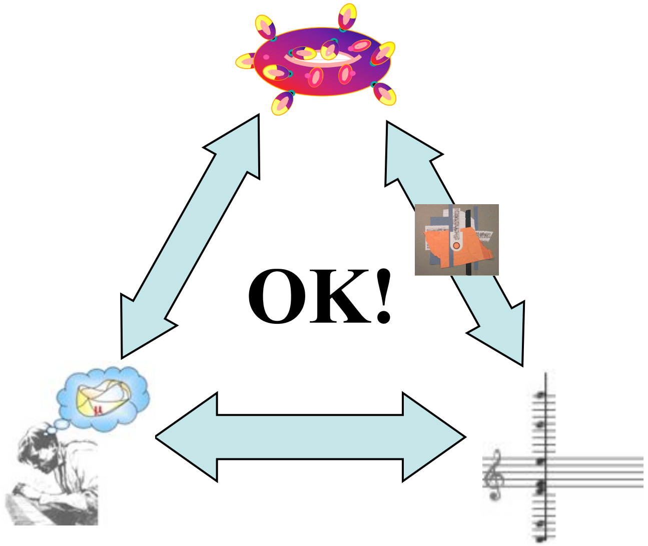


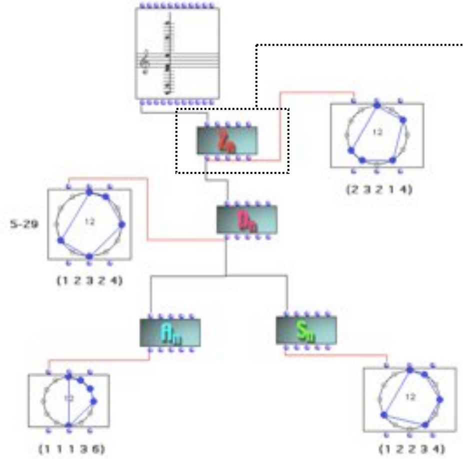
« [C'est la notion de groupe qui] donne un sens précis à l'idée de structure d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son schéma opératoire le domaine envisagé. […]L'objet véritable de la science est le système des relations et non pas les termes supposés qu'il relie. […] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une expérience nouvelle revient […] à créer un canevas nouveau, un groupe de transformations plus complexe et plus compréhensif »

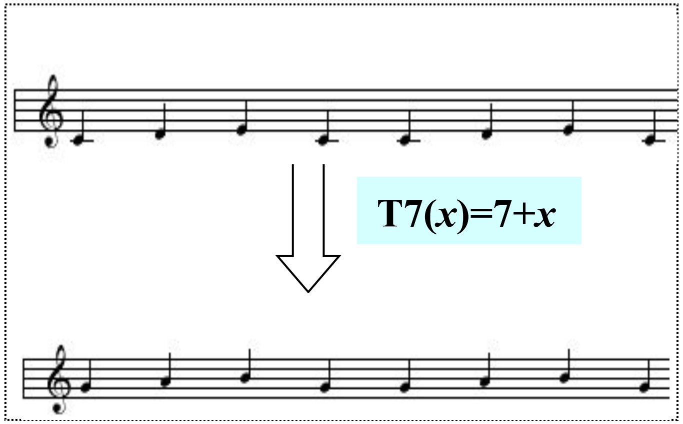
G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947

G.-G. Granger

Approches diatoniques et perception musicale







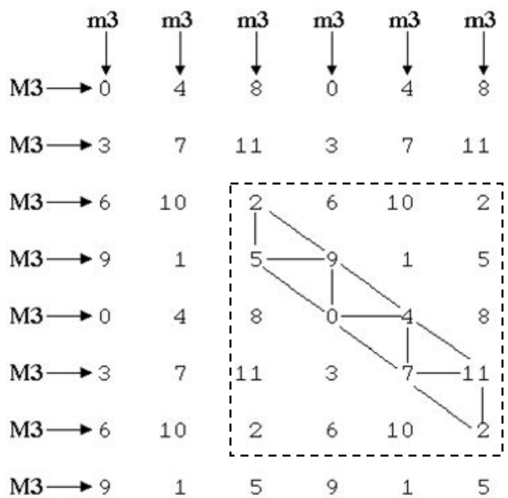
• Gerald Balzano, « The group-theoretic representation of 12-fold and microtonal pitch systems », CMJ, 4, 1980

• Gerald Balzano, « The pitch set as a level of description for studying musical pitch perception ». In M. Clynes (éd.), *Music, Mind and Brain*, 1982

• Ian Cross, P. Howell & R. West, « Preferences for scale structure in melodic sequences », *Journal of Experimental Psychology:Human Perception and Performance*, 9(3), 1983

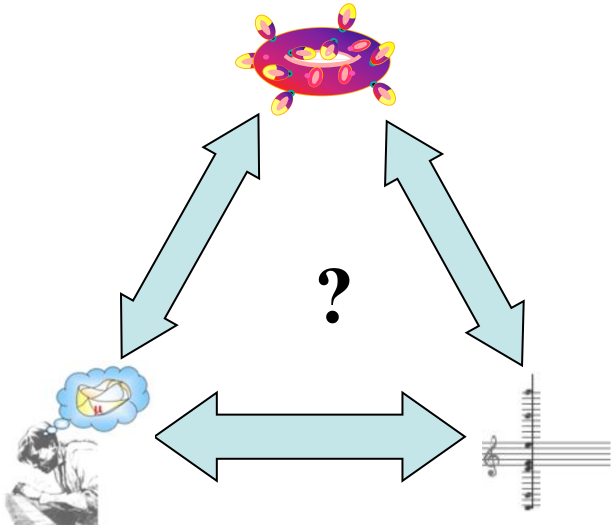
• René Van Egmond, David Butler, « Diatonic Connotations of Pitch-Class Sets », *Music Perception*, 15(1), 1997

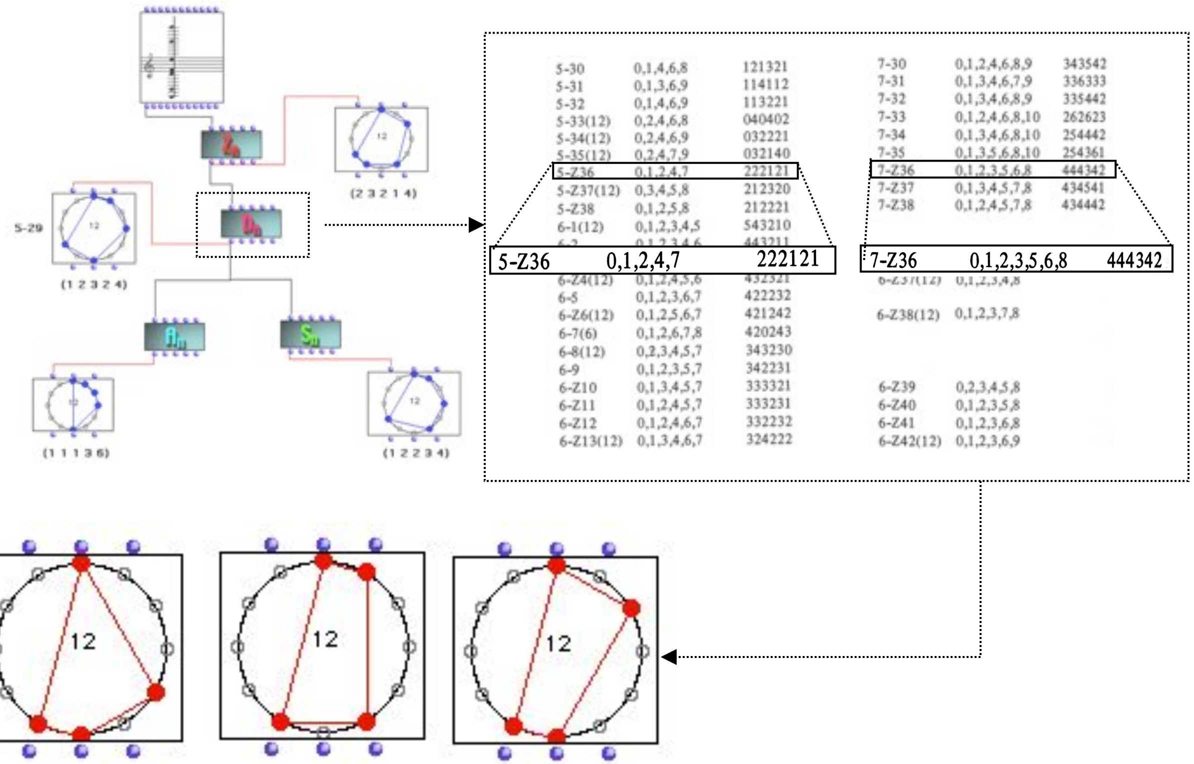
• Ian Cross, « Pitch Schemata », in I. Deliège & J. Sloboda (éd.), *Perception and Cognition of Music*, 1997.



Balzano, *CMJ*, 1980

Approches « set-théoriques » et perception musicale





« Trained musicians rated the similarity of 24 instances of set classes [0137/0467] and [0157/0267] at three different transposition levels and two different spacing types. […] The results are consistent with the hypothesis that even musicians with significant experience of atonal music do not use the equivalence relation TnI in making similarity judgments »

Art Samplaski, « The Relative Perceptual Salienece of Tn and TnI », *MP*, 21(4), 2004

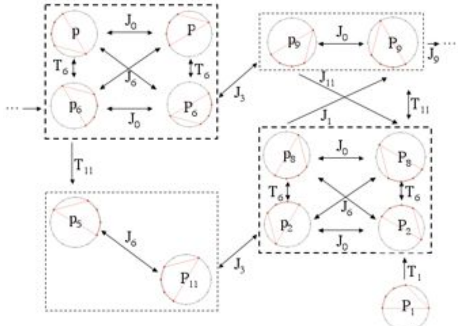
Aspects cognitifs d'une approche catégorielle en musique

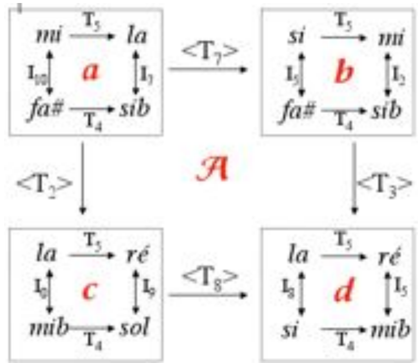
« De même qu'en mathématique le structuralisme des Bourbaki est déjà doublé par un mouvement faisant appel à des ***structures plus dynamiques*** *(les « catégories » […]) de même toutes les formes actuelles du structuralisme […] sont certainement grosses de développements multiples… »*

J. Piaget: *Le structuralisme*, 1968

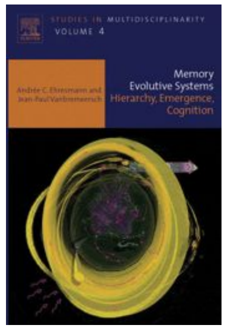
« La théorie des catégories est une théorie des constructions mathématiques, qui est macroscopique, et procède d'étage en étage. Elle est un bel exemple d'abstraction réfléchissante, cette dernière reprenant elle-même un principe constructeur présent dès le stade sensori-moteur. Le ***style catégoriel*** *qui est ainsi à l'image d'un aspect important de la* ***genèse des facultés cognitives****, est un style adéquat à la description de cette genèse »*

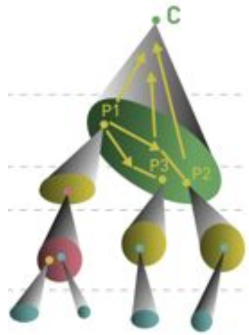
Jean Piaget, Gil Henriques et Edgar Ascher, *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer*, 1990





- G. S. Halford & W. H. Wilson, "A Category Theory Approach to Cognitive Development", *Cognitive Psychology*, 12, 1980
- J. Macnamara & G. E. Reyes, *The Logical Foundation of Cognition*, OUP, 1994
- A. Ehresmann, J.-P Vanbremeerch, *Memory Evolutive Systems, Hierarchy, Emergence, Cognition*, 2007
- …
- S. Phillips, W. H. Wilson, "Categorical Compositionality: A Category Theory Explanation for the Systematicity of Human Cognition", PLoS Comp. Biology, 6 (7), July 2010

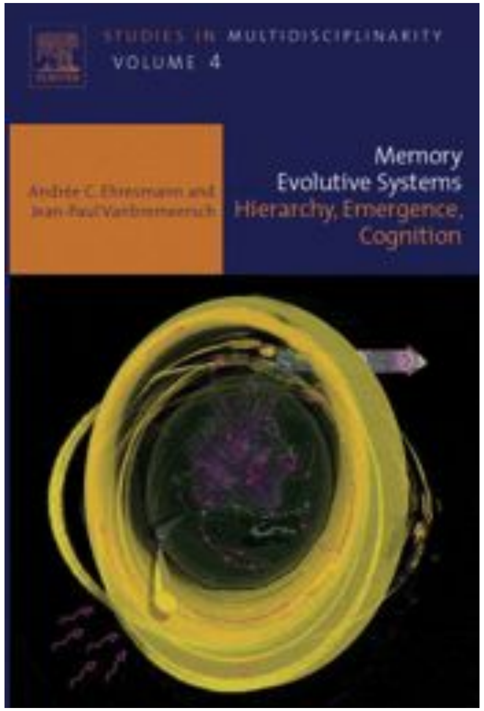


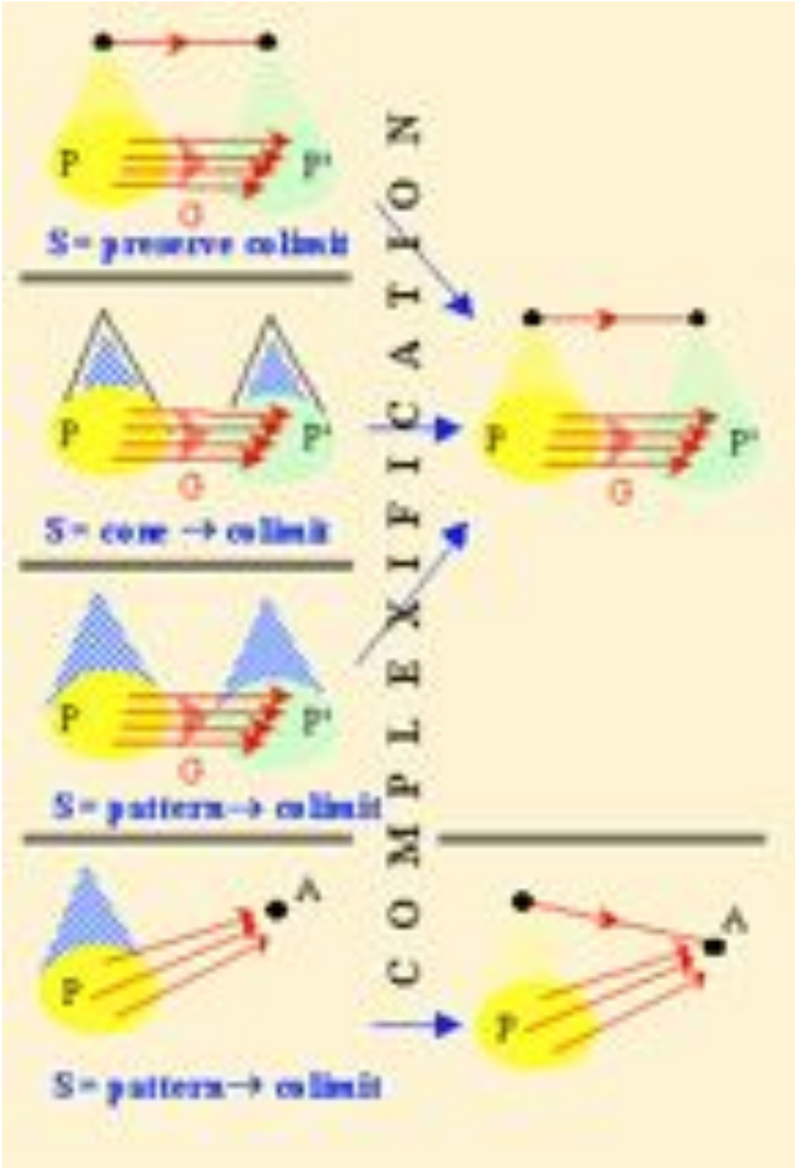


« Memory Evolutive Systems » et neurons catégoriels

http://pagesperso-orange.fr/vbm-ehr/

A 'simple' **cat-neuron** emerges as the <u>colimit in a complexification of Neur</u> of a pattern of neurons which has no colimit neuron in Neur, but acts as a synchronous coherent assembly of neurons in the sense of Hebb. An iteration of the process leads to cat-neurons of order 2 which correspond to a super-assembly (or 'assembly of assemblies') of neurons, which cannot be reduced to a (large) synchronous assembly of simple neurons. Higher order cat-neurons in successive complexifications represent super-super-assemblies, and so on.

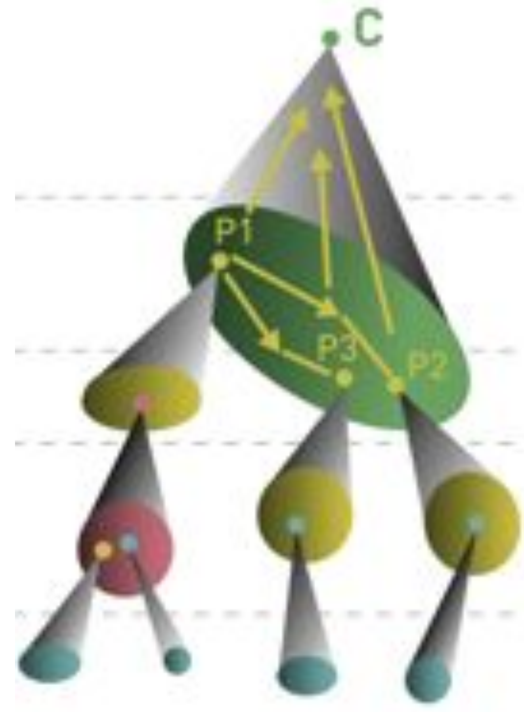


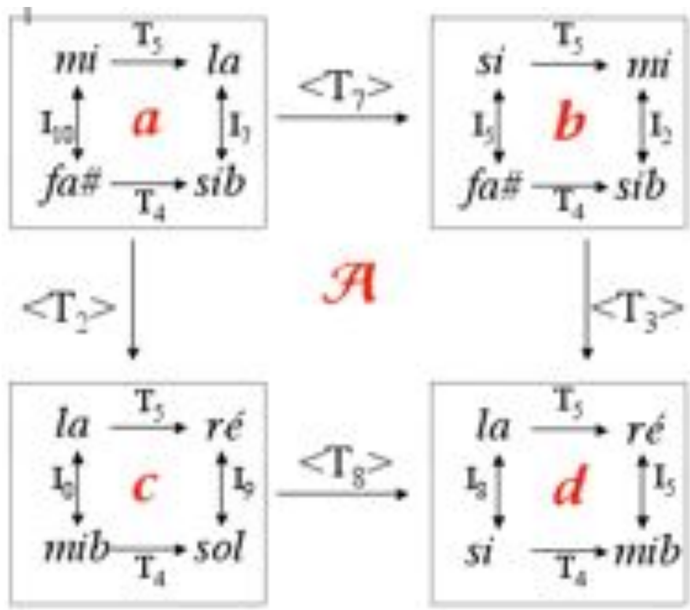


Les cat-neurones et la dualité corps/esprit

http://pagesperso-orange.fr/vbm-ehr/

La **représentation** d'un **état mental**, tel un processus cognitif complexe, par un **cat-neurone** d'ordre supérieur conduit à une nouvelle approche du problème philosophique de l'identité entre **états mentaux et états physiques du cerveau.** En effet, un état physique, tel qu'il est vu par imagerie médicale, correspond à l'activation d'une simple assemblée de neurones (modélisée par un cat-neurone simple). Mais un cat-neurone d'ordre supérieur n'est pas (directement) réductible à une telle assemblée, bien qu'il soit construit par des complexifications successives à partir du niveau des neurones, et qu'il ait des ramifications jusqu'à ce niveau. Ainsi son activation exige plusieurs étapes, passant par les niveaux intermédiaires d'une de ses ramifications, jusqu'au niveau des états physiques; et, à chaque étape, elle peut se propager par l'une ou l'autre des décompositions non-équivalentes d'objets multifaces, avec balancement entre elles qui peut être d'origine aléatoire (bruit) ou contrôlé. Bien que ce processus représente un "évènement" physique bien déterminé, il ne s'identifie pas à un "état" physique: **on peut dire que les états mentaux émergent de manière dynamique (au travers du déploiement graduel d'une ramification) des états physiques, sans leur être identiques.** Ceci définirait un monisme émergentiste au sens de Bunge.





Vers une « algèbre des objets mentaux » (Changeux) en musique

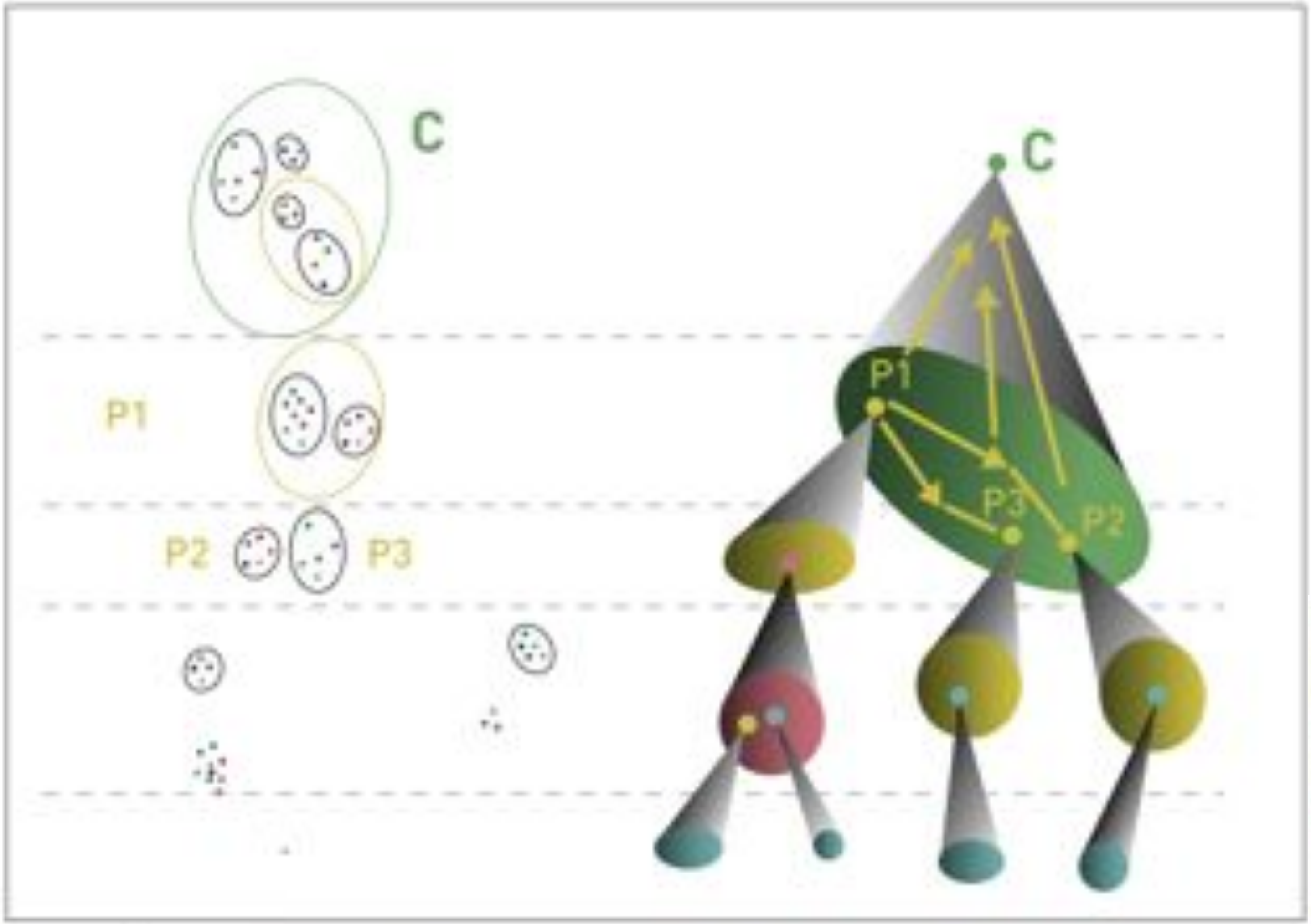
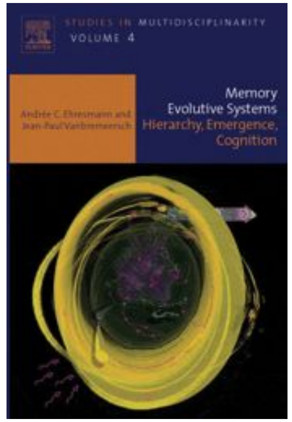


FIGURE 1 : À GAUCHE, FORMATION PROGRESSIVE D'UN OBJET COMPLEXE C PAR RECOLLEMENT D'OBJETS PLUS SIMPLES. À DROITE MODÈLE CATÉGORIQUE DE LA RAMIFICATION DE C, DÉPLOYÉE « DE HAUT EN BAS ».

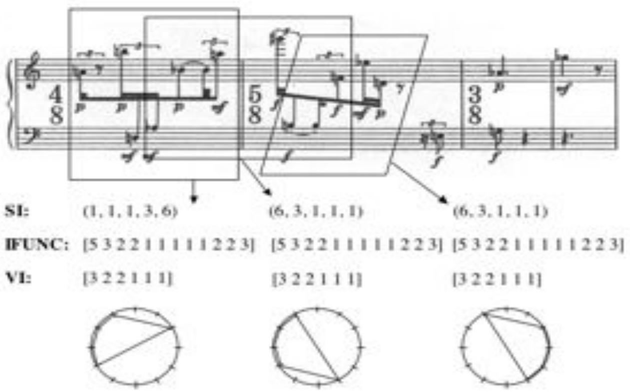


A. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch, « Petite mathématique de la création », *L'étincelle*, n° 6, novembre 2009

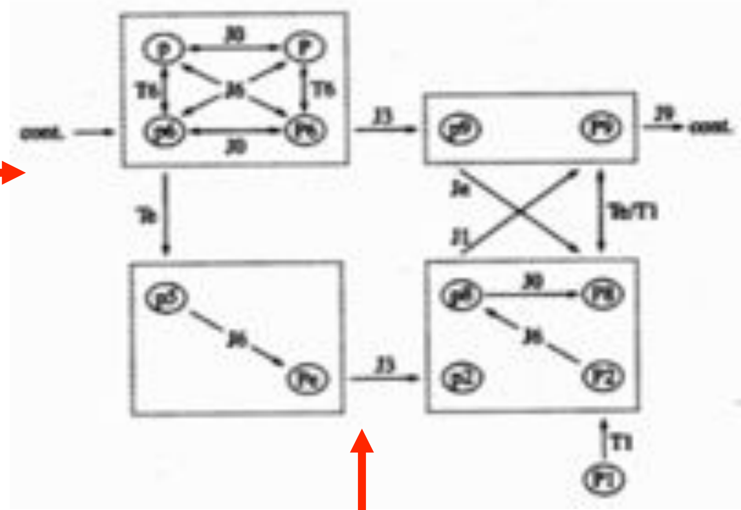
Progression transformationnelle *vs* réseau transformationnel

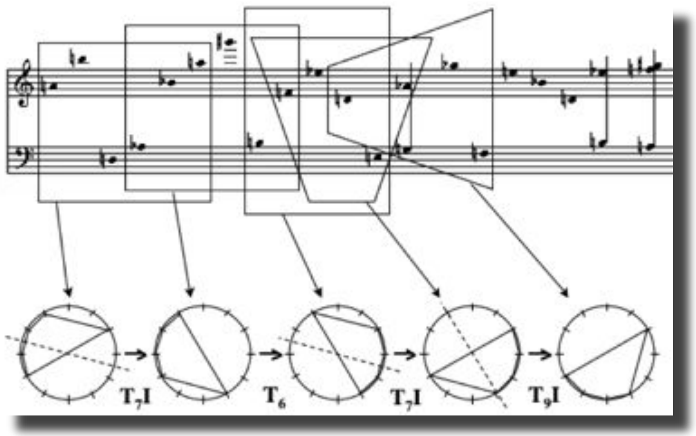
> « Group Theory has emerged as a powerful tool for analyzing cognitive structure. The number of cognitive disciplines using group theory is now enormous. The power of group theory lies in its ability to identify organization, and to express organization in terms of **generative actions that structure a space** »

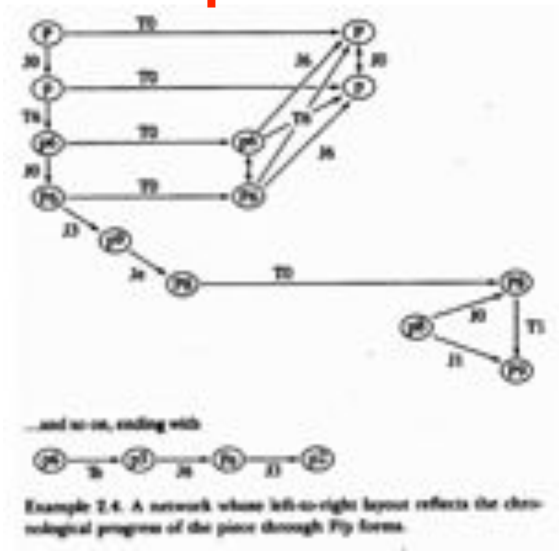
Michael Leyton, The International Society for Group Theory in Cognitive Science



?

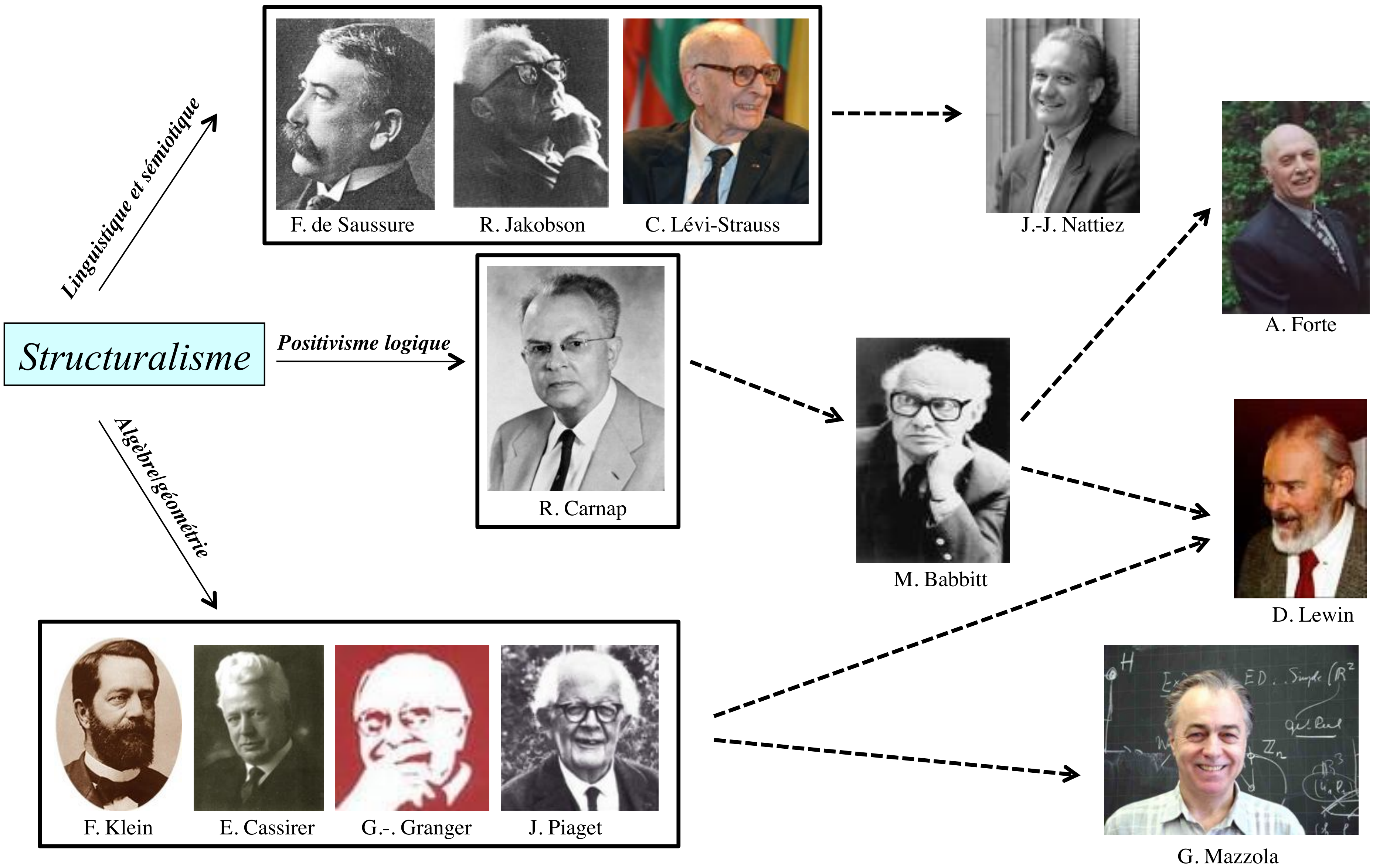






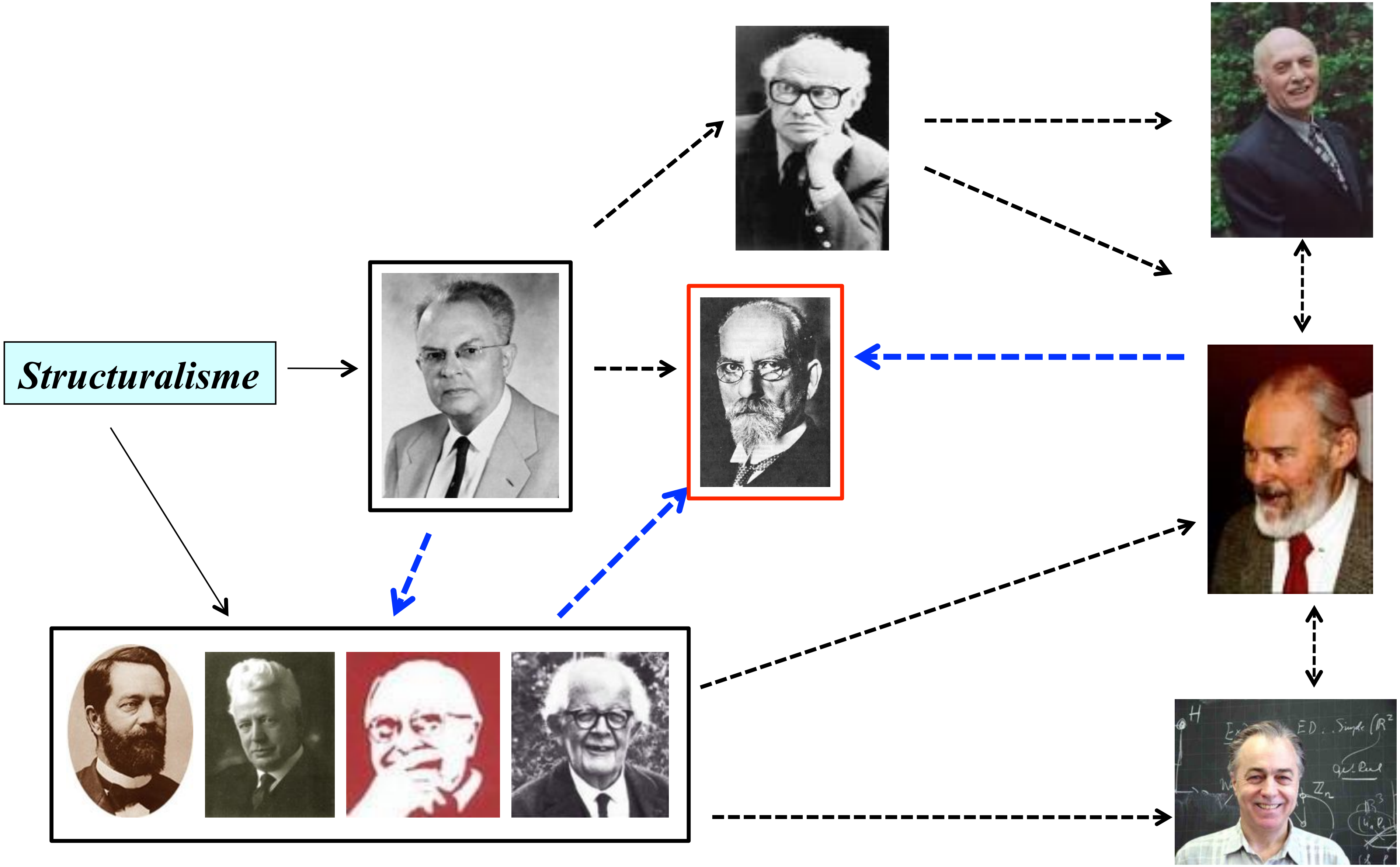
Autres implications philosophiques de l'approche transformationnelle

5. Trois orientations pour une démarche structurale en musique



Autres implications philosophiques de l'approche transformationnelle

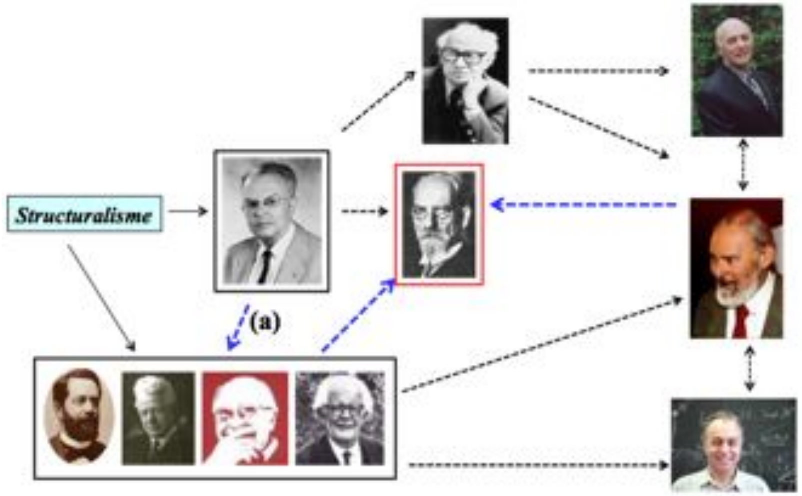
6. Vers une démarche structurale-phénoménologique en musique



Vers une démarche structurale-phénoménologique en musique

(a) Repenser les structures…

« Pour développer le concept de structure qui est au fondement de la théorie de la constitution, nous partons de la différence entre deux types de description des objets d'un domaine quelconque. Nous appelons ces deux types de description, description de propriété et description de relation. […] »



« La description de relation se trouve au commencement de tout le système de constitution et forme ainsi la base de la science dans son ensemble. En outre, le but de toute théorie scientifique est de devenir une pure description de relation quant à son contenu.

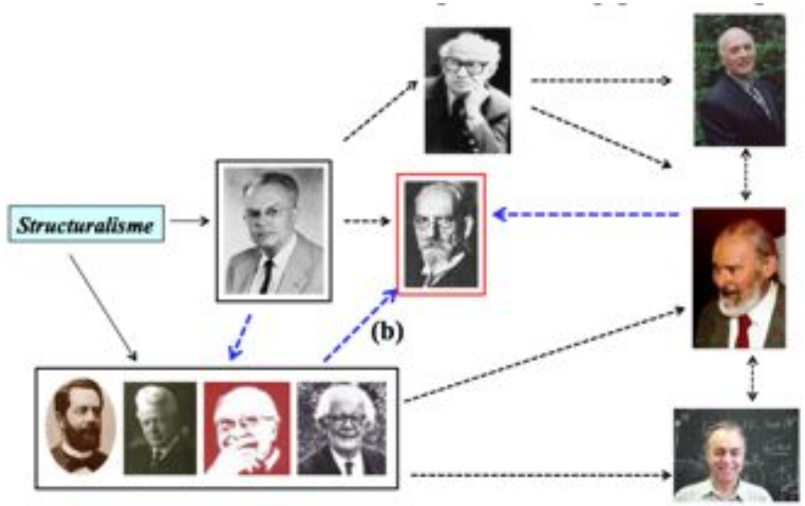
« Pour comprendre ce qu'on entend par la structure d'une relation, pensons au diagramme de flèches suivant : représentons tous les membres de la relation par des points. De chaque point, une flèche va vers les autres points qui lui sont en relation. Une flèche double désigne les paires pour lesquelles la relation vaut dans les deux directions. Une flèche qui retourne à son origine désigne un membre en relation avec lui-même. Si deux relations ont le même diagramme de flèches, on le dit **structurellement équivalents,** ***ou*** **isomorphes. Le diagramme de flèches est une représentations symbolique de la structure »**

R. Carnap : ***La construction logique du monde*****, 1928 (tr. Fr. 2002). Cité par F. Patras, « Carnap, l'*****Aufbau*****, et l'idée mathématique de structure ». In J. Bouveresse & P. Wagner (éds.),** ***Mathématiques et expérience. L'empirisme logique à l'épreuve (1918-1940)*****, p. 33-54, 2008.**

Vers une démarche structurale-phénoménologique en musique

…et les mettre en mouvement (b)

« *La phénoménologie husserlienne des mathématiques est* structurale *en ce qu'elle se fixe sur les invariances (donc* ce qui apparaît par variation*), dont elle fait le cœur de l'objectivité mathématique, en tant qu'objectivité* formelle. *Elle est aussi structurale, dans un seul et même engagement, par le fait de* privilégier l'opération sur l'objet. »



« *[…] La pensée catégoriale n'est pas du tout étrangère, dans ses fondements, au type de « structuralisme » qui est celui de la phénoménologie, simplement en en faisant, avec des moyens que la phénoménologie ne pouvait pas soupçonner pour des raisons tenant à l'avancement du savoir mathématique autour de 1900, un structuralisme dynamique qui, par certains cotés,* est beaucoup plus phénoménologique […] que celui-là même que la phénoménologie pouvait proposer. *En un certain sens, la pointe du structuralisme, ce n'est pas la structure, mais* ce qu'on fait de la structure »

« […] *Il nous semble que, aujourd'hui, la théorie mathématique des catégories fournit, peut-être pour la première fois, un cadre théorique à ce que pourrait être une véritable épistémologie* phénoménologique *des mathématiques, ainsi que, du point de vue philosophique en général, un extraordinaire champ d'application à la phénoménologie. Elle nous donne enfin les moyens de remplir ce qui a toujours été le programme de la phénoménologie,* à savoir ne jamais séparer le concept de l'intuition »

J. Benoist, « Mettre les structures en mouvement: la phénoménologie et la dynamique de l'instuition conceptuelle. Sur la pertinence phénoménologie de la théorie des catégories », dans L. Boi, P. Kerszberg, F. Patras (éd.), *Rediscovering Phenomenology.* Springer, 2007

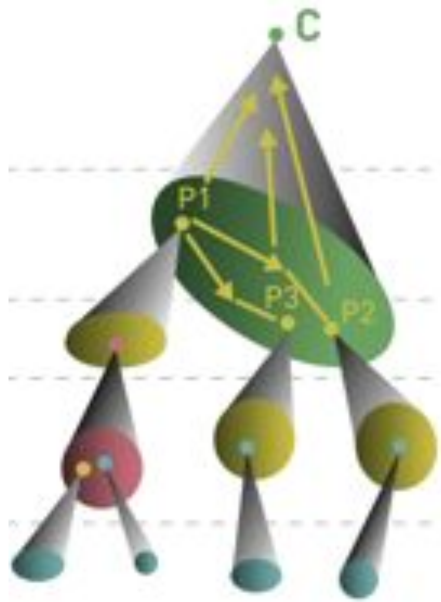
De Piaget aux Systèmes évolutifs à mémoire

J. Piaget

« La théorie des catégories est une théorie des constructions mathématiques, qui est macroscopique, et procède d'étage en étage. Elle est un bel exemple d'abstraction réfléchissante, cette dernière reprenant elle-même un principe constructeur présent dès le stade sensori-moteur. Le style catégoriel qui est ainsi à l'image d'un aspect important de la genèse des facultés cognitives, est un style adéquat à la description de cette genèse »

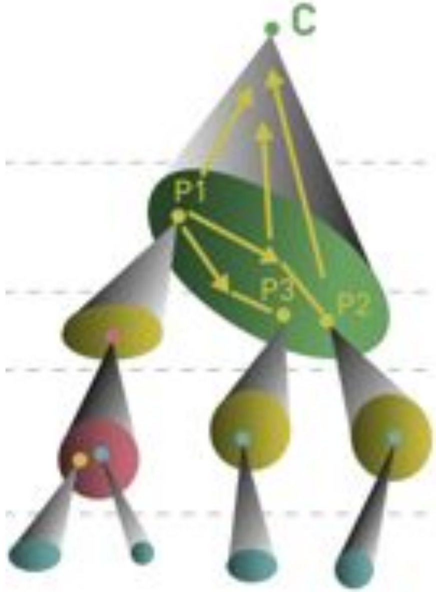
Jean Piaget, Gil Henriques et Edgar Ascher, *Morphismes et Catégories. Comparer et transformer*, 1990

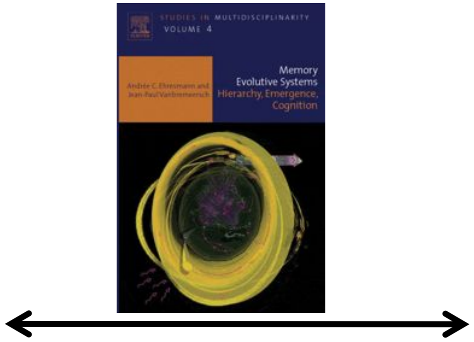
« […]L'émergence d'une œuvre d'art est l'expression d'une dynamique se développant dans un système hiérarchique de complexité croissante à multiples temporalités. Notamment, dans le cadre de notre modèle mathématique « les systèmes évolutifs à mémoire » (SEM), nous analysons l'existence d'objets multiformes émergeant dans le système sociétal d'un « monde artistique »; il pourrait s'agir de courants artistiques, issus de mouvements de pensée, de mouvements sociaux, culturels, scientifiques, technologiques. »
(Colloque « Complexité dan les sciences et dans les arts », Ircam, 8-19 juin 2009)

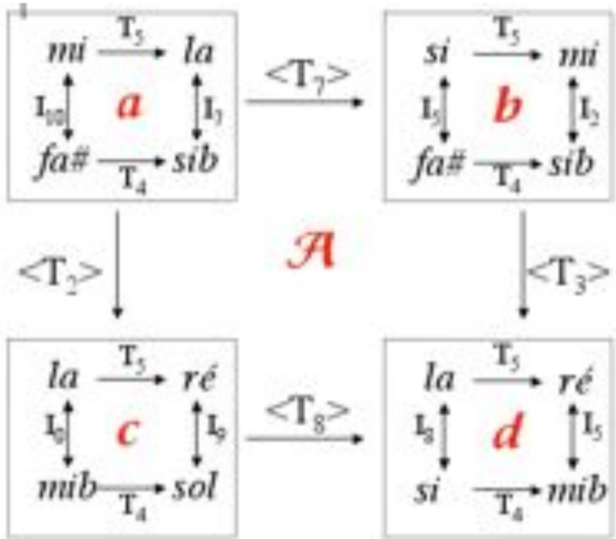


A. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch, « Petite mathématique de la création », *L'étincelle*, n° 6, novembre 2009

Vers une explication catégorielle de la perception musicale ?







A 'simple' **cat-neuron** emerges as the colimit in a complexification of Neur of a pattern of neurons which has no colimit neuron in Neur, but acts as a synchronous coherent assembly of neurons in the sense of Hebb.

[A. Ehresmann, J.-P Vanbremeerch, *Memory Evolutive Systems, Hierarchy, Emergence, Cognition*, 2007]

Category theory offers a re-conceptualization for cognitive science, analogous to the one that Copernicus provided for astronomy, where representational states are no longer the center of the cognitive universe — replaced by the relationships between the maps that transform them.

[S. Phillips, W. H. Wilson, “Categorical Compositionality: A Category Theory Explanation for the Systematicity of Human Cognition”, PLoS Comp. Biology, 6(7), July 2010]