



---

# La trajectoire spatiale dans le Tonnetz comme outil de classification stylistique automatique et de génération

---

Mémoire de stage

*Christophe WEIS*



*Encadrants :*

Isabelle BLOCH, Carlos AGON, Moreno ANDREATTA

*Structures d'accueil :*

LIP6 (Sorbonne Université), IRCAM (Équipe Représentations musicales)



*1<sup>er</sup> mars - 31 août 2022*

# Table des matières

|  |    |
|--|----|
| Résumé   | 2  |
| Abstract   | 2  |
| 1 Introduction   | 3  |
| 2 Le(s) Tonnetz(e)   | 4  |
| 2.1 Des espaces géométriques de triades  | 4  |
| 2.2 Les Tonnetze en tant que grilles périodiques infinies                          | 6  |
| 2.3 Des Tonnetze en tant que tores et cylindres plats                              | 6  |
| 2.3.1 Un choix de régions fondamentales pour les Tonnetze toroïdaux                | 7  |
| 2.3.2 Les Tonnetze toroïdaux en tant que tores plats                               | 10 |
| 2.3.3 Le passage au quotient pour les Tonnetze cylindriques                        | 12 |
| 2.4 Positionnement d'accords dans les Tonnetze                                     | 13 |
| 2.5 Les Tonnetze à poids   | 16 |
| 2.5.1 Poids déterminés par les nombres de Forte                                    | 17 |
| 2.5.2 Attribution de poids en fonction des états d'accords                         | 18 |
| 2.6 Produits de Tonnetze à poids   | 21 |
| 3 Des trajectoires spatiales dans les Tonnetze                                     | 23 |
| 3.1 Regard sur l'état de l'art : trajectoires et complexes simpliciaux             | 23 |
| 3.2 Trajectoires dans les Tonnetze repliés et dépliés                              | 24 |
| 3.3 Trajectoires dans les Tonnetze repliés à poids                                 | 28 |
| 3.4 Trajectoires dans des produits de Tonnetze à poids                             | 29 |
| 4 Préliminaires à la classification stylistique et à la génération                 | 30 |
| 4.1 Style et analyse harmonique  | 30 |
| 4.2 La trajectoire comme outil de classification et de génération                  | 30 |
| 4.3 Jeux de données et (pré-)analyses  | 31 |
| 5 Descripteurs de trajectoires   | 31 |
| 5.1 Les descripteurs proposés  | 31 |
| 5.1.1 La compliance  | 32 |
| 5.1.2 Le nombre de triangles parcourus   | 32 |
| 5.1.3 La distance moyenne parcourue entre deux accords successifs                  | 33 |
| 5.1.4 L'inconstance  | 33 |
| 5.1.5 La distance de Hausdorff d'une trajectoire à un segment de droite            | 34 |
| 5.1.6 Les pôles d'une trajectoire  | 35 |
| 5.1.7 Sens et directions des vecteurs d'enchaînement                               | 35 |
| 5.2 Application à la classification stylistique automatique                        | 37 |
| 6 Les vecteurs d'enchaînement en tant qu'outils de classification et de génération | 39 |
| 6.1 Classification stylistique automatique   | 39 |
| 6.2 Génération de progressions d'accords   | 41 |
| 7 Conclusions et perspectives  | 45 |

|   |    |
|---|----|
| Annexes   | 49 |
| A Éléments d'harmonie et de <i>Set-Theory</i>           | 49 |
| B Complexes simpliciaux, variétés et actions de groupes | 49 |
| Liste des notations et symboles                         | 50 |

## Résumé

La classification automatique de styles musicaux est considérée comme une des tâches majeures dans les domaines de la musicologie computationnelle et du *Music Information Retrieval* (MIR). Des approches récentes ont proposé de l'aborder au moyen d'une représentation du contenu harmonique de pièces musicales dans des espaces géométriques de notes : les *Tonnetze*. Une telle méthode d'analyse implique plus précisément la formalisation de trajectoires spatiales dans les *Tonnetze* qui sont associées à des suites d'accords extraits de morceaux ou de fichiers de musique. Suivant ce paradigme d'analyse harmonique computationnelle, le mémoire présent introduit une nouvelle façon de définir ces trajectoires géométriques qui est basée sur une représentation des accords apparaissant dans les progressions harmoniques analysées en différents points de l'espace. En vue d'une évaluation de la pertinence en tant qu'outil de classification stylistique de cette approche, on propose, dans un premier temps, la définition d'une collection de descripteurs rendant compte de propriétés géométriques diverses des trajectoires ainsi construites. Dans un deuxième temps, on formule une possibilité de représenter des enchaînements entre deux accords successifs par des vecteurs dans les *Tonnetze*. À partir de ce type de formalisation, on élabore une méthode de classification supplémentaire et on montre sa pertinence sur un exemple de pièces de musique composées presque contemporanément. Par ailleurs, on propose un cadre méthodique permettant de générer des courtes progressions d'accords basées sur des vecteurs déterminés à partir de corpus de morceaux de musique de styles différents.

**Mots-clés :** Tonnetz, Trajectoires, Géométrie, Musicologie computationnelle, Music Information Retrieval, Classification de styles musicaux, Génération de progressions harmoniques.

## Abstract

Automatic music genre classification is considered as one of the major tasks in the domains of computational musicology and *Music Information Retrieval* (MIR). Recent approaches have suggested tackling this classification problem by representing the harmonic content of musical compositions in a type of geometric pitch class spaces called *Tonnetze*. More precisely, such an analysis method implies the formalization of spatial trajectories in the *Tonnetze* that represent chord sequences retrieved from musical pieces and files. Following this paradigm of computational harmonic analysis, we introduce a new way of defining geometric trajectories based on a representation of the successive chords appearing in harmonic progressions by different points in the *Tonnetze*. In order to assess the appropriateness of this approach as a classification tool, we suggest introducing a set of descriptors relating to various geometric aspects of the harmonic trajectories. Furthermore, we define a possibility of representing progressions between two consecutive chords by vectors in the *Tonnetze*. This allows us to introduce an additional classification method based on this kind of vectorial representation which we specifically test on compositions belonging to the same musical era. Finally, we propose a framework to generate short chord sequences based on vectors associated with various music genres.

**Keywords:** Tonnetz, Trajectories, Geometry, Computational Musicology, Music Information Retrieval, Music Genre Classification, Generation of Chord Sequences.

# 1 | Introduction

Le cadre du travail présenté dans ce mémoire est donné par le paradigme de l'analyse harmonique computationnelle à l'aide d'outils géométriques et topologiques. Dans cette optique, on suivra particulièrement les approches pionnières de Louis Bigo et al. ([9], [10], [13]) et d'Emmanouil Karystinaios et al. ([28]) qui ont proposé des formalisations de progressions d'accords en tant que trajectoires spatiales dans des espaces géométriques de classes de hauteurs : les *Tonnetze*. Ainsi, on se basera particulièrement sur l'hypothèse de l'existence d'un lien important entre le style harmonique d'une progression d'accords et sa représentation dans le Tonnetz établie et étudiée dans ces travaux récents.

Tandis que les trajectoires définies par Bigo et al. et Karystinaios et al. sont directement basées sur la structure simpliciale des Tonnetze, on introduira une approche représentant des suites d'accords par des courbes planes dans les Tonnetze. Intuitivement, on choisira, pour les accords successifs appartenant à une progression harmonique, des positionnements en différents points du Tonnetz et on reliera entre eux tous les points représentant les accords analysés. De cette façon, on construira des trajectoires dans différentes versions de Tonnetz telle que celle présentée sur la figure 1. Cette formalisation d'une trajectoire associée à une suite d'accords nous permettra en particulier de représenter des enchaînements harmoniques entre deux accords par des vecteurs dans le Tonnetz. Ces vecteurs, appelés *vecteurs d'enchaînement* par la suite, seront des éléments essentiels pour les approches de classification stylistique et de génération de progressions d'accords proposées dans ce mémoire.

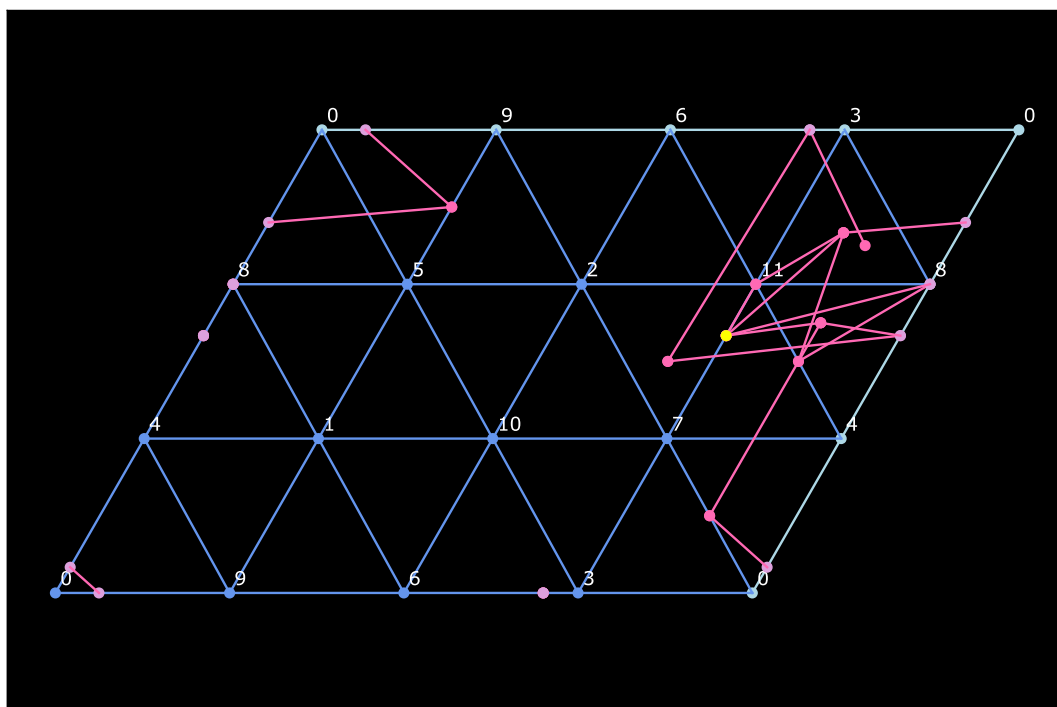


Figure 1 – Exemple de trajectoire représentant le début de la version de Bill Evans de *Alice in Wonderland* dans le Tonnetz replié  $\mathcal{P}(3;4;5)$ .

Le plan à grande échelle de ce mémoire comporte deux grands volets, le premier introduisant et étudiant tous les aspects théoriques impliqués par la définition des trajectoires dans le Tonnetz, le deuxième préparant et proposant des applications de classification stylistique et de génération de suites d'accords par l'intermédiaire de trajectoires.

Au chapitre 2, on formulera le cadre géométrique des Tonnetze, de façon générale dans un premier temps, puis d'une manière spécifiquement adaptée à notre formalisation des trajectoires. Ainsi, on présentera, aux paragraphes 2.2 et 2.3, une construction des Tonnetze toroïdaux et cylindriques en tant que variétés plates, notamment en tant que tores plats et cylindres plats. On déterminera par la suite, au paragraphe 2.4, des positionnements associés aux différents accords dans ces espaces géométriques. Afin d'enrichir les représentations d'accords – en introduisant notamment des informations concernant leurs différents renversements – on introduira des structures de Tonnetze munies de fibres – les *Tonnetze à poids* – aux paragraphes 2.5 et 2.6.

En partant de ce cadre formel et notamment des positionnements d'accords dans les différents Tonnetze, on introduira, au chapitre 3, les méthodes de construction de trajectoires représentant des suites d'accords données.

Tout d'abord, la section 3.1 proposera un regard sur l'état de l'art par une présentation des enjeux théoriques et des définitions de trajectoires proposées par Louis Bigo et al. ([9], [10], [13]) et par Emmanouil Karystinaios et al. ([28])

Les sections 3.2 et 3.3 définiront la formalisation des trajectoires qui est au cœur de ce mémoire. On en étudiera des propriétés géométriques en considérant notamment la représentation d'enchaînements entre deux accords successifs par des vecteurs – les *vecteurs d'enchaînement* déjà évoqués plus haut.

Dans un deuxième grand volet de ce mémoire, le paragraphe 5 introduira une collection de *descripteurs de trajectoires* conçus pour rendre compte des propriétés géométriques et des aspects à grande échelle des trajectoires construites. On essaiera par la suite d'évaluer si de tels descripteurs pourraient être des outils pertinents pour permettre une classification stylistique basée sur des trajectoires.

Finalement, on consacra le chapitre 6 entièrement aux vecteurs d'enchaînement représentant des enchaînements harmoniques entre deux accords successifs. On proposera, dans un premier temps, une nouvelle méthode de classification stylistique basée sur ces types de vecteurs, puis, on donnera un cadre de génération de suites d'accords utilisant exclusivement les vecteur d'enchaînement.

En annexe de ce mémoire, on rappellera différents outils d'analyse harmonique tout comme des définitions mathématiques générales sur lesquelles se baseront les formalisations mathématiques diverses du mémoire. On inclura en plus un tableau donnant les principales notations formelles utilisées à la dernière page de ce mémoire.

## 2 | Le(s) Tonnetz(e)

### 2.1 Des espaces géométriques de triades

Les propriétés géométriques et topologiques du Tonnetz (et de ses généralisations) ainsi que sa pertinence comme outil d'analyse harmonique ont fait l'objet de nombreuses études mathématiques et musicologiques ([8], [9], [12], [14], [16], [17], [31], [38], [40], [41]).

Le cadre formel sur lequel on se basera dans ce mémoire est donné par la définition des Tonnetze 2-dimensionnels à partir de 3 classes d'intervalles caractéristiques et par le paradigme de la représentation de ces Tonnetze en tant que complexes simpliciaux ([9], [12], [14], [38], [40], [41]). Suivant une telle formalisation, deux sommets simpliciaux voisins sont étiquetés par des classes de hauteurs séparées par l'un des trois intervalles caractéristiques du Tonnetz. Dans [14], Catanzaro généralise cette vision des Tonnetze pour des systèmes d'accord à  $N$  classes de hauteurs (correspondant à une

division de l'octave en  $N$  intervalles) et introduit le terme du *complexe de triades* pour désigner toute réalisation géométrique d'un Tonnetz 2-dimensionnel simplicial.

Définition 2.1.1 (Complexes de triades ([14])). Soit  $N \geq 3$  un entier positif et soient  $k, l$  et  $m \in \mathbb{Z}_N$  tels que  $1 \leq k + l + m < N$  et  $k + l + m = N$ . Alors on appelle *complexe de triades*  $C(k; l; m)$  toute réalisation géométrique du Tonnetz 2-dimensionnel formalisé en tant que complexe simplicial abstrait tel que

- (i) l'ensemble de ses sommets soit égal à l'ensemble des éléments de  $\mathbb{Z}_N$ ,
- (ii) l'ensemble de ses arêtes soit donné par l'ensemble des 1-simplexes de types

$$j; k + j \pmod{N}, \quad j; l + j \pmod{N} \quad \text{et} \quad j; k + j \pmod{N},$$

où  $j \in \mathbb{Z}_N$ ,

- (iii) l'ensemble de ses faces soit donné par l'ensemble des 2-simplexes de types

$$j; k + j \pmod{N}; k + l + j \pmod{N} \quad \text{et} \quad j; k + j \pmod{N}; k + l + j \pmod{N},$$

où  $j \in \mathbb{Z}_N$ .

Catanzaro propose en plus une étude topologique de ces complexes de triades dont résulte la classification suivante décrivant les Tonnetze topologiquement équivalents dans des systèmes d'accord à 12 classes de hauteurs :

Proposition 2.1.2 (Classification topologique des Tonnetze 2-dimensionnels (Catanzaro, [14])). Pour une division de l'octave en  $N = 12$  intervalles, les complexes d'accords définis ci-dessus sont

- (i) soit topologiquement équivalents à un tore<sup>1</sup> :  $C(3;4;5)$ ,  $C(1;2;9)$ ,  $C(1;3;8)$ ,  $C(1;4;7)$ ,  $C(2;3;7)$ ,
- (ii) soit topologiquement équivalents à un cylindre :  $C(1;1;10)$ ,  $C(2;5;5)$ ,
- (iii) soit topologiquement équivalents à un collier de six tétraèdres :  $C(1;5;6)$ ,
- (iv) soit non connexes :  $C(2;2;8)$ ,  $C(2;4;6)$ ,  $C(3;3;6)$ ,  $C(4;4;4)$ .

Remarque 2.1.3. On remarque ici que, si  $k, l$  et  $m$  sont des classes d'intervalles définissant un Tonnetz toroïdal, alors pour tout choix  $p \notin q \in \mathbb{Z}_N$ , on obtient  $\text{pgcd}(p; q) = 1$ . On utilisera cette propriété plus tard quand on étudiera les réalisations dépliées des Tonnetze.

Parmi les concepts fréquemment utilisés dans l'étude des Tonnetze, on évoque encore le *dual* d'un Tonnetz dont les sommets correspondent à toutes les triades représentées par une face triangulaire dans le Tonnetz d'origine.

Définition 2.1.4 (Dual d'un Tonnetz 2-dimensionnel). Soit  $C(k; l; m)$  un complexe de triades tel que défini plus haut. Alors, on appelle sa *représentation duale* le graphe dont les sommets sont donnés par toutes les triades correspondant à une face simpliciale triangulaire dans  $C(k; l; m)$  et dont les arêtes relient toutes les triades ayant en commun exactement deux classes de hauteurs.

1. On réfère à la section B de l'annexe pour des précisions concernant ces notions.

## 2.2 Les Tonnetze en tant que grilles périodiques in nies

En partant de la vision simpliciale des Tonnetze, on formalise dans la suite le cadre géométrique sur lequel se baseront toutes les définitions de trajectoires spatiales introduites au chapitre 3. Dans un premier temps, on définit les Tonnetze dépliés en tant que grilles triangulaires in nies dans le plan euclidien, obtenues en permettant la répétition périodique des constructions simpliciales des Tonnetze. On obtient ainsi notamment des espaces similaires aux graphes non bornés considérés par Karystinaios et al. ([28]) dans leur travail sur les trajectoires dans le Tonnetz.

**Définition 2.2.1** (Réalisation dépliée d'un Tonnetz toroïdal) Soient  $a \in \mathbb{R}^2$  et  $(e_1; e_2)$  une base quelconque de  $\mathbb{R}^2$  et soit le complexe simplicial in ni

$$K := \left[ \begin{array}{l} \text{Conv } \{a + i e_1 + j e_2; a + (i + 1) e_1 + j e_2; a + i e_1 + (j + 1) e_2\} \\ i, j \in \mathbb{Z} \\ \left[ \begin{array}{l} \text{Conv } \{a + i e_1 + j e_2; a + (i - 1) e_1 + (j + 1) e_2; a + i e_1 + (j + 1) e_2\} : \\ i, j \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Soient  $k < l < m \in \mathbb{Z}_{12}$  des classes d'intervalles caractérisant un Tonnetz toroïdal et soit un choix arbitraire de classes d'intervalles  $p \in \mathbb{Z}_{12}, q \in \mathbb{Z}_{12}, g \in \mathbb{Z}_{12}$ . Alors on appelle réalisation dépliée du Tonnetz toroïdal engendré par  $k, l$  et  $m$  et on note  $T(k; l; m)$  le complexe simplicial in ni  $K$  dont les sommets de coordonnées  $a + i e_1 + j e_2$  (pour  $i, j \in \mathbb{Z}$ ) sont étiquetés par les classes de hauteurs  $ip + jq \pmod{12}$ .

On définit de façon similaire les réalisations dépliées des Tonnetze cylindriques :

**Définition 2.2.2** (Réalisation dépliée d'un Tonnetz cylindrique) Soient  $a \in \mathbb{R}^2$  et  $(e_1; e_2)$  une base quelconque de  $\mathbb{R}^2$  et soit le complexe simplicial in ni

$$K := \left[ \begin{array}{l} \text{Conv } \{a + i e_1; a + (i + 1) e_1; a + i e_1 + e_2\} \\ i, j \in \mathbb{Z} \\ \left[ \begin{array}{l} \text{Conv } \{a + i e_1; a + (i - 1) e_1 + e_2; a + i e_1 + e_2\} : \\ i, j \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Soient  $k \leq l \leq m \in \mathbb{Z}_{12}$  des classes d'intervalles caractérisant un Tonnetz cylindrique et soient  $p, q \in \mathbb{Z}_{12}$  tels que  $k, l, m, g = f(p, q, g)$ . Alors on appelle réalisation dépliée du Tonnetz cylindrique engendré par  $k, l$  et  $m$  et on note  $T(k; l; m)$  le complexe simplicial in ni  $K$  dont les sommets de coordonnées  $a + i e_1 + j e_2$  (pour  $i \in \mathbb{Z}$  et  $j \in \mathbb{Z}_{12}$ ) sont étiquetés par les classes de hauteurs  $ip + jq \pmod{12}$ .

Les figures 2 et 3 visualisent cette construction des Tonnetze en tant que grilles simpliciales in nies dans le plan euclidien à partir du Tonnetz toroïdal  $T(3; 4; 5)$  et du Tonnetz cylindrique  $T(2; 5; 5)$ .

Dans la suite de ce mémoire, on utilisera simplement le terme Tonnetz déplié pour faire référence à une réalisation dépliée d'un Tonnetz si le contexte géométrique est suffisamment clair.

## 2.3 Des Tonnetze en tant que tores et cylindres plats

On souhaite dans la suite réduire ces représentations simpliciales non bornées à des espaces géométriques dans lesquelles chaque classe de hauteur se trouve représentée une et une seule fois. Dans un cadre d'analyse harmonique, une telle formalisation pourrait, entre autre, permettre de tenir compte géométriquement de retours tonals et harmoniques par des trajectoires qui décrivent des cycles.

Dans un premier temps, cet objectif nous amène à considérer les structures périodiques des Tonnetze dépliés définies au paragraphe précédent en tant que pavages du plan euclidien au sens suivant :

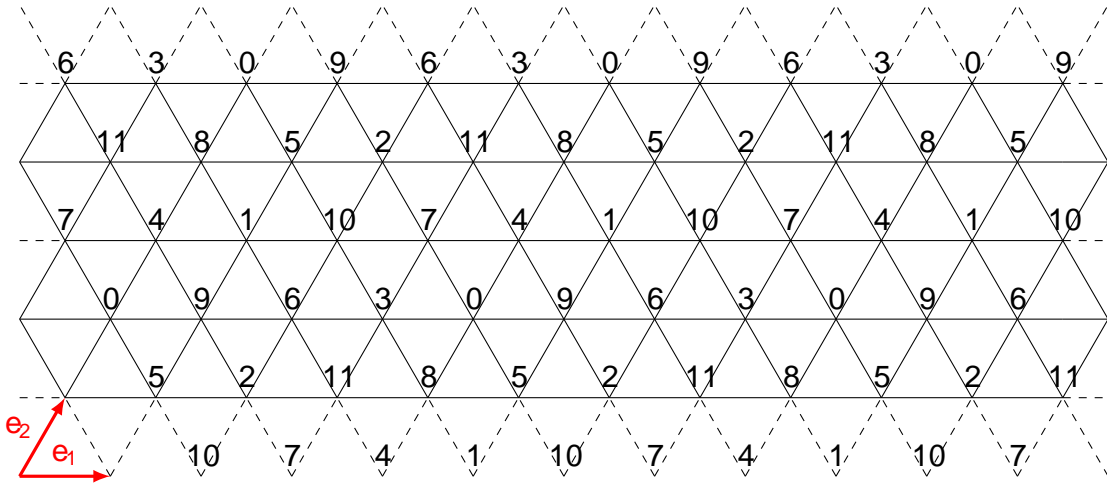


Figure 2 Exemple d'une réalisation du Tonnetz toroïdal déplié  $T(3; 4; 5)$ . Les vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  (en rouge) déterminent les coordonnées  $ie_1 + je_2$  (pour  $i, j \in \mathbb{Z}$ ) des sommets étiquetés par leur classe de hauteurs  $3i + 4j \pmod{12}$  (en admettant que l'origine correspond à une position de la classe de hauteurs 0).

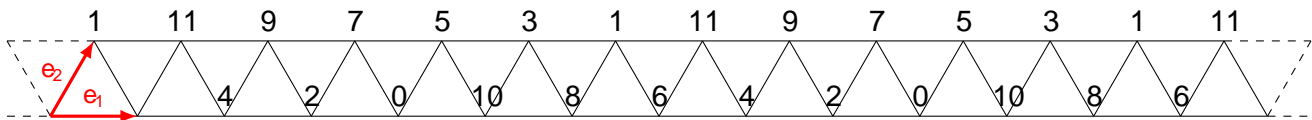


Figure 3 Exemple d'une réalisation du Tonnetz toroïdal déplié  $T(3; 4; 5)$ . Les vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  (en rouge) déterminent les coordonnées  $ie_1 + je_2$  (pour  $i \in \mathbb{Z}$  et  $j \in \mathbb{Z}$ ) des sommets étiquetés par leur classe de hauteurs associée  $2i + 5j \pmod{12}$  (en admettant de nouveau que l'origine correspond à une position de la classe de hauteurs 0).

Définition 2.3.1 (Région fondamentale et pavage d'un espace métrique, [19]) Soit  $X$  un espace métrique et soit  $G$  un groupe discret d'isométries de  $X$ . On appelle région fondamentale associée à  $G$  toute partie  $F$  de  $X$  tel que

- (i)  $G \cdot F := \bigcup_{g \in G} g \cdot F = X$ ,
- (ii) soit d'intérieur non vide,
- (iii)  $F \cap g \cdot F = \emptyset$   $g \neq \text{id}_G$ .

Le recouvrement de  $X$  par  $G \cdot F$  est appelé pavage de  $X$ , les  $g \cdot F$  (pour  $g \in G$ ) constituent ses pavés

### 2.3.1 Un choix de régions fondamentales pour les Tonnetze toroïdaux

À la quête d'une formalisation des Tonnetze en tant qu'espaces géométriques dans lesquels chaque classe de hauteurs apparaît exactement une fois, on propose de considérer tout d'abord les Tonnetze toroïdaux dépliés en tant que pavage du plan et de retenir en particulier un type de régions fondamentales et de pavés bien choisis.

Soit  $T(k; l; m)$  une réalisation dépliée d'un Tonnetz toroïdal engendrée par une base  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  et centrée au point  $(0; 0)$  comme décrit dans la définition 2.3.8. Notons  $p$  et  $q$  les classes d'intervalles associées respectivement à  $e_1$  et  $e_2$  de sorte que les points de coordonnées  $ie_1 + je_2$  (pour  $i, j \in \mathbb{Z}$ )



sont étiquetés par les classes de hauteurs  $p + jq \pmod{12}$ . Comme, d'après la remarque 2.1.3,  $\text{pgcd}(p; q) = 1$ , cette formalisation implique en particulier que les points de coordonnées

$$( (q + i \text{ord}(p)) e_1 + (p + j \text{ord}(q)) e_2 \mid i, j \in \mathbb{Z} )$$

sont exactement les points du Tonnetz étiquetés par la classe de hauteur  $0$  (correspondant à la note  $do$  ou  $C$ ).

Notons maintenant  $Q$  le quadrant du plan euclidien défini par les vecteurs  $e_1$  et  $e_1^\perp$ , où  $e_1^\perp$  est choisi tel que  $e_1 \cdot e_1^\perp = 0$  et  $e_2 \cdot e_1^\perp > 0$ .<sup>3</sup> Soient  $(a; 0)$  les coordonnées dans la base  $(e_1; e_2)$  du point étiqueté par  $0$  le plus proche de l'origine dans le quadrant  $Q$  suivant l'axe engendré par le vecteur  $e_1$  et soient  $(b; \varrho)$  les coordonnées  $do$  qui est le plus proche de la droite  $\mathbb{R} \cdot e_1^\perp$  parmi tous les  $do$  dans le quadrant  $Q$  qui se trouvent à distance minimale de  $\mathbb{R} \cdot e_1$ . On réfère à la figure 4 pour une visualisation de cette construction. Formellement, on définit

$$(a; 0) := \arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} d_e(x; (0; 0))$$

$$\text{et } (b; \varrho) := \arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} d_e(x; \mathbb{R} \cdot e_1^\perp)$$

où  $d_e$  désigne la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$  (respectivement entre deux points et entre un point et un ensemble) et où

$$t_1 := \begin{matrix} f \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{matrix} \cdot e_1 \mid f(0; 0) \leq f(x) \text{ est étiqueté par } 0$$

$$\text{et } t_2 := \begin{matrix} n \\ x \in \mathbb{Q} \end{matrix} \mid x \text{ est étiqueté par } 0$$

$$\text{et } @y \in \mathbb{Q}; y \text{ est étiqueté par } 0 \text{ et } d_e(y; \mathbb{R} \cdot e_1) < d_e(x; \mathbb{R} \cdot e_1) : 0$$

À partir de ces points, on définit les vecteurs  $t_1 := (a; 0)$  et  $t_2 := (b; \varrho)$  et on propose de considérer la région en forme de parallélogramme (telle que représentée sur la figure 4)

$$T(k; l; m) := \text{Conv} \{ (0; 0); t_1; t_2; t_1 + t_2 \}$$

engendrée par ces deux vecteurs pour laquelle on montre qu'elle définit un pavage du Tonnetz  $T(k; l; m)$  :

Lemme 2.3.2. Soit  $G := \{ (i t_1 + j t_2) \mid i, j \in \mathbb{Z} \}$  le groupe des translations discrètes engendrées par les vecteurs  $t_1$  et  $t_2$ . Alors  $G \cdot T(k; l; m)$  définit un pavage du Tonnetz  $T(k; l; m)$ .

Démonstration. La propriété essentielle à vérifier est que  $G \cdot T(k; l; m)$  définit un recouvrement de  $T(k; l; m)$  (point (i) de la définition 2.3.1). Il est clair que  $G \cdot T(k; l; m)$  est dépourvu de tous ses points étiquetés et des arêtes qui les relient entre eux engendre un pavage  $\mathbb{R}^2$  constitué par les images de la région parallélogrammatique engendrée par les vecteurs  $t_1$  et  $t_2$ .

Il reste donc à montrer que le recouvrement est également réalisé si on tient compte de tous les points étiquetés. En d'autres termes, il s'agit donc de montrer que les points étiquetés de la région  $g \cdot T(k; l; m)$  correspondent exactement à ceux de  $T(k; l; m)$  pour tout  $g \in G$ . Dans ce but, on remarque tout d'abord que les points de coordonnées  $t_1 = (a; 0) = a e_1$  et  $t_2 = (b; \varrho) = b e_1 + c e_2$ <sup>6</sup> ont été

2. On désigne ici par  $\text{ord}(n)$  l'ordre de  $n$  dans  $\mathbb{Z}_{12}$ .  
 3.  $v_1 \cdot v_2$  désigne ici le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^2$  entre deux vecteurs  $v_1$  et  $v_2$ .  
 4. selon la distance euclidienne  
 5. On identifie ici les vecteurs position  $t_i$  (pour  $i = 1; 2$ ) avec les points de coordonnées  $(0; 0) + t_i$ .  
 6. (voir note de bas de page ci-dessus)

choisis plus haut tels qu'ils soient étiquetés par la classe de hauteurs. Par définition d'un Tonnetz toroïdal déplié (définition 2.3.8), ceci implique

$$ap \equiv 0 \pmod{12} \text{ et } bp + cq \equiv 0 \pmod{12} \quad (1)$$

Soit maintenant  $g \in G$  et soient  $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$  tels que  $g = T_{(t_1, t_2)}$ .  
 Considérons un point  $x = i e_1 + j e_2 \in T(k; l; m)$  (avec  $i, j \in \mathbb{Z}$ ) étiqueté par  $h \in \mathbb{Z}_{12}$ . Alors, par définition d'un Tonnetz toroïdal déplié (définition 2.3.8),

$$ip + jq \equiv h \pmod{12} \quad (2)$$

Soit  $x^0 := g \cdot x \in T(k; l; m)$  l'image de  $x$  par translation de vecteur  $t_1 e_1 + t_2 e_2$ . Alors

$$\begin{aligned} x^0 &= i e_1 + j e_2 + t_1 e_1 + t_2 e_2 \\ &= (i + t_1 a + t_2 b) e_1 + (j + t_2 c) e_2 \end{aligned}$$

De nouveau par définition d'un Tonnetz toroïdal déplié,  $x^0$  est alors étiqueté par la classe de hauteurs

$$(i + t_1 a + t_2 b)p + (j + t_2 c)q \pmod{12}$$

et, en utilisant (1) et (2), on trouve que  $x^0$  est étiqueté par

$$ip + jq \pmod{12} + t_1 ap \pmod{12} + t_2 (bp + cq) \pmod{12} = h;$$

tout comme le point  $x \in T(k; l; m)$ .

Inversément, pour un point  $x^0 = i^0 e_1 + j^0 e_2$  (avec  $i^0, j^0 \in \mathbb{Z}$ ) dans  $g \cdot T(k; l; m)$  étiqueté par  $h \in \mathbb{Z}_{12}$ , on a (par la définition 2.3.8)

$$i^0 p + j^0 q \equiv h \pmod{12} \quad (3)$$

Pour  $g \in T(k; l; m)$  tel que  $g \cdot x = x^0$ , on montre par un raisonnement similaire et en utilisant (3) que  $x$  est étiqueté, tout comme  $x^0$ , par la classe de hauteur

$$\begin{aligned} &(i^0 - t_1 a - t_2 b)p + (j^0 - t_2 c)q \pmod{12} \\ &= i^0 p + j^0 q \pmod{12} + t_1 ap \pmod{12} + t_2 (bp + cq) \pmod{12} = h; \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que le pavage est bien réalisé sur le Tonnetz avec ses points étiquetés.  $\square$

Dans notre démarche de construction de Tonnetze contenant exactement une seule fois chaque classe de hauteur, la région  $T(k; l; m)$  est non seulement intéressante par sa propriété d'engendrer des pavages des Tonnetze dépliés, mais aussi parce qu'elle contient quasiment une seule fois chaque classe de hauteurs au sens du lemme suivant :

**Lemme 2.3.3.** Soit  $T(k; l; m)$  la région définie ci-dessus correspondant à un Tonnetz toroïdal déplié  $T(k; l; m)$ . Alors la partie

$$I := T(k; l; m) \cap \left[ (0; 0) + t_1 j_0 < 1 \right] \cap \left[ (0; 0) + t_2 j_0 < 1 \right]$$

contient une et une seule fois chaque classe de hauteurs ou, en d'autres termes, elle contient exactement un point étiqueté par  $h$  pour tout  $h \in \mathbb{Z}_{12}$ .

Sans perte de généralité, on supposera dans la suite que la base  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  soit orientée positivement et définie de sorte que  $e_1 \cdot e_2 > 0$ , c'est-à-dire que le vecteur  $e_2$  pointe vers l'intérieur du quadrant  $Q$ . On appellera alors  $f(0; 0) + t_1 j_0 < 1$  le bord inférieur et  $f(0; 0) + t_2 j_0 < 1$  le bord gauche de  $T(k; l; m)$ .

Démonstration. On rappelle d'abord que, d'après la remarque 2.1.β,  $p$  et  $q$  (comme choisis ci-dessus) sont premiers entre eux. Comme, par définition d'un Tonnetz toroïdal déplié (définition 2.3.8), les points de coordonnées  $i e_1 + j e_2$  (pour  $i, j \in \mathbb{Z}$ ) correspondent aux points étiquetés par les classes de hauteurs  $i p + j q \pmod{12}$ , le lemme de Bachet-Bézout implique que, pour tout  $h \in \mathbb{Z}_{12}$ , il existe  $i^0, j^0 \in \mathbb{Z}$  tels que  $i^0 p + j^0 q \equiv h \pmod{12}$ . On en déduit que toutes les classes de hauteurs sont donc représentées dans  $\mathbb{F}(k; l; m)$ . D'après le lemme précédent 2.3.2,  $\tau(k; l; m)$  définit une région fondamentale du Tonnetz  $T(k; l; m)$  et contient par conséquent aussi au moins une fois chaque classe de hauteur  $h \in \mathbb{Z}_{12}$ . Si une classe de hauteur se trouve représentée sur le bord supérieur  $(a; 0) + t_1 j^0 < 1g$  (respectivement sur le bord droit  $(a; 0) + t_2 j^0 < 1g$ ) de  $\tau(k; l; m)$ , alors par translation de vecteur  $t_1$  (respectivement  $t_2$ ), elle se trouve aussi représentée sur le bord inférieur (respectivement gauche). On conclut donc que  $\tau$  contient au moins un point étiqueté par  $h$  pour tout  $h \in \mathbb{Z}_{12}$ .

Supposons maintenant qu'il existe  $h \in \mathbb{Z}_{12}$  tel que  $\tau$  contienne deux points distincts  $x$  et  $x^0$  étiquetés par  $h$  de coordonnées respectivement  $i^0 e_1 + j^0 e_2$  et  $i^0 e_1 + j^0 e_2$  (avec  $i, j, i^0, j^0 \in \mathbb{Z}$ ). Supposons, sans perte de généralité, que  $j^0 < j$ . Alors  $j^0 < j < c$  par définition de  $\tau$  et du vecteur  $t_2 = (b; \varphi)$ . De même,  $a < i^0 < i < a$  par définition de  $\tau$  et du vecteur  $t_1 = (a; 0)$ .

Par ailleurs, par définition d'un Tonnetz toroïdal déplié (définition 2.3.8), on obtiendrait  $(i - i^0)p + (j^0 - j)q \equiv 0 \pmod{12}$ . Alors, de nouveau par définition d'un Tonnetz toroïdal déplié, soit le point de coordonnées  $(i^0 - i) e_1 + (j^0 - j) e_2$ , soit celui de coordonnées  $(i^0 - i + a) e_1 + (j^0 - j) e_2$  définirait un point étiqueté par  $h$  dans  $\tau$ . Comme  $j^0 < j < c$ , ce point serait plus proche de l'axe  $\mathbb{R} e_1$  que le point de coordonnées  $(b; \varphi)$  ce qui contredirait la définition de ce dernier. On en conclut qu'il n'existe pas deux points étiquetés par la même classe de hauteur dans  $\tau$ . □

Ce dernier lemme montre que les seules classes de hauteurs représentées plusieurs fois dans  $\tau(k; l; m)$  se trouvent sur son bord. Comme on a montré en plus que  $\tau(k; l; m)$  engendre un pavage du Tonnetz  $T(k; l; m)$ , son bord droit est plus précisément l'image par translation de vecteur  $t_1$  de son bord gauche et son bord supérieur l'image par translation de vecteur  $t_2$  de son bord inférieur. Ces propriétés nous permettent dans la suite de définir, par identification des côtés opposés de la région parallélogrammatique  $\tau(k; l; m)$ , le Tonnetz replié en tant que tore plat sur lequel chaque classe de hauteur se trouve représentée exactement une seule fois.

### 2.3.2 Les Tonnetze toroïdaux en tant que tores plats

Afin de fonder mathématiquement la formalisation des Tonnetze en tant que tores plats, on introduit le cadre formel suivant impliquant la notion de réseaux de  $\mathbb{R}^n$  et la définition du tore plat en tant que quotient du plan euclidien par un réseau de  $\mathbb{R}^2$  :

Définition 2.3.4 (Réseau de  $\mathbb{R}^n$ ). On appelle réseau (angl. lattice) de  $\mathbb{R}^n$  tout sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^n$ . On définit un réseau par les vecteurs qui l'engendrent : soit  $(b_1; \dots; b_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ , alors on notera  $\Lambda = \langle b_1; \dots; b_n \rangle := \sum_{i=1; \dots; n} z_i b_i \mid z_i \in \mathbb{Z}$  le réseau engendré.

Propriétés 2.3.5 ([7], [19], [27], [32], [36]) On peut montrer que tout réseau de  $\mathbb{R}^2$  agit librement et proprement discontinûment par translations sur  $\mathbb{R}^2$  ce qui, d'après le théorème 2.3.6 induit une

7. Le lemme de Bachet-Bézout affirme que, pour  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si et seulement si il existe  $x, y \in \mathbb{Z}$  tels que  $ax + by = 1$ .

8.

Théorème 2.3.6 ([32], Theorem 21.13). Soit  $M$  une variété lisse connexe et soit  $\Gamma$  un groupe discret agissant lis-

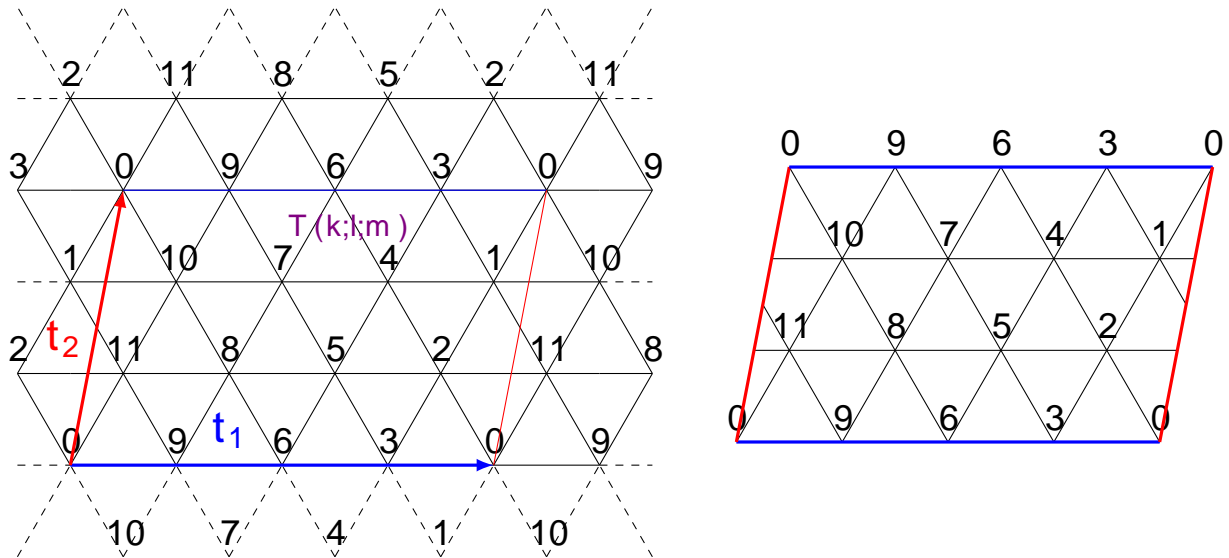


Figure 4 Exemple d'une région fondamentale de type  $T_{(k;l;m)}$  (à gauche de la figure) et d'une réalisation du Tonnetz déplié  $\mathcal{P}(1;2;9)$  (à droite de la figure). La région  $T_{(k;l;m)}$  est construite en tant que région parallélogrammatique engendrée par les vecteurs  $t_1$  et  $t_2$ . La structure de tore plat s'obtient en identifiant deux à deux les côtés opposés (en rouge et en bleu) de celle-ci.

structure de variété différentielle sur le quotient  $T := \mathbb{R}^2 / \Gamma$  muni de la topologie quotient. De plus,  $T$  hérite d'une métrique riemannienne induite par passage au quotient. Notons  $R^2 \rightarrow T$  la projection canonique et  $d_x : T_x \mathbb{R}^2 \rightarrow T_x T$  sa différentielle en un point  $x \in \mathbb{R}^2$ . Si  $g$  désigne la métrique euclidienne canonique, alors, pour  $p \in T$ ,  $X, Y \in T_p T$  et  $x \in R^2(p)$ , on peut montrer que

$$g_p(X; Y) = g_x(d_x^{-1}(X); d_x^{-1}(Y))$$

définit une métrique riemannienne sur  $T$ . On peut montrer, par ailleurs, qu'en tant que surface riemannienne,  $(T; g)$  possède une courbure de Gauss qui est nulle en tout point et définit donc une variété plate.

Finalement, notons  $d_e$  la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$  et soient  $p, q \in T$ . Alors, on retient que

$$d(p; q) = \min_{x, y \in \mathbb{R}^2} \{ d_e(x; y) \mid (x) = p \text{ et } (y) = q \}$$

définit une distance sur  $T$ .

**Définition 2.3.7 (Tore plat).** Si  $\Gamma$  est un réseau de  $\mathbb{R}^2$ , on appelle tore plat l'espace quotient  $\mathbb{R}^2 / \Gamma$  muni d'une structure de variété riemannienne comme décrit ci-dessus ainsi que toute variété riemannienne isométrique à celui-ci.

Cette définition implique que, topologiquement, un tore plat correspond à une région fondamentale parallélogrammatique dont on identifie deux à deux les côtés opposés, comme illustré sur la figure 5.

Ayant préparé ce cadre mathématique correspondant au tore plat, on peut définir maintenant les Tonnetze toroïdaux repliés en tant que tores plats obtenus à partir des réalisations dépliées des Tonnetze et des régions fondamentales de type  $T_{(k;l;m)}$  qui engendrent des pavages des Tonnetze dépliés. (On réfère de nouveau à la figure 4 pour une visualisation de cette formalisation.)

sement, librement et proprement discontinûment sur  $M$ . Alors l'espace quotient  $\mathbb{R}^2 / \Gamma$  est porteur d'une structure de variété différentielle lisse.

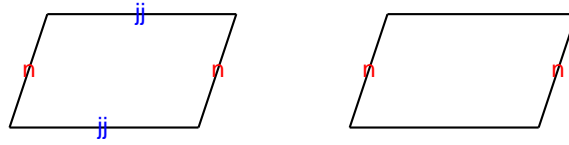


Figure 5 Présentation schématique des topologies correspondant au tore plat (à gauche) et au cylindre plat (à droite). Tandis que le tore plat peut être obtenu à partir d'une région en forme de parallélogramme dont on identifie deux à deux les côtés opposés, le cylindre plat correspond à une identification de deux côtés opposés parmi les quatre côtés d'une région parallélogrammatique.

Définition 2.3.8 (Réalisation repliée d'un Tonnetz toroïdal) Soient  $k < l < m \in \mathbb{Z}_{12}$  des classes d'intervalles caractérisant un Tonnetz toroïdal. On appelle réalisation repliée du Tonnetz engendrée par  $k, l$  et  $m$  tout quotient

$$\mathbb{P}(k; l; m) := T(k; l; m) \quad ;$$

où  $T(k; l; m)$  est une réalisation dépliée du Tonnetz toroïdal engendrée par les mêmes classes d'intervalles  $k, l$  et  $m$  et où  $\mathbb{R}^2 := \{t_1; t_2\}$  désigne le réseau défini par la région fondamentale associée  $\mathbb{P}(k; l; m)$  comme décrit précédemment au paragraphe 2.3.1.

Grâce aux propriétés du paragraphe 2.3.1 et notamment à la construction de  $\mathbb{P}(k; l; m)$  et au lemme 2.3.3, cette définition du Tonnetz toroïdal replié donne une formalisation du Tonnetz en tant que surface sur laquelle chaque classe de hauteur se trouve représentée exactement une fois.

Remarque 2.3.9. Techniquement, on peut même considérer le Tonnetz  $\mathbb{P}(k; l; m) := T(k; l; m)$  comme pavage du tore plat  $\mathbb{R}^2$  par une seule copie du pavé  $T(k; l; m)$ .

On remarque d'ailleurs que l'étude de pavages du tore plat a fait l'objet de nombreux travaux (on réfère à titre d'exemples à [18], [19], [21] et [37]).

Dans une approche générale, Costa et al. [19] donnent une construction de pavages  $\mathbb{R}^n$  de pour un réseau de  $\mathbb{R}^n$  et en considérant des sous-réseaux de

### 2.3.3 Le passage au quotient pour les Tonnetze cylindriques

Suivant une approche similaire à celle des Tonnetze toroïdaux, on construit les Tonnetze cylindriques repliés en tant que cylindres plats qui contiennent exactement une fois chaque classe de hauteurs. À cette fin, on considère tout d'abord une réalisation dépliée d'un Tonnetz cylindrique  $T(k; l; m)$  engendrée par une base  $(e_1; e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  et centrée au point  $(0; 0)$ . Soient  $p$  et  $q$  les classes d'intervalles associées respectivement à  $e_1$  et  $e_2$  de sorte que les points de coordonnées  $i e_1 + j e_2$  (pour  $i \in \mathbb{Z}$  et  $j \in \{0; 1\}$ ) sont étiquetés par les classes de hauteurs  $p + j q \pmod{12}$  comme défini au paragraphe 2.2 (définition 2.3.10).

Notons  $(a; 0)$  les coordonnées dans la base  $(e_1; e_2)$  du point étiqueté par un  $o$  le plus proche de l'origine suivant l'axe engendré par le vecteur  $e_1$  :

$$(a; 0) := \arg \min_{x \in \mathbb{Z}} d_e(x; (0; 0))$$

où  $d_e$  désigne la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$  et où

$$x := \lfloor x \rfloor \times 2 \mathbb{R}_+ \quad e_1 \text{ n'f}(0; 0) \text{ g} \text{ j} x \text{ est étiqueté par un } o \text{ g.}$$

Soit  $t := (a; 0)$  et soit  $G := \{T_{(t; j)} \mid j \in \mathbb{Z}\}$  le groupe des translations discrètes engendrées par  $t$  et  $e_2$ . Alors la région parallélogrammatique engendrée par

$$T(k; l; m) := \text{Conv} \{ f(0; 0); t; e_2; t + e_2 g \},$$

défini une région fondamentale du Tonnetz cylindrique  $T(k; l; m)$  et  $G_{T(k; l; m)}$  en réalise un pavage.

Similairement au cas des Tonnetze toroïdaux, on remarque que la partie

$$+ := T(k; l; m) [ (0; 0) + t j 0 < 1 [ (0; 0) + e_2 j 0 < 1$$

contient exactement une fois chaque classe de hauteur et que son côté  $(a; 0) + e_2 j 0 < 1g$  est l'image par translation de vecteur du côté  $f(a; 0) + e_2 j 0 < 1g$ . Finalement, on définit, par identification de ces deux côtés opposés de la région parallélogrammatique  $P(k; l; m)$ , le Tonnetz cylindrique replié en tant que cylindre plat sur lequel chaque classe de hauteur se trouve représentée exactement une seule fois :

Définition 2.3.10 (Réalisation repliée d'un Tonnetz cylindrique) Soient  $k \mid l \mid m \in \mathbb{Z}_{12}$  des classes d'intervalles définissant un Tonnetz cylindrique. On appelle réalisation repliée du Tonnetz cylindrique engendrée par  $k, l$  et  $m$  tout quotient

$$\mathcal{P}(k; l; m) := T(k; l; m) / \sim;$$

où  $T(k; l; m)$  est une réalisation dépliée du Tonnetz cylindrique engendrée par les mêmes classes d'intervalles  $k, l$  et  $m$  et où  $\sim$  désigne le réseau engendré par le vecteur  $u = (a; 0)$  défini plus haut.

## 2.4 Positionnement d'accords dans les Tonnetze

Au chapitre 3, on souhaite donner un cadre formel à la notion de trajectoire dans un Tonnetz, notamment en faisant correspondre à un enchaînement harmonique entre deux accords une courbe reliant des représentations de ces accords dans le Tonnetz. Dans ce but, il est essentiel de bien définir la façon de laquelle un accord se trouve représenté dans les différentes versions de Tonnetze. Dans un premier temps, on considère chaque accord un ensemble de classes de hauteurs non ordonnées et on lui attribue un placement dans un Tonnetz par l'intermédiaire d'une fonction de positionnement. On formalisera une telle fonction de positionnement en tant que multifonction définie sur l'ensemble des ensembles de classes de hauteurs non ordonnées :

Définition 2.4.1 (Multifonction [4]). Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles non vides. On appelle multifonction de  $X$  dans  $Y$  (et on note  $X \rightarrow Y$ ) toute fonction  $X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ , c'est-à-dire toute fonction allant de  $X$  dans l'ensemble des parties de  $Y$ .

Définition 2.4.2 (Fonction de positionnement dans un Tonnetz) Soit  $E_{ECH}$  l'ensemble des ensembles de classes de hauteurs non ordonnées et soit  $T$  un Tonnetz quelconque. On appelle fonction de positionnement dans  $T$  toute multifonction  $P : E_{ECH} \rightarrow T$ .

Exemple 2.4.3. Si  $T$  est un Tonnetz déplié ou replié quelconque, alors un exemple simple d'une fonction de positionnement dans  $T$  est donné par la multifonction qui à un ensemble de classes de hauteurs  $C \in E_{ECH}$  associe l'ensemble des points de  $T$  étiquetés par les différentes classes de hauteurs appartenant à  $C$ .

En vue des applications pratiques abordées aux chapitres 5 et 6, on s'intéressera particulièrement à un seul type de fonctions de positionnement bien choisi qu'on notera dans la suite pour un Tonnetz déplié ou replié quelconque  $\mathcal{P}$ .

Ainsi, au lieu de pouvoir représenter des progressions harmoniques par des courbes reliant les représentations de différents accords dans un Tonnetz, on souhaiterait encore restreindre, par rapport au premier exemple 2.4.3, le nombre de points associés à un accord. Dans ce but, on propose de considérer l'ensemble des points d'un Tonnetz étiquetés par les différentes classes de hauteurs appartenant à  $C$  comme les sommets d'un polygone et de déterminer les barycentre de ce polygone.

Définition 2.4.4 (Isobarycentre d'un polygone) Soit  $Q$  un polygone de sommets  $Q_1; \dots; Q_N \in \mathbb{R}^2$ . Alors on appelle isobarycentre de  $Q$  l'unique point  $B_Q \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\vec{AB}_Q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{AQ}_i \quad \text{pour tout point } A \in \mathbb{R}^2.$$

En partant de cette idée d'isobarycentre, on définit la fonction de positionnement  $P_{T(k;l;m)}$  dans un Tonnetz déplié  $T(k;l;m)$  comme suit :

Soit un ensemble de classes de hauteurs  $C \subseteq E_{ECH}$ . On détermine tous les polygones  $Q_C$  de périmètre minimal qui ont exactement un sommet étiqueté par  $h$  dans  $T(k;l;m)$  pour chaque classe de hauteurs  $h \in C$ . Pour chacun de ces polygones  $Q_C$  retenus, on détermine l'isobarycentre  $B_{Q_C}$  de ses sommets. Finalement, on fait correspondre à  $C$  par  $P_{T(k;l;m)}$  l'ensemble des isobarycentres  $B_{Q_C}$  trouvés par cette procédure.

Dans le cas d'un Tonnetz replié  $F(k;l;m)$ , on commence par positionner les ensembles de classes de hauteurs dans le Tonnetz déplié engendré par les mêmes classes de hauteurs  $C$  dans  $T(k;l;m)$  :

Soit un ensemble de classes de hauteurs  $C \subseteq E_{ECH}$ . On détermine l'ensemble des isobarycentres  $B_{Q_C}$  attribués à  $C$  par  $P_{T(k;l;m)}$ . Puis, on définit le positionnement de  $C$  par  $P_{F(k;l;m)}$  comme l'ensemble des classes d'équivalence des points  $B_{Q_C}$  dans l'espace quotient  $F(k;l;m)$ .

À titre d'exemples, on illustre le positionnement des ensembles de classes de hauteurs  $[0; 4; 7]$  et  $[1; 4; 7; 10]$  sur les figures 6 et 7.

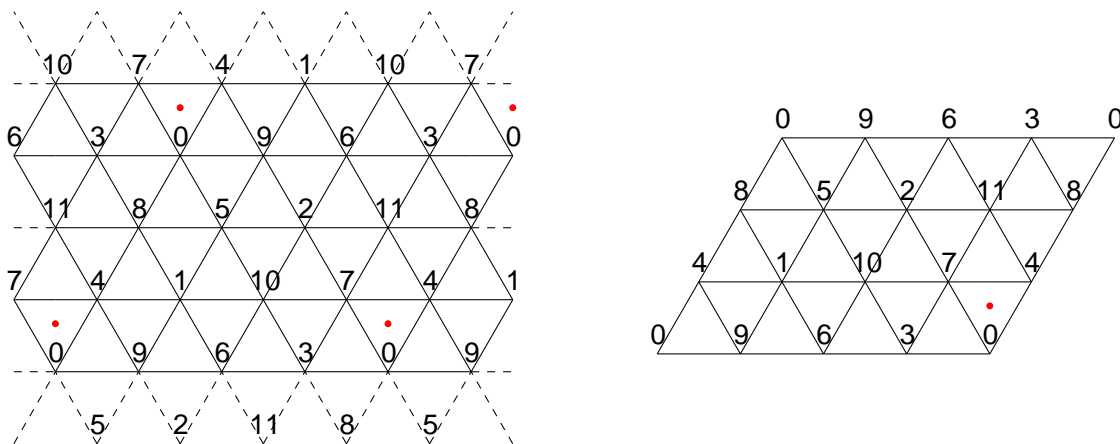


Figure 6 Positionnement de l'ensemble de classes de hauteurs  $[0; 4; 7]$  (correspondant à un accord de do majeur) dans les Tonnetzes  $T(3; 4; 5)$  et  $F(3; 4; 5)$ . Les polygones de périmètre minimal dans  $T(3; 4; 5)$  dont les sommets sont étiquetés par les classes de hauteurs 0, 4 et 7 sont exactement les faces simpliciales triangulaires du Tonnetz déplié par les classes de hauteurs 0, 4 et 7. Ainsi, l'accord  $[0; 4; 7]$  sera positionné en tous les isobarycentres de ces faces triangulaires dans le Tonnetz déplié  $T(3; 4; 5)$  et en la classe d'équivalence de ces points dans le Tonnetz replié  $F(3; 4; 5)$ .

Remarque 2.4.5 (Généralisation de la représentation duale des Tonnetzes) On remarque que cette façon de positionner les accords dans un Tonnetz attribue en particulier toutes les triades représentées par les faces simpliciales triangulaires des Tonnetzes à l'isobarycentre de ces triangles. Dans ce sens, la fonction de positionnement  $P_{F(k;l;m)}$  engendre une certaine généralisation des duals de Tonnetzes tels que décrits par la définition 2.1.4.

Une des propriétés remarquables de la méthode de positionnement d'accords qu'on vient de définir est qu'elle permet d'interpréter des transpositions d'accords en termes de translations dans le Tonnetz tel que formulé par le lemme suivant :

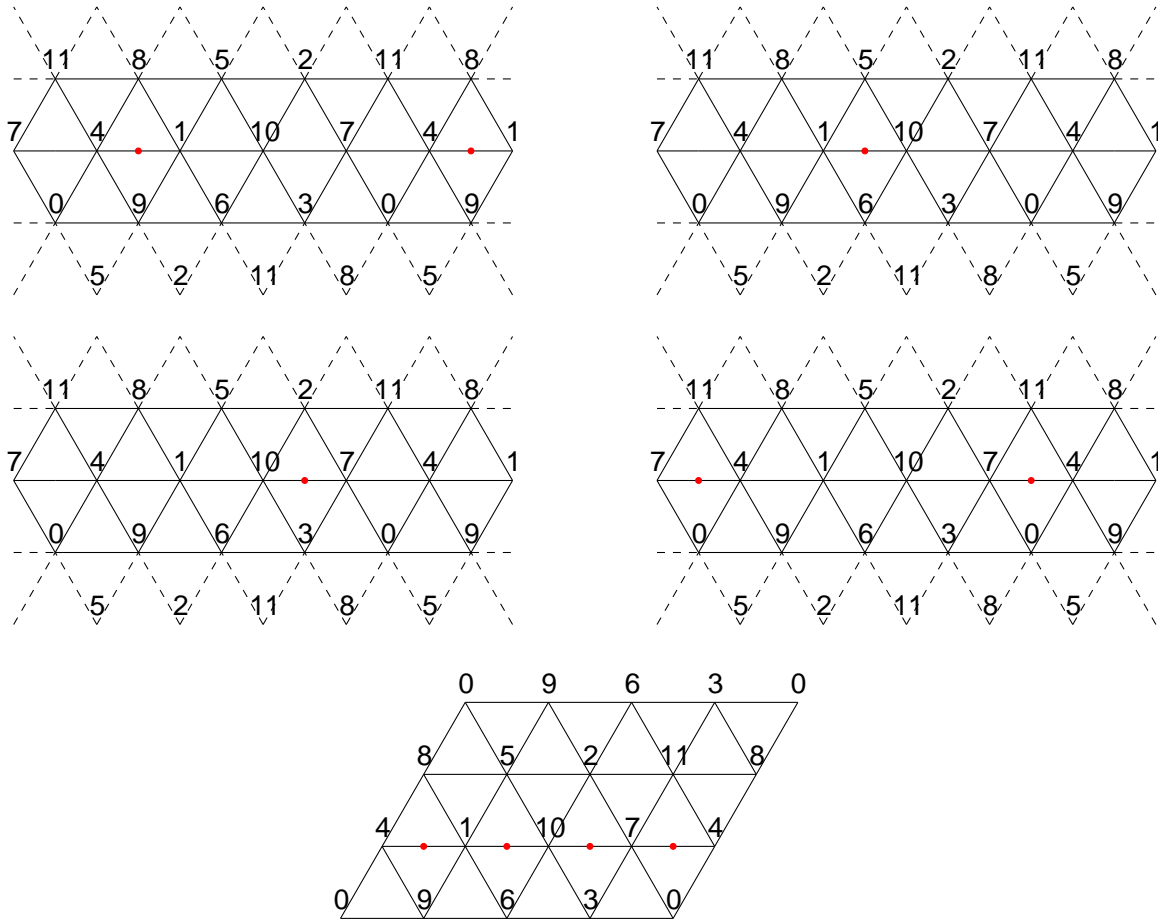


Figure 7 Positionnement de l'ensemble de classes de hauteur  $\{4; 7; 10\}$  (correspondant à un accord de septième diminuée) dans les Tonnetz  $\mathbb{T}(3; 4; 5)$  et  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$ . Les polygones de périmètre minimal correspondants dans  $\mathbb{T}(3; 4; 5)$  sont tous les segments de droite reliant les classes de hauteurs 7 aux classes de hauteurs 10 (en passant par 4 et 1), tous les segments reliant les classes de hauteurs 4 aux classes de hauteurs 7 (en passant par 1 et 10), tous les segments reliant les classes de hauteurs 1 aux classes de hauteurs 4 (en passant par 10 et 7) et tous les segments reliant les classes de hauteurs 10 aux classes de hauteurs 1 (en passant par 7 et 4). Ainsi, l'accord  $\{4; 7; 10\}$  sera positionné en tous les isobarycentres de tous ces segments dans le Tonnetz déplié  $\mathbb{T}(3; 4; 5)$  et en la classe d'équivalence de ces points dans le Tonnetz replié  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$ .

Lemme 2.4.6 (Transpositions d'accords) Soit  $C \in E_{ECH}$  un accord positionné dans un Tonnetz replié  $\mathbb{P}(k; l; m)$  aux points  $P_{\mathbb{P}(k; l; m)}(C)$ . Considérons l'accord  $C^0 \in E_{ECH}$  obtenu en transposant  $C$  d'une classe d'intervalles ordonnée  $h \in \mathbb{Z}_{12}$  et notons  $(i_1; i_2)$  les coordonnées dans  $\mathbb{P}(k; l; m)$  de la classe de hauteur  $h \in \mathbb{Z}_{12}$  telle que  $h = i$ .

Alors les points en lesquels est positionné  $C^0$  sont exactement les points obtenus en translatant tous les points de  $P_{\mathbb{P}(k; l; m)}(C)$  de vecteur  $v = (i_1; i_2)$ .

Démonstration. Montrons ce lemme pour le cas d'un Tonnetz toroïdal  $\mathbb{P}(k; l; m)$  et supposons que sa réalisation dépliée  $\mathbb{T}(k; l; m)$  soit construite suivant des vecteurs  $e_1$  et  $e_2 \in \mathbb{R}^2$  auxquels sont associées les classes de hauteur  $p$  et  $q \in \mathbb{Z}_{12}$ , comme décrit dans la définition 2.3.8.

Par définition de la fonction de positionnement  $P_{\mathbb{P}(k; l; m)}$ , les positions des accords  $C$  (respectivement  $C^0$ ) sont données par les classes d'équivalence des barycentres de tous les polygones (respectivement  $Q_{C^0}$ ) de périmètre minimal qui ont exactement un sommet étiqueté par  $p$  (respectivement  $h^0$ ) pour chaque classe de hauteur  $h \in \mathbb{Z}_{12}$  (respectivement  $h^0 \in \mathbb{Z}_{12}$ ). En raison de la structure



périodique du Tonnetz  $T(k; l; m)$ , l'ensemble des polygones  $Q_C$  est obtenu par translation de l'ensemble des polygones  $Q_C$ . On vérifie qu'une translation de vecteur  $v = (i_1; i_2)$ <sup>9</sup> correspond bien à une transposition de classe d'intervalles ordonnée

Par définition d'une réalisation dépliée d'un Tonnetz toroïdal (définition 2.3.8), les points de coordonnées  $j_1 e_1 + j_2 e_2$  (pour  $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$ ) correspondent exactement aux points étiquetés par les classes de hauteurs  $j_1 p + j_2 q \pmod{12}$ . En particulier, les coordonnées  $(i_1; i_2)$  représentent la classe de hauteurs  $i_1 p + i_2 q \pmod{12}$  et donc, par définition de  $i$ , on a  $i = i_1 p + i_2 q \pmod{12}$ .

Soient maintenant  $c_1 e_1 + c_2 e_2$  (pour  $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ ) les coordonnées d'un des sommets de l'un des polygones  $Q_C$  étiquetés par la classe de hauteurs  $c \in C$ . Alors, le point  $c_1 e_1 + c_2 e_2 + i_1 e_1 + i_2 e_2$  obtenu par translation de ce sommet par le vecteur  $v = (i_1; i_2)$  est étiqueté par la classe de hauteurs  $h = i_1 p + i_2 q \pmod{12} = h + i \pmod{12}$  ce qui correspond à une transposition de classe d'intervalles ordonnée  $i$ .

De même, une translation de vecteur  $v = (i_1; i_2)$  transpose tous les sommets de tous les polygones  $Q_C$  par la classe d'intervalles ordonnée  $i$ . Comme une translation de vecteur  $v$  d'un polygone induit une translation de même vecteur de son barycentre, on conclut qu'un accord positionné dans un Tonnetz toroïdal,  $T(k; l; m)$  ou  $\mathcal{P}(k; l; m)$ , obtenu par translation de vecteur  $v$  à partir des positions d'un accord  $C$ , représente une transposition par la classe d'intervalles  $i$  de l'accord  $C$ .

Il reste à montrer que  $v = (i_1; i_2)$  est le seul vecteur (toujours à translations par  $t_1$  et  $t_2$  près) réalisant une transposition par la classe d'intervalles  $i$ . Ceci est essentiellement une conséquence du lemme 2.3.3 montrant que toute représentation repliée d'un Tonnetz toroïdal contient exactement une seule fois chaque classe de hauteurs :

S'il existait un vecteur  $w = t_1 v + t_2 (t_1 + t_2) j_1; j_2 \in \mathbb{Z}$  engendrant la même transposition que  $v$ , alors les points de coordonnées  $(0; 0) + v$  et  $(0; 0) + w$  définiraient deux points distincts dans  $\mathcal{P}(k; l; m)$  étiquetés par la même classe de hauteurs ce qui contredirait le lemme 2.3.3.

On procédera de façon similaire pour montrer le lemme pour les Tonnetze cylindriques. □

Remarque 2.4.7. On note que l'approche de positionnement d'accords proposée ci-dessus fait abstraction de l'état et de la disposition d'un accord. Ainsi, on introduira une structure de Tonnetz plus riche au paragraphe 2.5 qui permettra de tenir compte des différents renversements d'accords.

## 2.5 Les Tonnetze à poids

On remarque que, dans certains cas, il est possible que deux accords différents soient placés au même endroit dans un Tonnetz (déplié ou replié) par l'intermédiaire de la fonction de positionnement associée  $P_T$ . On peut expliquer ce phénomène de façon formelle par l'non-injectivité de la multifonction  $P_T$  au sens de la définition suivante :

Définition 2.5.1 (Multifonction injective ([4], p. 209)). Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles non vides. Une multifonction  $F : X \rightarrow Y$  est dite injective si

$$\forall x_1, x_2 \in X; F(x_1) \cap F(x_2) = \emptyset$$

Par ailleurs, le positionnement dans un Tonnetz déplié ou replié par  $P_T$  ne tient pas compte de l'état (fondamental ou renversé) d'un accord donné. Ceci n'entravera pas son potentiel d'application à la classification stylistique ou à la génération de suites d'accords (telle que proposées aux paragraphes 5.2, 6.1 et 6.2), mais rendra difficile des analyses harmoniques plus fines. À titre d'exemple, la détection

9. ... et, a fortiori, toute translation de vecteur  $v = t_1 v + t_2 (t_1 + t_2) j_1; j_2 \in \mathbb{Z}$ , où  $t_1$  et  $t_2$  sont les vecteurs définissant la région fondamentale suivant laquelle le Tonnetz toroïdal  $\mathcal{P}(k; l; m)$  est construit.

de cadences parfaites (qui impliquent des accords de dominante et de tonique en état fondamental) dans une pièce de musique exige la connaissance de l'état des accords extraits de la pièce.

Dans l'objectif de remédier à ces deux aspects, on introduit des structures plus riches que les Tonnetz dépliés ou repliés qui tiennent compte du nombre de Forte associé aux différents accords ainsi que de leur état dans lequel ils apparaissent dans une suite d'accords analysée. Tonnetz à poids Mathématiquement, on formalisera ces espaces en tant que fibrés qui ont comme base des Tonnetz repliés.<sup>10</sup>

Définition 2.5.2 (Fibré). Soient  $M$ ,  $E$  et  $F$  des variétés différentielles lisses et soit  $\pi : E \rightarrow M$  une application lisse. Si, pour tout  $p \in M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $p$  et un difféomorphisme

$$\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$$

tel que  $\text{proj}_1 \circ \phi = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$ , alors  $\pi : E \rightarrow M$  est dit fibré de fibre  $F$  et de base  $M$ . On appelle  $E$  son espace total et  $E_p := \pi^{-1}(p) \subset E$  la fibre sur  $p \in M$ .

Exemple 2.5.3 (Fibré trivial). Un fibré de la forme  $\pi : E := M \times F \rightarrow M$  avec  $\pi = \text{proj}_1$  (et tout fibré isomorphe à un tel fibré) est appelé fibré trivial.

Exemple 2.5.4 (Fibré trivial sur un tore plat). Si  $T$  est un tore plat quelconque, alors

$$\pi : T \times \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow T,$$

avec  $\pi = \text{proj}_1$  et où  $S^1$  désigne le cercle unité, définit un fibré trivial de fibre  $\mathbb{R} \times S^1$  et de base  $T$ .

### 2.5.1 Poids déterminés par les nombres de Forte

Dans un premier temps, on souhaite enrichir la représentation des accords dans un Tonnetz en tenant compte de leur nombre de Forte associé. Dans ce but, on propose d'attribuer différents poids  $! \in \mathbb{R}$  à des accords de nature différente (selon leur nombre de Forte). En tant qu'espaces géométriques dans lesquels on positionnera ces accords munis de leurs poids respectifs, on choisit des fibrés de fibre  $\mathbb{R}$  et ayant comme base un Tonnetz replié :

Définition 2.5.5 (Tonnetz replié à poids déterminés par les nombres de Forte). Soit  $\mathcal{T}(k; l; m)$  un Tonnetz replié quelconque. On appelle Tonnetz replié à poids déterminés par les nombres de Forte (ou simplement Tonnetz à poids de Forte) le fibré trivial

$$\pi : \mathcal{T}^F(k; l; m) := \mathcal{T}(k; l; m) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T}(k; l; m), \text{ avec } \pi = \text{proj}_1.$$

La définition d'une fonction de positionnement dans le Tonnetz à poids  $\mathcal{T}^F(k; l; m)$  peut se déduire de façon naturelle à partir de la fonction de positionnement  $P_{\mathcal{T}(k; l; m)}$  (définie au paragraphe 2.4) dans le Tonnetz replié sans poids  $\mathcal{T}(k; l; m)$  qui constitue la base du Tonnetz à poids. Ainsi, on exigera que la projection des positions d'un accord  $C \in E_{\text{ECH}}$  dans un Tonnetz à poids sur la base  $\mathcal{T}(k; l; m)$  équivaille au positionnement de  $C$  dans  $\mathcal{T}(k; l; m)$ . Formellement, on souhaiterait qu'une fonction de positionnement  $P_{\mathcal{T}^F(k; l; m)}$  vérifie

$$P_{\mathcal{T}^F(k; l; m)}(C) = P_{\mathcal{T}(k; l; m)}(C) \text{ pour tout } C \in E_{\text{ECH}}.$$

10. On justifie ce choix par la richesse des fibrés en tant que structures impliquant des notions telles que les sections de fibrés (voir paragraphe 3.3), bien que d'autres cadres formels soient envisageables.

11. On désigne par  $\text{proj}_i$  la projection sur la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée. Pour une famille d'ensembles  $X_j, j = 1, \dots, n$ , on définit :  $\text{proj}_i((x_1; \dots; x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n) = x_i$

Afin de traduire le nombre de Forte d'un accord en tant que poids  $\in \mathbb{R}$ , il suffit de définir un ensemble de poids  $\mathbb{W}^F \subseteq \mathbb{R}$  et une fonction  $w^F : E_{ECH} \rightarrow \mathbb{W}^F$  qui engendre une bijection entre l'ensemble des nombres de Forte et l'ensemble de poids  $\mathbb{W}^F$ . Comme les nombres de Forte sont donnés sous la forme de couples  $n_1 n_2$  ou  $n_1 n_2 X$  (avec  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  et où  $X$  désigne soit la lettre A, soit la lettre B), on vérifie qu'une application de la forme suivante répond à nos exigences :

$$\begin{aligned} w^F(C) &= n_1 k n_2 && \text{pour } C \in E_{ECH} \text{ de nombre de Forte } n_1 n_2; \\ w^F(C) &= n_1 k n_2 && \text{pour } C \in E_{ECH} \text{ de nombre de Forte } n_1 n_2 A; \\ w^F(C) &= n_1 k n_2 + \frac{1}{2} && \text{pour } C \in E_{ECH} \text{ de nombre de Forte } n_1 n_2 B; \end{aligned}$$

où  $n_1 k n_2 := n_1 \cdot 10^{\log_{10}(bn_2c+1)} + n_2$  désigne le nombre obtenu par concaténation des chiffres de  $n_1$  et de  $n_2$ .

Ces réflexions nous permettent finalement de définir une fonction de positionnement  $P_{\mathbb{P}^F(k;l;m)} : E_{ECH} \rightarrow \mathbb{P}^F(k;l;m)$  dans un Tonnetz à nombres de Forte par

$$P_{\mathbb{P}^F(k;l;m)}(C) := P_{\mathbb{P}(k;l;m)}(C) \cdot w^F(C), \text{ pour } C \in E_{ECH}.$$

Exemple 2.5.6. Le nombre de Forte associé aux accords parfaits mineurs est 1A, celui associé aux accords parfaits majeurs est 11B. Ainsi les poids associés à un accord de majeur  $C_0$  (correspondant à l'ensemble de classes de hauteurs  $[2,6,9]$ ) et à un accord de mineur  $C_1$  (correspondant à l'ensemble de classes de hauteurs  $[2,7,10]$ ) sont respectivement  $w^F(C_0) = 311$  et  $w^F(C_1) = 311;5$ . Leurs positions dans le Tonnetz à nombres de Forte  $\mathbb{P}^F(3;4;5)$  seront par conséquent

$$P_{\mathbb{P}^F(k;l;m)}(C_0) = (p_0; 311) \text{ et } P_{\mathbb{P}^F(k;l;m)}(C_1) = (p_1; 311;5),$$

où  $p_0$  et  $p_1$  sont les isobarycentres respectivement des triangles de sommets étiquetés par les classes de hauteurs 2, 6 et 9 (correspondant à l'accord de majeur) et 2, 7, et 10 (correspondant à l'accord de sol mineur).

## 2.5.2 Attribution de poids en fonction des états d'accords

Après avoir informé les positionnements d'accords dans les Tonnetzes par leur nature (qu'on a identifiée avec leur nombre de Forte), on souhaiterait également trouver une représentation géométrique de leur état. On rappelle tout d'abord que, afin de pouvoir formaliser des accords en tenant compte de leur état, il sera nécessaire de les considérer ici comme des ensembles de classes de hauteurs ordonnés (qui sont des éléments de  $E_{ECH}^<$ ).

De plus, on rappelle que la notion d'état d'un accord est souvent liée à un contexte musical et on basera l'approche proposée sur l'hypothèse que les Tonnetzes  $\mathbb{T}(3;4;5)$  et  $\mathbb{P}(3;4;5)$  (engendrés par les classes d'intervalles 3, 4 et 5) sont particulièrement bien adaptés à l'analyse de la musique tonale.

Par ailleurs, on admettra que les accords dont on voudrait déterminer les états correspondent aux accords dont le positionnement dans le Tonnetz replié  $\mathbb{T}(3;4;5)$  par la fonction de positionnement  $P_{\mathbb{P}(3;4;5)}$  est réduit à un point. Ceci semble musicalement justifié dans le sens où, d'un côté, tous les accords parfaits majeurs et parfaits mineurs, les accords de septième de dominante et les accords de septième mineure se trouvent représentés par un seul point dans  $\mathbb{T}(3;4;5)$  par l'intermédiaire de la fonction de positionnement  $P_{\mathbb{P}(3;4;5)}$ . De l'autre côté, des accords à géométrie symétrique comme les accords de septième diminuée et les accords de quinte augmentée pour lesquels la détermination d'une fondamentale peut être musicalement ambiguë, sont représentés par plusieurs points dans le Tonnetz  $\mathbb{P}(3;4;5)$ .

En particulier, une telle approche serait sûrement ne pour détecter des candidats pour plusieurs types de cadences, comme les cadences parfaites qui, le plus souvent, impliquent des successions d'accords du type

$$V^5 ! I^5 \text{ ou } V^7 ! I^5,$$

où  $V^5$  et  $I^5$  désignent des accords parfaits en position fondamentale respectivement sur le degré de la dominante et sur la tonique d'une certaine tonalité et où  $V^7$  désigne un accord de septième de dominante en position fondamentale sur le degré de la dominante.

Les espaces géométriques pour lesquels on formulera un tel positionnement d'accords munis d'un poids dépendant de leur nature et de leur état sont des brés de bré  $\mathbb{R} \times S^1$  basés sur un Tonnetz replié. Une présentation schématique d'une telle structure est donnée par la figure 8.

Définition 2.5.7 (Tonnetz replié à poids déterminés par les nombres de Forte et les états d'accords). Soit  $\mathcal{T}(k; l; m)$  un Tonnetz replié quelconque. On appelle Tonnetz replié à poids déterminés par les nombres de Forte et les états d'accords (ou simplement Tonnetz à nombres de Forte et à états d'accords) le bré trivial

$$\mathcal{T}_E^F(k; l; m) := \mathcal{T}(k; l; m) \times \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathcal{T}(k; l; m), \text{ avec } \pi = \text{proj}_1.$$

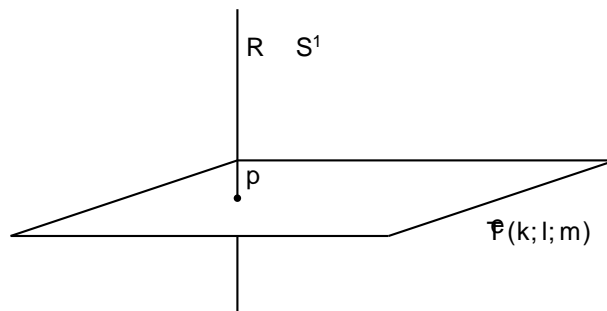


Figure 8 Présentation schématique du Tonnetz à poids déterminés  $\mathcal{T}_E^F(k; l; m)$  dont la formalisation en tant que bré associe à chaque point du Tonnetz replié  $\mathcal{T}(k; l; m)$  une bré du type  $\mathbb{R} \times S^1$ .

L'attribution d'un poids concret qui tient compte de l'état d'un accord est basée sur l'observation suivante :

Exemple 2.5.8. Considérons les représentations de l'ensemble des accords parfaits majeurs dans le Tonnetz  $\mathcal{T}(3; 4; 5)$  telles que présentées sur la figure 9. On observe alors que toutes les classes de hauteurs correspondant aux basses des états fondamentaux de ces accords ont la même position par rapport aux isobarycentres représentant ces accords et se trouvent plus précisément représentées en bas de ces isobarycentres. De même, toutes les basses correspondant aux premiers renversements de ces accords parfaits majeurs ont la même position par rapport aux isobarycentres, tout comme les basses correspondant aux deuxièmes renversements des accords.

De manière formelle et générale, on peut exprimer cette équivalence comme suit :

Proposition 2.5.9. Soit  $\mathcal{T}(3; 4; 5)$  une réalisation repliée du Tonnetz engendré par les classes d'intervalles 3, 4 et 5. Considérons deux ensembles de classes de hauteurs ordonnés  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2 \subseteq E_{ECH}^<$  ayant comme basse les classes de hauteurs  $h_1 \in \mathbb{Z}_{12}$ . Supposons en plus que ces ensembles de classes de hauteurs ordonnés ont le même nombre de Forte et que leur positionnement par rapport à  $\mathcal{T}(3; 4; 5)$  est réduit à unique point  $p_n$  (pour  $n = 0; 1$ ) du Tonnetz.<sup>12</sup>

12. c'est-à-dire, de façon équivalente,  $\text{Card}_{\mathcal{T}(3; 4; 5)}(C_n) = 1$  pour tout  $n \in \{0; 1\}$ ;

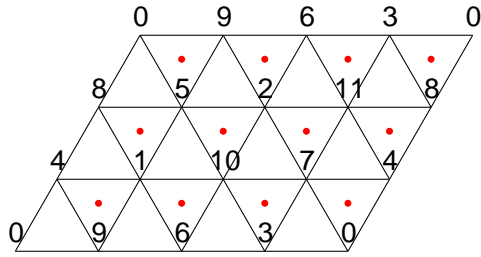


Figure 9 Représentation de l'ensemble des accords parfaits majeurs dans le Tonnetz  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$ .

Considérons, pour  $2 \leq h_n \leq 11$ , le segment géodésique minimal (supposé unique)

$$\gamma_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{P}(3; 4; 5),$$

avec  $\gamma_n(0) = p_n$  et  $\gamma_n(1) = P_{\mathbb{P}(3;4;5)}(h_n)$  qui relie  $p_n$  la position de l'accord  $C_n$  avec la classe de hauteur  $h_n$  correspondant à sa basse. Notons, nalement,  $v_n = \dot{\gamma}_n(0) \in T_{p_n} \mathbb{P}(3; 4; 5)$  leur vecteur vitesse associé.

Alors, les accords  $C_0$  et  $C_1$  sont dans le même état si et seulement si  $v_0 = v_1$ :<sup>14</sup>

Démonstration. On remarque tout d'abord que deux accords  $C_0$  et  $C_1$  de même nombre de Forte sont des transpositions l'un de l'autre par une certaine classe d'intervalles ordonnée  $\mathbb{Z}_{12}$ . Comme exprimé par le lemme 2.4.6 et formalisé dans la démonstration de ce même lemme, les polygones  $Q_{C_0}$  et  $Q_{C_1}$  de périmètre minimal dans le Tonnetz déplié  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$  dont sont issus les positionnements de  $C_0$  et  $C_1$  sont des translations l'un de l'autre. En particulier, les ensembles de leurs sommets étiquetés sont des translations l'un de l'autre et chaque translation entre deux sommets correspond à une transposition pari de leurs classes de hauteurs associées. On vérifie ainsi facilement que le segment reliant le barycentre de  $C_0$  avec la note fondamentale de  $C_0$  est obtenu par translation du segment reliant le barycentre de  $C_1$  avec la fondamentale de  $C_1$ . De même, le segment reliant l'isobarycentre de  $C_0$  avec la classe de hauteurs correspondant à la basse d'un renversement de  $C_0$  est obtenu par translation du segment reliant l'isobarycentre de  $C_1$  avec la basse du même type de renversement de  $C_1$ . Il s'ensuit que les segments géodésiques dans le Tonnetz replié  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$  reliant les positionnements de deux accords à la basse correspondant à un même état d'accords sont obtenus par translation l'un de l'autre et partagent le même vecteur vitesse.

La réciproque de la proposition découle de l'observation que des segments géodésiques dans  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$  partant de l'isobarycentre de deux accords avec deux vecteurs vitesse différents aboutissent à des classes de hauteurs correspondant aux basses d'états d'accords différents comme on a supposé l'unicité des segment géodésiques minimaux dans l'énoncé de la proposition. □

Cette relation entre l'état d'un accord et le segment reliant la représentation de cet accord dans le Tonnetz  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$  à sa basse nous permet de définir maintenant un ensemble de poids  $W_E \subset \mathbb{R}^1$  et une fonction de poids  $w_E : E_{ECH}^{\leq} \rightarrow W_E$  de la façon suivante :

Soit, pour  $C \in E_{ECH}^{\leq}$ , le vecteur vitesse  $v_C(0) \in T_{P_{\mathbb{P}(3;4;5)}(C)} \mathbb{P}(3; 4; 5)$  du segment géodésique minimal reliant la position de  $C$  dans le Tonnetz à sa basse comme décrit dans la proposition 2.5.9. Notons  $\alpha_C$  l'angle orienté entre le vecteur  $e_1$  et  $v_C(0)$ . Alors, on définit le poids associé à  $C$  par

13. On utilise ici le terme de segment géodésique minimal entre deux points  $p$  et  $q$  d'une variété riemannienne par opposition aux segments géodésiques dont la longueur ne correspond pas à la distance entre  $p$  et  $q$ . Sur la sphère unité  $S^2$ , par exemple, le segment géodésique reliant les points  $(1; 0; 0)$  et  $(-\frac{2}{\sqrt{2}}; 0; \frac{2}{\sqrt{2}})$  en passant par le pôle Nord  $(0; 0; 1)$  de la sphère est minimal, tandis que celui passant par le pôle sud  $(0; 0; -1)$  ne l'est pas.

14. A n de pouvoir considérer cette égalité, on identifie les espaces tangents de  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$  en  $p_0$  et en  $p_1$  à  $\mathbb{R}^2$  par  $T_{p_0} \mathbb{P}(3; 4; 5) = f_{p_0} \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 = f_{p_1} \mathbb{R}^2 = T_{p_1} \mathbb{P}(3; 4; 5)$ .

$$w^F(C) = e^j \cdot 2 S^1.$$

Finalement, on définit une fonction de positionnement  $P_{\mathbb{P}_E^F(3;4;5)} : E_{ECH} \rightarrow \mathbb{P}^F(k; l; m)$  dans le Tonnetz à nombres de Forte et à états d'accords  $\mathbb{P}_E^F(3; 4; 5)$  par

$$P_{\mathbb{P}_E^F(3;4;5)}(C) := P_{\mathbb{P}(3;4;5)}(C) \cdot w^F(C); w_E(C), \text{ pour } C \in E_{ECH}^<.$$

Exemple 2.5.10. Considérons un accord de ré majeur en position fondamentale (qui a donc comme basse un ré) ayant comme ensemble de classes de hauteurs ordonné associé  $[2; 6; 9]$  ainsi qu'un accord de sol majeur en premier renversement (ayant un si à la basse) d'ensemble de classes de hauteurs ordonné associé  $C_1 = [11; 7; 2]$ . Comme ces deux accords sont des accords parfaits majeurs, leur poids de Forte associé est donné par  $w^F(C_0) = w^F(C_1) = 311$ , comme déterminé plus haut dans l'exemple 2.5.6.

Supposons maintenant que le Tonnetz dans lesquels ces accords seront positionnés soit engendré par la base  $(e_1; e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  avec  $e_1 = (1; 0)$  et  $e_2 = (\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$  et que les classes d'intervalles associées à  $e_1$  et  $e_2$  soient respectivement 3 et 4.

Notons en plus  $p_0$  et  $p_1$  les isobarycentres respectivement des triangles de sommets étiquetés par les classes de hauteurs 2, 6 et 9 (correspondant à l'accord de ré majeur) et 2, 7, et 11 (correspondant à l'accord de sol majeur).

Alors, les poids associés aux états  $C_0$  et de  $C_1$  sont déterminés par les angles orientés  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  entre le vecteur  $v_0 = (1; 0)$  et respectivement le vecteur vitesse du segment de longueur minimal reliant  $p_0$  avec la classe de hauteur 2 et celui reliant  $p_1$  avec la classe de hauteur 11. Ainsi, on trouve

$$\alpha_0 = \frac{3}{2} \text{ et donc } w^E(C_0) = e^{\alpha_0} = e^{i \frac{3}{2}} \text{ ainsi que } \alpha_1 = \frac{\pi}{6} \text{ et donc } w^E(C_1) = e^{\alpha_1} = e^{i \frac{\pi}{6}}.$$

Les positions de  $C_0$  et de  $C_1$  dans le Tonnetz à nombres de Forte et à états d'accords  $\mathbb{P}_E^F(3; 4; 5)$  seront par conséquent données par

$$P_{\mathbb{P}_E^F(3;4;5)}(C_0) = (p_0; 311; e^{i \frac{3}{2}}) \text{ et } P_{\mathbb{P}_E^F(3;4;5)}(C_1) = (p_1; 311; e^{i \frac{\pi}{6}}).$$

## 2.6 Produits de Tonnetze à poids

Au début du paragraphe 2.5, on a introduit les Tonnetze à poids comme des outils qui permettraient de remédier à la non-injectivité des fonctions de positionnement. Ce sera en considérant des produits de Tonnetze à poids bien choisis qu'on définira finalement des fonctions de positionnement injectives.<sup>15</sup>

Définition 2.6.2 (Produit de Tonnetze à poids) On appellera produit de Tonnetze à poids tout produit de deux Tonnetze à nombres de Forte  $\mathbb{P}^F(k; l; m) \times \mathbb{P}^F(k^0; l^0; m^0)$  ou de deux Tonnetze à nombres de Forte à états d'accords  $\mathbb{P}_E^F(k; l; m) \times \mathbb{P}_E^F(k^0; l^0; m^0)$ , où  $k; l; m \in \mathbb{Z}_{12}$  et  $k^0; l^0; m^0 \in \mathbb{Z}_{12}$  sont des classes d'intervalles associées à des Tonnetze toroïdaux ou cylindriques.

15. Afin de préparer le cadre mathématique, on remarque que le produit de deux brés définit bien un bré par la construction suivante :

Propriété 2.6.1 (Produit de brés). Soient  $\beta_1 : E_1 \rightarrow M_1$  et  $\beta_2 : E_2 \rightarrow M_2$  deux brés de bre  $F_1$  et  $F_2$  respectivement. Alors on peut montrer que

$$(\beta_1; \beta_2) : E_1 \times E_2 \rightarrow M_1 \times M_2$$

avec  $(\beta_1; \beta_2)(e_1; e_2) = (\beta_1(e_1); \beta_2(e_2))$  définit un bré de base  $M_1 \times M_2$  et de bre  $F_1 \times F_2$ .

Cette propriété nous permet de considérer des produits de deux Tonnetze à poids de même bre (donc soit des produits de deux Tonnetze à nombres de Forte, soit des produits de deux Tonnetze à nombres de Forte et à états d'accords).

Dans la suite, on s'intéressera particulièrement à des produits de Tonnetze à nombres de Forte. La définition d'une fonction de positionnement  $P_{\mathbb{P}^F(k;l;m) \mathbb{P}^F(k^0;l^0;m^0)}$  dans un tel produit de Tonnetze se déduit de façon naturelle à partir des fonctions de positionnement dans les Tonnetze considérés individuellement. Ainsi, on retiendra les multifonctions

$$P_{\mathbb{P}^F(k;l;m) \mathbb{P}^F(k^0;l^0;m^0)} : E_{ECH} \times \mathbb{P}^F(k;l;m) \times \mathbb{P}^F(k^0;l^0;m^0)$$

définies par

$$P_{\mathbb{P}^F(k;l;m) \mathbb{P}^F(k^0;l^0;m^0)}(C) := P_{\mathbb{P}^F(k;l;m)}(C) \times P_{\mathbb{P}^F(k^0;l^0;m^0)}(C), \text{ pour } C \in E_{ECH}.$$

Notre intérêt pour ce type de représentation d'accords est dû à l'observation que la fonction de positionnement ainsi définie est bien une multifonction injective (dans le sens de la définition 2.5.1) pour les Tonnetze à poids  $\mathbb{P}^F(3;4;5) \times \mathbb{P}^F(1;2;9)$  et  $\mathbb{P}^F(2;3;7) \times \mathbb{P}^F(1;3;8)$ .

Concrètement, étant donnés deux accords  $(C_0; C_1) \in E_{ECH}$ , leurs ensembles de positions associés  $P_{\mathbb{P}^F(3;4;5) \mathbb{P}^F(1;2;9)}(C_0)$  et  $P_{\mathbb{P}^F(3;4;5) \mathbb{P}^F(1;2;9)}(C_1)$  dans le produit de Tonnetze  $\mathbb{P}^F(3;4;5) \times \mathbb{P}^F(1;2;9)$  sont nécessairement disjoints. De façon équivalente, à la donnée d'une position d'un accord dans le produit de Tonnetze  $\mathbb{P}^F(3;4;5) \times \mathbb{P}^F(1;2;9)$  correspond un seul accord et de façon très générale un point quelconque dans le produit de Tonnetze  $\mathbb{P}^F(3;4;5) \times \mathbb{P}^F(1;2;9)$  correspond à la position d'un accord au plus.

**Proposition 2.6.3** (Injectivité de  $P_{\mathbb{P}^F(3;4;5) \mathbb{P}^F(1;2;9)}$  et de  $P_{\mathbb{P}^F(2;3;7) \mathbb{P}^F(1;3;8)}$ ). Les fonctions de positionnement

$$P_{\mathbb{P}^F(3;4;5) \mathbb{P}^F(1;2;9)} \text{ et } P_{\mathbb{P}^F(2;3;7) \mathbb{P}^F(1;3;8)}$$

dans les produits de Tonnetze à poids  $\mathbb{P}^F(3;4;5) \times \mathbb{P}^F(1;2;9)$  et  $\mathbb{P}^F(2;3;7) \times \mathbb{P}^F(1;3;8)$  sont des multifonctions injectives.

**Démonstration.** La preuve se fait facilement par exhaustivité en considérant toutes les positions de tous les ensembles de classes de hauteurs dans ces deux produits de Tonnetze à poids.

Ainsi, afin de montrer l'injectivité de  $P_{\mathbb{P}^F(3;4;5) \mathbb{P}^F(1;2;9)}$ , on détermine tout d'abord tous les ensembles de classes de hauteurs  $C \in E_{ECH}$  qui partagent au moins une position avec un autre ensemble de classes de hauteurs dans  $\mathbb{P}^F(3;4;5)$ , puis dans  $\mathbb{P}^F(1;2;9)$ . On note :

$$P_{(3;4;5)} := \{ C \in E_{ECH} \mid \exists C^0 \in E_{ECH}; P_{\mathbb{P}^F(3;4;5)}(C) \cap P_{\mathbb{P}^F(3;4;5)}(C^0) \neq \emptyset ;$$

$$\text{et } P_{(1;2;9)} := \{ C \in E_{ECH} \mid \exists C^0 \in E_{ECH}; P_{\mathbb{P}^F(1;2;9)}(C) \cap P_{\mathbb{P}^F(1;2;9)}(C^0) \neq \emptyset ;$$

Finalement, on montre que

$$P_{(3;4;5)} \cap P_{(1;2;9)} = \emptyset ;$$

c'est-à-dire que les accords partageant des positions avec d'autres accords dans  $\mathbb{P}^F(3;4;5)$  ne sont pas les mêmes que ceux à position non exclusive dans  $\mathbb{P}^F(1;2;9)$ . Alors, pour tout choix d'ensembles de classes de hauteurs  $C; C^0 \in E_{ECH}$ , il existe au moins un Tonnetze  $\mathbb{P}^F(k;l;m)$  parmi  $\mathbb{P}^F(3;4;5)$  et  $\mathbb{P}^F(1;2;9)$ , tel que  $P_{\mathbb{P}^F(k;l;m)}(C) \cap P_{\mathbb{P}^F(k;l;m)}(C^0) = \emptyset$ . Par définition de la fonction de positionnement  $P_{\mathbb{P}^F(3;4;5) \mathbb{P}^F(1;2;9)}$ , ceci implique

$$P_{\mathbb{P}^F(3;4;5) \mathbb{P}^F(1;2;9)}(C) \cap P_{\mathbb{P}^F(3;4;5) \mathbb{P}^F(1;2;9)}(C^0) = \emptyset ;$$

ce qui montre l'injectivité de la multifonction de positionnement d'accords.

On procédera de la même façon pour montrer l'injectivité de  $P_{\mathbb{P}^F(2;3;7) \mathbb{P}^F(1;3;8)}$ .

□

# 3 | Des trajectoires spatiales dans les Tonnetz

## 3.1 Regard sur l'état de l'art : trajectoires et complexes simpliciaux

Le paradigme de l'étude de trajectoires spatiales dans le Tonnetz en tant qu'outil d'analyse harmonique et de classification stylistique a été marqué par les travaux récents de Louis Bigo et al. ([9], [13], [10]) et d'Emmanouil Karystinaios et al. ([28]). Ces deux approches proposent des définitions de trajectoires dans le Tonnetz basées sur une vision du Tonnetz apparentée aux réalisations dépliées définies aux paragraphes 2.2 et 2.3 en tant que complexe simplicial dont les sommets sont étiquetés par des classes de hauteurs.

Dans sa thèse ([9]), Louis Bigo définit la trajectoire d'une progression d'accords dans un Tonnetz  $T$  par une suite de sous-complexes simpliciaux  $\mathcal{K}$  représentant les différents accords  $P$ . Formellement, étant donnée une progression d'accords  $P := (C_0; d_0); \dots; (C_{N-1}; d_{N-1})$ , où, pour  $i \in \{0; \dots; N-1\}$ ,  $C_i \in E_{ECH}$  et où  $d_i$  désigne la durée respective de l'accord  $C_i$ <sup>16</sup>, on note  $K_i$  le sous-complexe simplicial du Tonnetz  $T$  contenant tous les simplexes dont les sommets sont étiquetés par une classe de hauteurs  $h \in C_i$ . La trajectoire, telle que définie par Louis Bigo, est alors donnée par la suite

$$T := (K_0; d_0); \dots; (K_{N-1}; d_{N-1}).$$

Toujours dans le cadre de sa thèse, Louis Bigo établit l'hypothèse d'existence d'un lien important entre le style harmonique d'une pièce et l'adéquation des différents types de Tonnetze à représenter la trajectoire associée à cette pièce de façon plus ou moins compacte. Dans ce sens, la notion de la compliance conçue pour exprimer cette adéquation par l'intermédiaire de la compacité des trajectoires entre le style harmonique et les différents Tonnetze est essentielle. Afin d'évaluer cette compliance et, a fortiori, d'utiliser les trajectoires en tant qu'outil de classification stylistique, Bigo introduit la notion de la  $d$ -compacité  $C_d(T; C)$  d'un accord  $C$  dans un Tonnetz  $T$ .

**Définition 3.1.1** ( $d$ -compacité d'un accord dans un Tonnetz) Soit  $T$  un Tonnetz de dimension  $D$ <sup>17</sup> et soit  $d \in \{1; \dots; D\}$ . Soit un accord  $C \in E_{ECH}$  à  $n$  notes et soit  $K$  le sous-complexe simplicial du Tonnetz  $T$  contenant tous les simplexes dont les sommets sont étiquetés par une classe de hauteurs  $h \in C$ .

Notons  $f_d(K)$  le nombre de simplexes de dimension  $d$  inclus dans le complexe  $K$  et  $f_d(S_C)$  le nombre de simplexes de dimension  $d$  inclus dans un simplexe de dimension  $m = 1$ . Alors, la  $d$ -compacité de  $C$  dans  $T$  est donnée par

$$C_d(T; C) := \frac{f_d(K)}{f_d(S_C)}.$$

**Définition 3.1.2** ( $d$ -compacité d'une trajectoire dans un Tonnetz) Soit une progression d'accords  $P := (C_0; d_0); \dots; (C_{N-1}; d_{N-1})$ , où, pour  $i \in \{0; \dots; N-1\}$ ,  $C_i \in E_{ECH}$  et où  $d_i$  désigne la durée pendant laquelle chaque accord  $C_i$  est actif. Alors, la  $d$ -compacité de la trajectoire de  $P$  dans le Tonnetz  $T$  est donnée par

$$C_d(T; T) := \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{d_i} \times \prod_{i=0}^{N-1} C_d(T; C_i).$$

16. Bigo dit que, pour  $i = 0; \dots; N-1$ , l'ensemble de classes de hauteurs  $C_i$  est actif pendant la durée  $d_i$ .

17. On rappelle ici que les seuls Tonnetze étudiés et dans lesquels ont été définies des trajectoires dans ce mémoire sont des Tonnetze de dimension 2.



À l'instar de Louis Bigo, Emmanouil Karystinaios et al. postulent une relation entre le style harmonique d'une pièce et la propension des di érents Tonnetze à donner lieu à des représentations plus ou moins compactes du discours harmonique de cette pièce. Le cadre de leur approche est donné par une définition de trajectoires spatiales dans les Tonnetze 2-dimensionnels toroïdaux vus ici comme des grilles périodiques infinies qui repose sur une formalisation du positionnement des accords analysés dans ces espaces. Ainsi, étant donné un accord  $C \in E_{ECH}$ , sa position  $(C)$  dans le Tonnetz est donnée par un ensemble de sommets simpliciaux étiquetés par les classes de hauteurs dans  $C$  en privilégiant un choix de sommets voisins ainsi que par les arêtes simpliciales reliant les sommets choisis.

Le placement d'un accord  $C_1$  par rapport à un accord  $C_0$  dont la position  $(C_0)$  dans le Tonnetz est connue implique la définition d'une fonction de positionnement  $\varphi(C_1; (C_0))$ . Celle-ci détermine tout d'abord la position d'un sommet de référence  $p_{C_1}$  pour une des classes de hauteurs  $C_1$  choisi parmi les sommets les plus proches de  $(C_0)$  en termes de voisinage entre sommets puis place les classes de hauteurs restantes  $C_1$  en privilégiant des choix de sommets voisins  $p_{C_1}$ .

Soit maintenant une progression d'accords  $(C_0; \dots; C_{N-1})$  pour laquelle le positionnement dans le Tonnetz  $(C_{i-1})$  de l'accord  $C_{i-1}$  (pour  $i \geq 1; \dots; N-2$ ) est connu. Notons

$$\varphi(C_i) := C_i; (C_{i-1}) \quad \text{et} \quad \varphi^0(C_i) := C_i; C_{i+1}; (C_{i-1}),$$

puis

$$S^0 := \text{Conv} (C_{i-2}) [ (C_{i-1}) [ \varphi(C_i) \quad \text{et} \quad S^{00} := \text{Conv} (C_{i-2}) [ (C_{i-1}) [ \varphi^0(C_i).^{18}$$

Le positionnement  $(C_i)$  de l'accord  $C_i$  est alors donné par  $\varphi(C_i)$  si le diamètre de  $S^0$  est inférieur à celui de  $S^{00}$  et par  $\varphi^0(C_i)$  sinon.

Tandis que le critère principal sur lequel se base la notion de compacité et la classification stylistique chez Louis Bigo est étroitement lié aux représentations simpliciales des différents accords analysés, Karystinaios et al. proposent des descripteurs de trajectoires considérant l'étendue et le nombre de composantes connexes des trajectoires déterminées.

### 3.2 Trajectoires dans les Tonnetze repliés et dépliés

Avant de formuler la méthode de construction de trajectoires qui se trouve au cœur de ce mémoire, on introduit quelques notions autour des progressions harmoniques sur lesquels on se basera par la suite.

**Définition 3.2.1 (Enchaînements et progressions harmoniques)** Dans le contexte de ce mémoire, on appelle progression harmonique ou progression d'accords de longueur  $N \geq 2$  toute suite  $(C_0; \dots; C_{N-1})$  d'ensembles de classes de hauteurs, considérés ordonnés ou non ordonnés selon le contexte analytique (c'est-à-dire  $C_i \in E_{ECH}$  ou  $C_i \in E_{ECH}^<$ , pour  $i = 0; \dots; N-1$ ). Une progression harmonique de longueur  $N \geq 2$  sera appelée aussi enchaînement harmonique

**Remarque 3.2.2 (Caractérisation d'un enchaînement harmonique)** On admettra qu'un enchaînement harmonique entre deux accords  $C_0; C_1 \in E_{ECH}^<$  est caractérisé par

- (i) les nombres de Forte de  $C_0$  et de  $C_1$ ,
- (ii) dans un contexte tonal, la classe d'intervalles ordonnée entre les fondamentales  $C_0$  et de  $C_1$ ; de façon plus générale, les classes de hauteurs sur lesquelles sont construites les formes normales de  $C_0$  et de  $C_1$

18. On rappelle que par  $\text{Conv}(X)$  on désigne l'enveloppe convexe d'un ensemble  $X \in \mathbb{R}^n$ .

(iii) les états (selon la définition A.0.5) de  $C_0, C_1$ .

On dira que les propriétés (i) et (ii) définissent le type d'un enchaînement harmonique.

Exemple 3.2.3. Soit  $C_0 := [re; fa]; la] = [2; 6; 9]$  l'ensemble de classes de hauteurs ordonné correspondant à un accord de ré majeur en position fondamentale et soit  $C_1 := [si; sol; re] = [10; 7; 2]$  l'ensemble de classes de hauteurs ordonné correspondant au premier renversement d'un accord de mineur. Alors, l'enchaînement harmonique  $(C_0; C_1)$  est caractérisé comme suit :

- (i) Les nombres de Forte de  $C_0$  et de  $C_1$  formalisent qu'il s'agit d'un enchaînement entre un accord parfait majeur et un accord parfait mineur.
- (ii) Les fondamentales de  $C_0$  et de  $C_1$  sont respectivement ré (correspondant à la classe de hauteurs 2) et sol (correspondant à la classe de hauteurs 7). La classe d'intervalles ordonnée  $2 = 5$  entre ces classes de hauteurs correspond à un mouvement de quarte ascendante (ou de quinte descendante) entre les fondamentales des deux accords.
- (iii) Finalement, on note que l'enchaînement entre  $C_0$  et de  $C_1$  se fait entre un accord en position fondamentale et un accord en premier renversement.

On propose dans la suite de représenter géométriquement des enchaînements et des progressions harmoniques quelconques en tant que trajectoires dans les différents Tonnetz. Intuitivement, étant donnée une progression  $(C_0; \dots; C_{N-1})$ , on déterminera une courbe à ne par morceaux qui relie entre elles des positions dans les Tonnetz associées aux différents ensembles de classes de hauteurs  $C_i \in E_{ECH}$  (pour  $i = 0; \dots; N-1$ ) par l'intermédiaire de fonctions de positionnement.

L'algorithme 1 formalise cette approche tout d'abord dans le cas des Tonnetz repliés :

Définition 3.2.4 (Trajectoire d'une progression harmonique dans un Tonnetz replié) Soit  $\mathbb{P}(k; l; m)$  une réalisation repliée quelconque d'un Tonnetz toroïdal ou cylindrique et soit  $\mathbb{P}_{(k;l;m)}$  la fonction de positionnement associée telle que définie au paragraphe 2.4. Soit  $(C_0; \dots; C_{N-1})$  est une progression harmonique de longueur  $N \geq 2$ , alors la courbe à ne par morceaux définie par l'algorithme 1 est appelée sa trajectoire dans le Tonnetz replié  $\mathbb{P}(k; l; m)$ .

---

**Algorithme 1** Trajectoire d'une progression harmonique dans un Tonnetz replié

---

si  $\text{Card } \mathbb{P}_{(k;l;m)}(C_0) = 1$ , alors  
    soit  $p_0$  l'unique élément de  $\mathbb{P}_{(k;l;m)}(C_0)$  comme point de départ de la trajectoire,  
sinon  
    soit  $i_0 := \min_{i \in \{1; \dots; N-1\}} \text{Card } \mathbb{P}_{(k;l;m)}(C_i) = 1$   
    et soit  $p_{i_0}$  l'unique élément de  $\mathbb{P}_{(k;l;m)}(C_{i_0})$ ,  
    choisissons un point  $p_0 \in \mathbb{P}_{(k;l;m)}(C_0)$  tel que la distance  $d_{\mathbb{P}(k;l;m)}(p_0; p_{i_0})$  soit minimale,  
pour  $i = 1; \dots; N-1$ ,  
    choisissons  $p_i \in \mathbb{P}_{(k;l;m)}(C_i)$  tel que la distance  $d_{\mathbb{P}(k;l;m)}(p_{i-1}; p_i)$  soit minimale,  
    soit  $\sigma_i : [i-1; i] \rightarrow \mathbb{P}(k; l; m)$  un segment géodésique minimal joignant  $p_{i-1}$  et  $p_i$ ,  
retourne  $\sigma$  : la trajectoire  $\sigma$  obtenue par concaténation des segments géodésiques  $\sigma_i$  ( $i = 1; \dots; N-1$ ).

---

On remarque que, comme le positionnement d'un accord par l'intermédiaire de  $\mathbb{P}_{(k;l;m)}$  n'est pas toujours réduit à un point, le choix d'un point  $p_i$  (pour  $i \in \{1; \dots; N-1\}$ ) qui minimise la distance dans le Tonnetz  $d_{\mathbb{P}(k;l;m)}(p_{i-1}; p_i)$  peut être arbitraire.

Par ailleurs, en raison de la géométrie des Tonnetze repliés, dénie par identification de côtés opposés d'une région parallélogrammatique, les segments géodésiques minimaux qui relient deux points entre eux<sup>19</sup> ne sont pas nécessairement uniques.

Afin de pouvoir comparer différentes trajectoires entre elles, on privilégiera une méthode de construction de trajectoires pour lesquelles chaque choix de segment géodésique minimal entre deux accords est unique et défini sans ambiguïté. À cette fin, on propose d'imposer des sens et des directions privilégiés pour les vecteurs vitesses des segments géodésiques choisis. Ainsi, chaque fois qu'il existe plus d'une seule possibilité de choisir un segment géodésique minimal entre deux accords, on choisira le segment dont le vecteur vitesse forme le plus petit angle orienté avec le vecteur<sup>20</sup>

Une telle construction de trajectoires pour lesquelles chaque choix de segment géodésique minimal entre deux accords est toujours donné sans ambiguïté est formalisée par l'algorithme 2.

---

**Algorithme 2** Trajectoire repliée avec unicité des segments géodésiques minimaux entre deux accords

---

si  $\text{Card } P_{\mathbb{P}(k;l;m)}(C_0) = 1$ , alors

choisissons  $p_0$  l'unique élément de  $P_{\mathbb{P}(k;l;m)}(C_0)$  comme point de départ de la trajectoire,

sinon

soit  $i_0 := \min_{i \in \{1, \dots, N\}} \text{Card } P_{\mathbb{P}(k;l;m)}(C_i) = 1$

et soit  $p_{i_0}$  l'unique élément de  $P_{\mathbb{P}(k;l;m)}(C_{i_0})$ ,

parmi tous les points  $p$  de  $P_{\mathbb{P}(k;l;m)}(C_0)$  pour lesquels la distance  $d_{\mathbb{P}(k;l;m)}(p; p_0)$  est minimale :  
choisissons  $p_0$  tel que l'angle orienté entre  $e_1$  et le vecteur vitesse du segment géodésique minimal joignant  $p_0$  et  $p_{i_0}$  soit minimal,

pour  $i = 1; \dots; N - 1$ ,

parmi tous les points  $p$  de  $P_{\mathbb{P}(k;l;m)}(C_i)$  pour lesquels la distance  $d_{\mathbb{P}(k;l;m)}(p_{i-1}; p)$  est minimale :  
choisissons  $p_i$  tel que l'angle orienté entre  $e_1$  et le vecteur vitesse du segment géodésique minimal joignant  $p_{i-1}$  et  $p_i$  soit minimal,

soit  $\gamma_i : [i-1; i] \rightarrow \mathbb{P}(k;l;m)$  ce segment géodésique minimal joignant  $p_{i-1}$  et  $p_i$

retourne  $\gamma$  : la trajectoire obtenue par concaténation des segments géodésiques  $\gamma_i$  ( $i = 1; \dots; N - 1$ ).

---

**Exemple 3.2.5.** Afin de donner une idée visuelle de la méthode ainsi définie, on présente les différentes étapes de la construction de la trajectoire représentant la progression harmonique  $([0,4,7], [0,4,7,10], [0,5,9], [0,3,6,9])$  dans le Tonnetz  $\mathbb{T}(3; 4; 5)$  sur la figure 10.

À partir de ces constructions de trajectoires, on définit de façon naturelle une manière de représenter un enchaînement entre deux accords  $(C_0; C_1)$  par un vecteur dans le Tonnetz :

**Définition 3.2.6** (Vecteur d'enchaînement (ou vecteur vitesse) associé à un enchaînement harmonique). Soit  $(C_0; C_1)$  un enchaînement harmonique représenté dans un Tonnetz replié  $\mathbb{T}(k;l;m)$  par un segment géodésique entre deux points  $p$  et  $q$  du Tonnetz. Considérons la paramétrisation

$$\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{T}(k;l;m),$$

avec  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma(1) = q$  de ce segment géodésique. Alors, on appelle **vecteur d'enchaînement** ou **vecteur vitesse** associé à  $(C_0; C_1)$  par  $\gamma$  le vecteur vitesse  $\gamma'(0) \in T_p \mathbb{T}(k;l;m)$ .

**Proposition 3.2.7** (Vecteurs d'enchaînement et types d'enchaînements harmoniques). Soient  $C_0; C_1 \in E_{ECH}$  deux accords et supposons qu'au moins un de ces accords a un unique positionnement dans un

19. voir la note de bas de page 13 pour l'utilisation du terme de segment géodésique minimal

20. ... qui est ici toujours un des vecteurs de la base  $(e_1; e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  suivant laquelle on avait construit les différentes réalisations de Tonnetze aux paragraphes et 2.3.

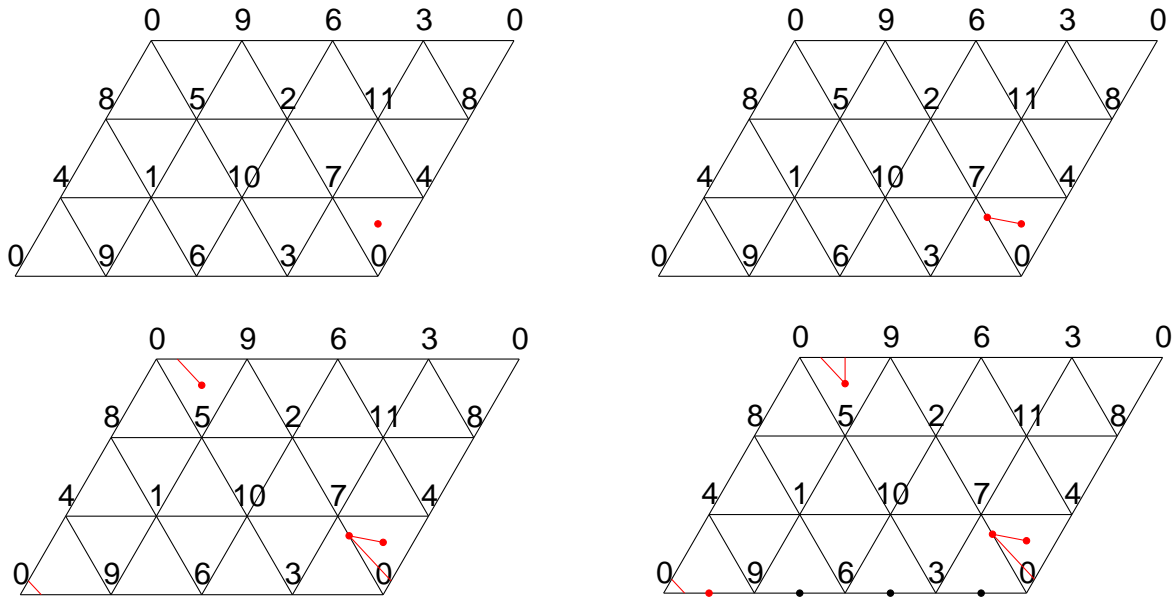


Figure 10 Construction de la trajectoire représentant la progression harmonique  $([0; 4; 7]; [0; 4; 7; 10]; [0; 5; 9]; [0; 3; 6; 9])$  dans le Tonnetz  $\mathcal{P}(3; 4; 5)$ . Le début de la trajectoire est donné par le segment géodésique minimal reliant la représentation de l'accord  $[0; 4; 7]$  à celle de l'accord  $[0; 4; 7; 10]$  (en haut à droite de la figure). On détermine alors le segment géodésique minimal entre la représentation de l'accord  $[0; 4; 7; 10]$  et celle de l'accord  $[0; 5; 9]$  qui, visuellement, passe par les quatre côtés de la région fondamentale parallélogrammatique du Tonnetz (en bas à gauche de la figure). La dernière étape de la construction requiert finalement la détermination du point le plus proche de l'accord  $[0; 5; 9]$  parmi les quatre points représentant l'accord  $[0; 3; 6; 9]$  dans le Tonnetz (en bas à droite de la figure).

Tonnetz replié  $\mathcal{P}(k; l; m)$  par l'intermédiaire de la fonction de positionnement  $P_{\mathcal{P}(k; l; m)}$ , c'est-à-dire  $\text{Card } P_{\mathcal{P}(k; l; m)}(C_i) = 1$  pour  $i = 0$  ou  $i = 1$ .

Considérons les accords  $C_0^0$  et  $C_1^0 \in E_{\text{ECH}}$  obtenus par transposition de  $C_0$  et de  $C_1$  d'un même intervalle. Alors les enchaînements harmoniques  $(C_0; C_1)$  et  $(C_0^0; C_1^0)$  sont représentés par le même vecteur d'enchaînement  $v \in \mathbb{R}^2$  dans le Tonnetz  $\mathcal{P}(k; l; m)$ .

En définissant le type d'un enchaînement harmonique comme formulé dans la remarque 3.2.2, par les nombres de Forte de ses accords et les classes de hauteurs sur lesquelles sont construites les formes normales des accords (et donc le degré sur lequel les accords sont transposés), cette proposition peut être formulée de façon équivalente comme suit :

**Proposition 3.2.8** (Vecteurs d'enchaînement et types d'enchaînements harmoniques) Tous les enchaînements harmoniques de même type sont représentés par le même vecteur d'enchaînement dans le Tonnetz replié  $\mathcal{P}(k; l; m)$  si au moins un de leurs accords a un unique positionnement dans  $\mathcal{P}(k; l; m)$ .

**Démonstration.** Cette proposition s'ensuit directement du lemme 2.4.6 car tant que, dans un Tonnetz replié quelconque  $\mathcal{P}(k; l; m)$ , une transposition par une classe d'intervalles ordonnée  $i \in \mathbb{Z}_{12}$  correspond exactement à une translation de vecteur  $v = (i_1; i_2)$ , où  $(i_1; i_2)$  sont les coordonnées dans  $\mathcal{P}(k; l; m)$  de la classe de hauteurs  $i \in \mathbb{Z}_{12}$ .

En effet, si  $(C_0; C_1)$  est un enchaînement harmonique quelconque, alors les enchaînements de même type sont exactement tous les enchaînements de la forme  $(C_0^0; C_1^0)$ , où  $C_0^0$  et  $C_1^0$  ont été obtenus en transposant  $C_0$  et  $C_1$  par une même classe d'intervalles ordonnée  $i \in \mathbb{Z}_{12}$ .

D'après le lemme 2.4.6, les représentations  $P_{\mathcal{P}(k; l; m)}(C_i^0)$  de  $C_i^0$  (pour  $i \in \{0, 1\}$ ) sont des translations de  $P_{\mathcal{P}(k; l; m)}(C_i)$  de vecteur  $v = (i_1; i_2)$ . De même, le segment géodésique de longueur minimale

joignant les représentations de  $C_0^0$  et de  $C_1^0$  (tel que construit par l'algorithme 2) est obtenu en translatant de vecteur  $v$  le segment géodésique minimal entre les représentations de  $C_0^0$  et de  $C_1^0$ . En particulier, les deux segments géodésiques donnés par une paramétrisation de la fonction  $\mathbb{P}(k; l; m)$  dérivent le même vecteur vitesse si bien que les deux enchaînements sont représentés par le même vecteur d'enchaînement dans le Tonnetz.

□

La définition des trajectoires dans les Tonnetze dépliés se déduit directement de celle dans les Tonnetze repliés :

**Définition 3.2.9** (Trajectoire d'une progression harmonique dans un Tonnetz déplié) Soit  $T(k; l; m)$  une réalisation dépliée quelconque d'un Tonnetz toroïdal ou cylindrique et soit  $\mathbb{P}(k; l; m)$  la fonction de positionnement associée telle que définie au paragraphe 2.4 (Soit  $(C_0, \dots, C_{N-1})$  est une progression harmonique de longueur  $N-2$ , alors la courbe  $\alpha$  ne par morceaux définie par l'algorithme 3 est appelée trajectoire dans le Tonnetz déplié  $T(k; l; m)$ .

---

**Algorithme 3** Trajectoire dépliée dans un Tonnetz  $T(k; l; m)$

---

déterminons la trajectoire  $\alpha$  dans le Tonnetz replié correspondant  $\mathbb{P}(k; l; m)$ ,  
 prenons comme point de départ le point  $p_0 \in T(k; l; m)$  de mêmes coordonnées que le point  $\mathbb{P}(0)$ ,  
 pour  $i = 1; \dots; N-1$ ,  
 déterminons le vecteur vitesse  $v_i(0) \in \mathbb{R}^2$  du segment géodésique minimal  $\gamma_i$ <sup>21</sup>  
 joignant  $\mathbb{P}(i-1)$  et  $\mathbb{P}(i)$ ,  
 soit le segment de droite  $s_i : [i-1; i] \rightarrow T(k; l; m)$ , de telle sorte que  $s(t) = p_{i-1} + (t - (i-1)) v_i(0)$ ,  
 prenons  $p_i := s_i(i)$  le point d'arrivée du segment de droite,  
 retourne  $\alpha$  : la trajectoire obtenue par concaténation des segments de droite  $s_i$  ( $i = 1; \dots; N-1$ ).

---

### 3.3 Trajectoires dans les Tonnetze repliés à poids

Le cadre mathématique nous permettant de formaliser des trajectoires dans les Tonnetze repliés à poids est basé sur la notion de sections de brés et des sections le long d'une courbe

**Définition 3.3.1** (Section continue d'un bré). On appelle section continue d'un bré  $\beta : E \rightarrow M$  toute application continue  $s : M \rightarrow E$  tel que  $s \circ \beta = \text{id}$ .

**Exemple 3.3.2** (Section d'un bré trivial) . Dans le cas d'un bré trivial  $\beta : E := M \times F \rightarrow M$ , une section continue dans  $E$  correspond à une application continue  $M \rightarrow F$ .

**Définition 3.3.3** (Section continue le long d'une courbe) Soit  $\beta : E \rightarrow M$  un bré et soit  $\gamma : I \rightarrow M$  une courbe continue dans  $M$ . On appelle section continue le long de  $\gamma$  toute application continue  $s : I \rightarrow E$  telle que  $s \circ \gamma = \beta$ .

**Définition 3.3.4** (Trajectoire dans un Tonnetz à poids) Soit  $\mathbb{P}^F(k; l; m)$  un Tonnetz à poids muni de la projection

$$\beta : \mathbb{P}^F(k; l; m) \rightarrow \mathbb{P}(k; l; m),$$

comme donnée par la définition 2.5.5.

Soit  $(C_0, \dots, C_{N-1})$  une progression harmonique de longueur  $N-2$  dont la trajectoire dans le Tonnetz replié  $\mathbb{P}(k; l; m)$  est donnée par la paramétrisation

21. On identifie ici de nouveau l'espace tangent en un point du Tonnetz à  $\mathbb{R}^2$ .

$$: [0; N - 1] ! \mathcal{P}(k; l; m),$$

où, pour  $i = 0; \dots; N - 1$ , le point  $(i)$  correspond à la position associée à l'accord dans  $\mathcal{P}(k; l; m)$ .

Alors toute sections :  $[0; N - 1] ! \mathcal{P}^F(k; l; m)$  le long de choisie telle que

(i) pour tout  $i = 0; \dots; N - 1$ ;  $s(i) \in P_{\mathcal{P}^F(k; l; m)}(C_i)$ ,

(ii) pour tout  $i = 1; \dots; N - 1$ ;  $s : [i - 1; i] ! \mathcal{P}^F(k; l; m)$  est une paramétrisation d'un segment géodésique minimal dans  $\mathcal{P}^F(k; l; m)$

est appelé trajectoire dans le Tonnetz à poids  $\mathcal{P}^F(k; l; m)$  de la progression  $(C_0; \dots; C_{N-1})$ .

On dérive de façon similaire la trajectoire dans le Tonnetz à poids  $\mathcal{P}_E^F(k; l; m)$ .

Avec cette définition, la notion des vecteurs d'enchaînement dans un Tonnetz replié 3.2.6 s'adapte naturellement aux Tonnetze à poids :

Définition 3.3.5 (Vecteur d'enchaînement dans un Tonnetz à poids) Soit  $(C_0; C_1)$  un enchaînement harmonique représenté dans un Tonnetz  $\mathcal{P}^F(k; l; m)$  (ou bien  $\mathcal{P}_E^F(k; l; m)$ ) par un segment géodésique entre deux points  $p$  et  $q$  du Tonnetz. Considérons la paramétrisation

$$: [0; 1] ! \mathcal{P}(k; l; m),$$

avec  $(0) = p$  et  $(1) = q$  de ce segment géodésique. Alors, le vecteur d'enchaînement associé à  $(C_0; C_1)$  par  $\gamma$  est donné par le vecteur vitesse  $\dot{\gamma}(0) \in T_p \mathcal{P}^F(k; l; m)$  (ou bien  $\dot{\gamma}(0) \in T_p \mathcal{P}_E^F(k; l; m)$ ).

### 3.4 Trajectoires dans des produits de Tonnetze à poids

Dans une dernière proposition de structures de Tonnetze progressivement plus riches, on a introduit les produits de Tonnetze à poids au paragraphe 2.6 pour lesquels on a montré l'existence de fonctions de positionnement injectives (proposition 2.6.3). Cette propriété remarquable des produits de Tonnetze à poids nous amène ici à une dernière formalisation de trajectoires basée sur le paradigme des segments géodésiques reliant des placements d'accords dans le Tonnetz.

L'intérêt de considérer de telles trajectoires semble justifié par l'injectivité du positionnement d'accords : si chaque point dans  $\mathcal{P}^F(3; 4; 5) \mathcal{P}^F(1; 2; 9)$  (comme le montre la proposition 2.6.3) correspond au plus à un accord, alors la donnée d'une position d'un accord permet d'identifier exactement l'accord placé. A fortiori, la donnée d'une trajectoire dans  $\mathcal{P}^F(3; 4; 5) \mathcal{P}^F(1; 2; 9)$  permet de déterminer sans ambiguïté les accords parcourus et ainsi de reconstruire exactement la progression harmonique représentée par cette trajectoire.

Cette représentation non ambiguë semble particulièrement pertinente et utile en vue de l'utilisation des trajectoires en tant qu'outil de génération de progressions d'accords. Ainsi, on basera, au paragraphe 6.2, une approche de génération de progressions harmoniques sur des trajectoires déterminées dans le produit de Tonnetze  $\mathcal{P}^F(3; 4; 5) \mathcal{P}^F(1; 2; 9)$ .

Définition 3.4.1 (Trajectoire dans un produit de Tonnetze à poids) Soient  $\mathcal{P}^F(k; l; m)$  et  $\mathcal{P}^F(k^0; l^0; m^0)$  deux Tonnetze à poids munis respectivement de la projection

$$: \mathcal{P}^F(k; l; m) ! \mathcal{P}(k; l; m) \text{ et } \pi^0 : \mathcal{P}^F(k^0; l^0; m^0) ! \mathcal{P}(k^0; l^0; m^0).$$

Soit  $(C_0; \dots; C_{N-1})$  une progression harmonique et notons

$$s_1 : [0; N - 1] ! \mathcal{P}^F(k; l; m) \text{ et } s_2 : [0; N - 1] ! \mathcal{P}^F(k^0; l^0; m^0)$$

les trajectoires respectivement dans  $\mathcal{T}^F(k; l; m)$  et  $\mathcal{T}^F(k^0; l^0; m^0)$  de  $(C_0; \dots; C_{N-1})$ . Alors, on définit la trajectoire de  $(C_0; \dots; C_{N-1})$  dans le produit  $\mathcal{T}^F(k; l; m) \times \mathcal{T}^F(k^0; l^0; m^0)$  par

$$(s_1; s_2) : [0; N-1] \rightarrow \mathcal{T}^F(k; l; m) \times \mathcal{T}^F(k^0; l^0; m^0),$$

avec  $(s_1; s_2)(t) = (s_1(t); s_2(t))$ .

On définit de façon similaire la trajectoire dans le produit de Tonnetze à poids  $\mathcal{T}_E^F(k; l; m) \times \mathcal{T}_E^F(k^0; l^0; m^0)$ .

Intuitivement, cette formalisation des trajectoires fait évoluer conjointement les trajectoires d'une progression harmonique dans deux Tonnetze à poids  $\mathcal{T}^F(k; l; m)$  et  $\mathcal{T}^F(k^0; l^0; m^0)$ . Suivant cette représentation, on donnera le vecteur d'enchaînement associé à un enchaînement  $(C_0; \dots; C_{N-1})$  dans  $\mathcal{T}^F(k; l; m)$  et  $\mathcal{T}^F(k^0; l^0; m^0)$  sous la forme  $(v; w)$ , où  $v$  correspond au vecteur d'enchaînement dans  $\mathcal{T}^F(k; l; m)$  et  $w$  au vecteur dans  $\mathcal{T}^F(k^0; l^0; m^0)$ .

## 4 | Préliminaires à la classification stylistique et à la génération

### 4.1 Style et analyse harmonique

Dans une deuxième grande partie de ce mémoire, on introduira différentes applications de classification stylistique et de génération de progressions d'accords basées directement sur la représentation de discours harmoniques en tant que trajectoires dans les Tonnetze telles que formalisées et étudiées aux paragraphes précédents.

Si ce mémoire évoque à plusieurs reprises les notions de style ou d'analyse harmonique, on tient ici à souligner quelques limites apparentes des approches et des représentations proposées.

Tout d'abord, on rappelle que la méthode des trajectoires dans le Tonnetz fait abstraction d'éléments essentiels caractérisant tout discours harmonique comme la disposition des accords espacée ou serrée, avec un centre de gravité dans les aigus ou dans les graves, les conduites vocales impliquant l'évolution de la mélodie et des voix secondaires ainsi que toutes les résolutions de notes étrangères ou encore le rythme harmonique défini par tous les aspects de l'évolution rythmique au cours d'une progression harmonique. Ainsi, une analyse d'une trajectoire ne correspondra jamais à une analyse harmonique dans le sens classique du terme et ne pourra toujours que rendre compte d'un sous-ensemble de tous les aspects qui pourraient engendrer la richesse d'un langage harmonique. Dans ce sens, une classification stylistique réalisée par l'intermédiaire de trajectoires dans un Tonnetz ne pourra pas donner lieu à une classification de styles musicaux effectifs, mais, au mieux, une classification des types d'enchaînements harmoniques communs et représentatifs d'un certain corpus de pièces de musique de donné.

### 4.2 La trajectoire comme outil de classification et de génération

Les outils principaux sur lesquels se baseront les méthodes de classification et de génération proposées impliquent toutes les formalisations de Tonnetze introduites aux paragraphes précédents, des fonctions de positionnement d'accords de type  $\mathcal{P}$  introduites aux paragraphes 2.4, 2.5 et 2.6 et les méthodes de construction de trajectoires définies précédemment.

Afin de simplifier les représentations dans les différents Tonnetze, on propose de considérer que toutes les réalisations dépliées et repliées des Tonnetze sont engendrées par les vecteurs  $e_1 := (1; 0)$  et  $e_2 := (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

### 4.3 Jeux de données et (pré-)analyses

On basera toutes les applications proposées aux chapitres 5 et 6 sur des jeux de données de chiers MIDI assemblés à partir de différentes bases de données ([24], [29]), [30]). Pour chacune des pièces de musique en format MIDI ainsi collectionnées, on extrait le contenu harmonique sous forme d'une suite d'accords par l'intermédiaire de la bibliothèque Pythomusic21 [23]. Lors de ce processus, on considère comme accord toute présence simultanée de différentes classes de hauteurs dans le chier MIDI analysé en faisant abstraction des durées de notes. Ainsi, toute apparition de nouvelles classes de hauteurs ainsi que toute disparition de classes de hauteurs actives est considérée comme un changement d'accord.

Parmi les aspects problématiques de l'analyse harmonique computationnelle, on évoque la question du choix d'accords pertinents ou représentatifs dans une pièce de musique donnée ainsi que le traitement des notes étrangères (telles que les notes de passage et les appoggiatures). Tandis que la détection de notes étrangères semble dépasser le cadre de ce mémoire, on utilisera des méthodes de filtration simples inspirées par celles de Louis Bigo qui, dans [11], propose de tenir compte de la durée cumulée de chaque ensemble de classes de hauteurs durant une pièce analysée.

Ainsi, en fonction du cadre d'application, on considérera la possibilité de déterminer le nombre d'occurrences de chaque classe de Forte (c'est-à-dire de tous les accords partageant le même nombre de Forte) dans une pièce ou dans un corpus entier et de supprimer toutes les occurrences des classes de Forte les moins fréquentes ou bien de garder uniquement les accords correspondant aux classes de Forte les plus fréquentes. Par une telle opération, on espère obtenir une sous-progression harmonique, constituée par les accords les plus représentatifs du style harmonique analysé.

Par ailleurs, dans l'objectif d'omettre tout passage musical purement mélodique ou non harmonisé, on supprimera toutes les occurrences d'ensembles de classes de hauteurs extraits à une seule note et, selon l'application, aussi les accords à deux notes.

Le paragraphe 5.2 donnera lieu à des classifications binaires basées sur des valeurs obtenues à partir de différents descripteurs de trajectoires. Cette approche impliquera l'utilisation de classificateurs basés sur l'algorithme des  $k$  plus proches voisins (angl.  $k$ -nearest neighbors ( $k$ -NN) algorithm) [20] et une subdivision des jeux de données analysés en ensembles de référence, constitués de pièces de musique annotées de leur style musical servant à entraîner le classificateur, ainsi qu'en ensembles test contenant des pièces à classifier considérées comme inconnues.

Dans toutes les applications proposées dans la suite, on évaluera la pertinence des classifications binaires effectuées par l'intermédiaire de la mesure d'exactitude définie par

$$\text{exactitude} := \frac{\text{nombre d'éléments correctement attribués à une des deux classes}}{\text{nombre total d'éléments à classer}}.$$

## 5 | Descripteurs de trajectoires

### 5.1 Les descripteurs proposés

On supposera dans la suite qu'une courbe correspondant à la trajectoire d'une progression d'accords  $(C_0; \dots; C_{N-1})$  dans un Tonnetz  $\mathcal{P}(k; l; m)$  est définie par la paramétrisation

$$e: [0; N-1] \rightarrow \mathcal{P}(k; l; m),$$

où, pour  $i = 0; \dots; N-1$ , le point  $e(i)$  correspond à la position associée par la fonction de positionnement  $P_{\mathcal{P}(k; l; m)}$  à l'accord  $C_i$  dans  $\mathcal{P}(k; l; m)$ .



### 5.1.1 La compliance

La compliance est une des notions essentielles introduites par Louis Bigo dans sa thèse [9] dans le but de mesurer l'adéquation des diérents types de Tonnetz à représenter une trajectoire donnée de façon plus ou moins compacte. Sa définition a été repensée depuis par Karystinaios et al. [28] qui, comme Bigo, établissent l'hypothèse d'existence d'un lien important entre cette dernière qualité et le style musical d'une pièce.

On adaptera ici la définition de la compliance aux formalisations géométriques des Tonnetz utilisées dans le cadre de ce mémoire. À l'instar de l'idée de Louis Bigo, on part du principe qu'un Tonnetz donné représente particulièrement bien les accords décrits par les sommets des triangles qui forment la grille simpliciale de ce Tonnetz. En particulier, le Tonnetz engendré par les classes d'intervalles 3, 4 et 5 (correspondant donc aux formalisations  $\mathbb{T}(3; 4; 5)$  et  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$ ) serait parfaitement adéquat pour analyser la musique tonale, comme ses faces triangulaires décrivent des accords parfaits majeurs et mineurs.

La définition de la compliance qu'on utilisera dans la suite est basée sur la simple observation que, dans le Tonnetz  $\mathbb{T}(3; 4; 5)$ , les accords majeurs et mineurs sont positionnés, par l'intermédiaire de  $P_{\mathbb{T}(3;4;5)}$ , à des points se trouvant aux isobarycentres des faces triangulaires du Tonnetz et que les milieux de ses arêtes simpliciales représentent des accords à 2 sons formés uniquement par une tierce majeure ou mineure. Comme on souhaiterait que la compliance du Tonnetz  $\mathbb{T}(3; 4; 5)$  soit importante par rapport à une trajectoire d'une progression harmonique formée d'une abondance d'accords parfaits majeurs et mineurs, on propose de définir la notion de la compliance comme suit :

**Définition 5.1.1** (Compliance d'un Tonnetz par rapport à une trajectoire) Soit  $\mathbb{P}(k; l; m)$  un Tonnetz toroïdal ou cylindrique et soit  $(C_0; \dots; C_{N-1})$  une progression harmonique de longueur  $N$  dont la trajectoire est donnée par une courbe  $\mathcal{C}$  (avec pour  $i = 0; \dots; N-1$ , les points  $(i)$  qui correspondent à la position associée à l'accord  $C_i$  dans  $\mathbb{P}(k; l; m)$  comme décrit dans l'introduction du paragraphe 5.1).

Alors la compliance du Tonnetz  $\mathbb{P}(k; l; m)$  par rapport à la trajectoire  $\mathcal{C}$  est donnée par

$$\text{Comp } \mathbb{P}(k; l; m); \mathcal{C} := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{C}(i);$$

où, pour un point  $p \in \mathbb{P}(k; l; m)$  dans le Tonnetz,  $\mathcal{C}(p) := 1$  si  $p$  se trouve soit à la position d'un isobarycentre d'une face triangulaire du Tonnetz, soit au milieu d'une de ses arêtes simpliciales,  $\mathcal{C}(p) := \frac{1}{2}$  si  $p$  est un des sommets simpliciaux du Tonnetz et  $\mathcal{C}(p) := 0$  dans tous les autres cas.

### 5.1.2 Le nombre de triangles parcourus

Tandis que la définition de la compliance fournit une façon de mesurer la nature des accords représentés par une trajectoire, on souhaiterait en plus obtenir une estimation globale concernant le parcours tonal correspondant à une trajectoire. Ainsi, on voudrait décrire des pièces de musique très modulantes dont le parcours tonal passe par de nombreuses tonalités et qui, éventuellement, tend à s'éloigner de la tonalité principale et des pièces qui, au contraire, parcourent peu de tonalités diérentes et qui tendent peut-être à graviter autour de leur tonalité principale.

On se basera toujours sur la considération des faces triangulaires du Tonnetz  $\mathbb{T}(3; 4; 5)$  dont les isobarycentres sont associés par  $P_{\mathbb{T}(3;4;5)}$  aux accords parfaits majeurs et mineurs, qui constituent les accords centraux des diérentes tonalités majeures et mineures. On remarque en plus que la représentation des accords obtenus en ajoutant ou en enlevant une note à un accord parfait majeur ou mineur (par exemple en ajoutant une septième) ont tendance à rester géométriquement proches des positions des accords parfaits dont ils sont issus.

Ainsi, étant donnée une progression harmonique, on propose de déterminer le nombre des différentes faces triangulaires parcourues par sa trajectoire a n d'estimer la variété de son parcours tonal.

Dé nition 5.1.2 (Nombre de triangles parcourus par une trajectoire) Soit  $\mathcal{T}(k; l; m)$  un Tonnetz replié et soit  $(C_0; \dots; C_{N-1})$  une progression harmonique dont la trajectoire est définie par une courbe  $\gamma$ . Notons  $\mathcal{F}$  l'ensemble des faces simpliciales triangulaires de  $\mathcal{T}(k; l; m)$ . Alors le nombre de triangles parcourus par  $\gamma$  est donné par

$$\text{Triang}(\gamma) := \sum_{i=0}^{N-1} \text{Card} \{ j \in \mathcal{F} \mid \gamma \text{ coupe } [C_i, C_{i+1}] \text{ en } j \}.$$

### 5.1.3 La distance moyenne parcourue entre deux accords successifs

Poursuivant toujours l'idée d'estimer des aspects caractéristiques du parcours tonal d'une pièce, on tiendra compte de la distance moyenne entre deux accords successifs. En d'autres termes, étant donnée une progression harmonique  $(C_0; \dots; C_{N-1})$  et sa trajectoire  $\gamma$  dans un Tonnetz  $\mathcal{T}(k; l; m)$ , on déterminera la longueur moyenne des segments géodésiques qui constituent cette trajectoire.

Dé nition 5.1.3 (Distance moyenne parcourue entre deux accords successifs) La distance moyenne entre deux accords parcourue par une trajectoire  $\gamma$  d'une progression harmonique dans un Tonnetz  $\mathcal{T}(k; l; m)$  est donnée par

$$\overline{\text{Dist}}(\gamma) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} d_{\mathcal{T}(k;l;m)}(\gamma(C_i), \gamma(C_{i+1})),$$

où  $d_{\mathcal{T}(k;l;m)}$  désigne une distance sur le Tonnetz telle que définie au paragraphe 2.3.

### 5.1.4 L'inconstance

Suivant une approche différente de celle de ces premiers descripteurs, on souhaiterait décrire l'allure globale d'une trajectoire en termes de complexité ou de variabilité de son parcours. Dans cette optique, on s'inspire de la notion d'inconstance d'une courbe plane définie par Jean-Paul Allouche et Laurence Maillard-Teyssier [2] et appliquée à l'analyse de lignes mélodiques par Florence Levé et al. [33].

Dans [2], Allouche et Maillard-Teyssier introduisent l'inconstance en tant qu'outil pour décrire les variations ou les fluctuations d'une courbe plane en déterminant le nombre de points d'intersection d'une droite choisie aléatoirement avec cette courbe. L'observation essentielle sur laquelle ils basent leur définition de l'inconstance est étroitement liée au théorème suivant dû à Morgan Crofton :

**Théorème 5.1.4 (Théorème de Cauchy-Crofton [22])** Soit  $\gamma : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe de  $\mathbb{R}^2$  de longueur  $l(\gamma)$  et soit  $\text{Per}(\text{Conv}(\gamma))$  le périmètre de son enveloppe convexe. Alors le nombre moyen de points d'intersection de  $\gamma$  avec l'ensemble des droites coupantes est égal à  $\frac{2 l(\gamma)}{\text{Per}(\text{Conv}(\gamma))}$ .

La définition de l'inconstance que les auteurs proposent découle immédiatement de ce dernier théorème :

22. Plus formellement,  $\text{Per}(\text{Conv}(\gamma))$  peut être donné de la façon suivante : Soit  $\mathcal{T} : \mathcal{T}(k; l; m) \rightarrow \mathcal{T}(k; l; m)$  la projection canonique qui à un élément du Tonnetz déplié associe sa classe d'équivalence dans le Tonnetz replié. Alors  $\text{Per}(\text{Conv}(\gamma)) := \sum_{p \in \mathcal{T}} \text{Card} \{ j \in \mathcal{F} \mid \gamma \text{ coupe } [C_p, C_{p+e_1}] \text{ ou } [C_p, C_{p+e_2}] \}$ , où  $\mathcal{F}$  désigne l'ensemble des sommets étiquetés de  $\mathcal{T}(k; l; m)$  et  $e_1$  et  $e_2$  les vecteurs à partir desquels  $\mathcal{T}(k; l; m)$  a été construit.

Définition 5.1.5 (Inconstance d'une courbe de  $\mathbb{R}^2$  (Allouche, Maillard-Teyssier [2])) Soit une courbe de  $\mathbb{R}^2$ . Alors son inconstance est définie par

$$\text{Inconst}(\gamma) := \frac{2 \cdot l(\gamma)}{\text{Per Conv}(\gamma)},$$

où  $l(\gamma)$  désigne la longueur de  $\gamma$  et  $\text{Per Conv}(\gamma)$  le périmètre de son enveloppe convexe.

Exemple 5.1.6. Afin de visualiser cette définition, on donne trois exemples de courbes simples de différentes inconstances sur la figure 11.



Figure 11 Exemples de courbes d'inconstance 1 (à gauche),  $\frac{4}{3}$  (au milieu) et  $\frac{3}{2}$  (à droite).

Dans le cadre d'analyses de trajectoires dans des Tonnetze, on propose d'intégrer l'inconstance dans notre collection de descripteurs de trajectoires. Afin de répondre à un contexte géométrique similaire à celui de la définition 5.1.5 qui considère des courbes de  $\mathbb{R}^2$ , on évaluera uniquement l'inconstance de trajectoires construites dans des Tonnetzes dépliés en déterminant leur longueur ainsi que le périmètre de leur enveloppe convexe.

### 5.1.5 La distance de Hausdorff d'une trajectoire à un segment de droite

Suivant un objectif similaire à celui de l'inconstance qui décrit la complexité d'une courbe en la comparant à des droites, on s'inspire d'un type de problème géométrique connu sous le nom de door width [26] ou de door-width [39] qui, intuitivement, s'intéresse aux dimensions d'une porte à travers laquelle on souhaiterait faire passer un polygone donné. Comme, dans le cadre de ce mémoire, une trajectoire dans un Tonnetz est définie en tant que courbe à ne par morceaux, on peut l'assimiler à un polygone fermé en connectant par un segment son point de départ et son point d'arrivée. Partant de cette observation, on propose d'exprimer la largeur des trajectoires dépliées en termes de leur distance de Hausdorff par rapport au segment de droite qui relie leurs points de départ et d'arrivée. À cette fin, on rappelle tout d'abord la définition de la distance de Hausdorff :

Définition 5.1.7 (Distance de Hausdorff [3]) Soient  $A, B \subset \mathbb{R}^2$  deux ensembles compacts non vides. Alors la distance de Hausdorff entre  $A$  et  $B$  est donnée par

$$d_H(A; B) := \max \left( \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a; b); \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a; b) \right);$$

où  $d$  désigne la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ .

Étant donnée maintenant une trajectoire  $\gamma$  dans un Tonnetz déplié  $T(k; l; m)$ , on détermine la droite  $\sigma$  passant par son point de départ et son point d'arrivée et on exprime la largeur de  $\gamma$  par la somme des distances de Hausdorff entre  $\gamma$  et chacune des parties de  $\sigma$  dans les deux demi-plans définis par  $\sigma$  :<sup>23</sup>

23. On remarque que ceci ne correspond pas à une détermination de la door-width de  $\gamma$  et peut même donner des valeurs éloignées de celle-ci. Néanmoins, on présume que l'axe entre les points de départ et d'arrivée et l'étendue d'une trajectoire par rapport à cet axe pourrait être significatifs dans l'analyse de trajectoires et donner une certaine estimation de l'étendue du parcours tonal d'une pièce analysée.

Définition 5.1.8 (Largeur d'une trajectoire). Soit  $\gamma$  une trajectoire dépliée et soit  $\ell$  la droite passant par ses points de départ et d'arrivée. Notons  $\mathbb{H}^+$  et  $\mathbb{H}^-$  les demi-plans de  $\mathbb{R}^2$  déterminés par la droite  $\ell$ . Alors, on définit la largeur de la trajectoire dépliée par

$$\text{Larg}(\gamma) := d_H(\gamma \setminus \mathbb{H}^+; \ell) + d_H(\gamma \setminus \mathbb{H}^-; \ell).$$

### 5.1.6 Les pôles d'une trajectoire

Dans le contexte de l'analyse harmonique, le terme de polarisation fait référence à une hiérarchisation du discours harmonique suivant laquelle les mélodies et les progressions harmoniques ont tendance de graviter autour de certains degrés principaux de la gamme utilisée appelés pôles qui exercent une certaine d'attraction sur les autres degrés de la gamme ([1], entrée Polarisation/Pôle et Tonique). Tandis que, dans un environnement harmonique tonal, ce principe de polarisation est le plus souvent exprimé par le rapport des degrés de la tonique et de la dominante aux autres degrés de la gamme, l'existence de pôles peut tout à fait caractériser des langages harmoniques modaux, post-tonaux et même atonaux.

On propose ici d'adapter l'idée de l'existence de pôles à l'étude des trajectoires dans les Tonnetz repliés. Ainsi, on souhaite détecter toute accumulation d'accords représentés dans une région du Tonnetz qui, intuitivement, semble correspondre à une certaine force d'attraction exercée par un des points du Tonnetz. En analogie avec l'analyse harmonique, on espère que cette considération nous permet d'obtenir des informations concernant la hiérarchie tonale des pièces de musique représentées et notamment d'en déterminer les tonalités. De façon formelle, on définit les pôles d'une trajectoire comme suit :

Définition 5.1.9 (Pôle d'une trajectoire dans un Tonnetz replié) Soit  $\gamma: [0; N-1] \rightarrow \mathcal{P}(k; l; m)$  une trajectoire d'une progression harmonique  $(C_0; \dots; C_{N-1})$  dans un Tonnetz replié quelconque telle que, pour  $i \in \{0; \dots; N-1\}$ , le point  $\gamma(i)$  représente l'accord  $C_i$  dans le Tonnetz. On appellera pôle de la trajectoire  $\gamma$  tout point  $p \in \mathcal{P}(k; l; m)$  tel que

$$\text{Card } B_r(p) \setminus \{\gamma(i) \mid i = 0; \dots; N-1\} \geq P,$$

où  $B_r(p)$  désigne la boule ouverte centrée en  $p$  d'un rayon choisi  $r \in \mathbb{R}$  et où  $P \in \mathbb{N}$  définit une valeur seuil indiquant le nombre minimal d'accords représentés dans le voisinage  $B_r(p)$  du pôle  $p$ .

Afin de déterminer des pôles de trajectoires dans des cas concrets, on adaptera les choix de  $r$  et  $P$  au contexte et au problème analytique posés. De manière générale, on souhaite choisir les valeurs de  $r$  et  $P$  suffisamment petites pour décrire des accumulations d'accords pertinentes, et suffisamment grandes pour que  $B_r(p) \setminus \{\gamma(i) \mid i = 0; \dots; N-1\}$  contienne d'autres points que  $p$  et donc des représentations de plusieurs accords différents.

### 5.1.7 Sens et directions des vecteurs d'enchaînement

#### 5.1.7.1 Autour des vecteurs harmoniques

Dans le but de formuler une façon musicalement (et musicologiquement) fondée de décrire les sens et les directions des vecteurs d'enchaînement, on s'inspire de la théorie des vecteurs harmoniques de Nicolas Meeùs. Dans [34] et [35], Meeùs introduit une méthode d'analyse d'enchaînements entre deux accords qui est essentiellement basée sur le mouvement effectué entre les notes fondamentales de ces accords.

Ainsi, sa théorie des vecteurs harmoniques distingue entre deux catégories d'enchaînements : les enchaînements dominants et les enchaînements sous-dominants. À chacune de ces catégories correspond

un modèle d'enchaînement principal : un mouvement de quinte descendante (ou de quarte ascendante) entre les fondamentales<sup>24</sup> constitue le modèle d'un enchaînement dominant ; un mouvement de quinte ascendante (ou de quarte descendante)<sup>25</sup> définit le modèle d'un enchaînement sous-dominant

Puis, Meeùs définit des enchaînements de substitution qui, selon le contexte musical, peuvent réaliser une fonction harmonique semblable à celle de leur représentant principal : les enchaînements se faisant par mouvement de seconde ascendante ou de tierce descendante<sup>26</sup> entre les fondamentales sont considérés comme substitutions dans la catégorie des enchaînements dominants ; les enchaînements pour lesquels les fondamentales réalisent un mouvement de seconde descendante ou de tierce ascendante<sup>27</sup> sont considérés comme substitutions dans la catégorie des enchaînements sous-dominants

Dans [15], Philippe Cathé propose une application de la théorie des vecteurs harmoniques à l'analyse stylistique computationnelle en avançant que les phénomènes harmoniques locaux et la nature des enchaînements harmoniques contribueraient de façon essentielle aux caractéristiques stylistiques. L'exemple musical concret qu'il donne en introduction de son article ([15], p.108) est éclairant dans ce sens et montre l'importance de la direction des enchaînements (ou des vecteurs) harmoniques :

Dans un contexte tonal classique, une progression harmonique dans la tonalité de si[ majeur qui est basée sur les trois accords parfaits de si[ majeur, de mi[ majeur et de fa majeur serait typiquement construite selon le modèle

si[ majeur ! mi[ majeur ! fa majeur ! si[ majeur

ce qui, en termes de degrés de la tonalité, correspondrait à la progression IV ! V ! I. Or, suivant un modèle qui est typique pour leur style harmonique, les Beatles enchaînent les mêmes accords dans la Coda de *Hey Jude* par la progression

fa majeur ! mi[ majeur ! si[ majeur ! fa majeur

qui serait atypique pour un compositeur d'une génération classique ou romantique. C'est le cadre formel des vecteurs harmoniques qui permet de qualifier la première progression comme une succession de trois enchaînements dominants tandis que la progression des Beatles fait se suivre trois enchaînements sous-dominants.

Comme, dans le cadre de ce mémoire, les Tonnetz de  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$  permettent une représentation géométrique des enchaînements harmoniques en tant que vecteurs, on propose d'adapter à notre approche le cadre des vecteurs harmoniques qui sont définis par une direction et un sens abstraits entre deux accords. Afin de faire le lien avec le contexte tonal de l'utilisation des vecteurs harmoniques, on se restreindra, dans un premier temps, au Tonnetz  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$ <sup>28</sup> pour lequel on donne la définition suivante :

**Définition 5.1.10** (Vecteurs dominants et sous-dominants généralisés) Considérons une réalisation du Tonnetz  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$  à partir des vecteurs  $e_1$  et  $e_2 \in \mathbb{R}^2$  auxquels on associe respectivement les classes d'intervalles 3 et 4. Soit  $v \in \mathbb{R}^2$  le vecteur d'enchaînement dans  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$  associé à un enchaînement harmonique  $(C_0; C_1)$  et notons  $\angle$  l'angle orienté entre  $e_1$  et  $v$ . Alors  $v$  est dit dominant si  $\angle < 0$  et  $v$  est dit sous-dominant si  $0 < \angle$ .

24. On remarque qu'un tel mouvement entre fondamentales est notamment réalisé par des enchaînements du type dominante ! tonique (V ! I) et tonique ! sous-dominante (I ! IV).

25. Ce type mouvement entre fondamentales est notamment réalisé par les enchaînements sous-dominante ! tonique (IV ! I) et tonique ! dominante (I ! V).

26. Des enchaînements remarquables dans cette catégorie sont notamment de type sous-dominante ! dominante (IV ! V) ou encore dominante ! sous-dominante (V ! VI) d'un côté ainsi que dominante ! médiate (V ! III) de l'autre côté.

27. Ce sont ici, par exemple, des enchaînements de type dominante ! sous-dominante (V ! IV) ainsi que médiate ! dominante (III ! V).

28. Une généralisation aux autres Tonnetz serait possible mais semble assez abstraite dans son utilisation.

Cette définition généralise la classification de Nicolas Meeùs dans le sens où, d'un côté, elle associe chaque enchaînement harmonique quelconque entre deux accords à une catégorie d'enchaînements, même si leur note fondamentale n'est pas bien définie. De l'autre côté, elle conserve les essentielles attributions en catégories telles que proposées par Meeùs :

Exemple 5.1.11. On vérifie que chaque enchaînement du type  $V^5 ! I^5$  ou  $V^7 ! I^5$ <sup>29</sup> (et plus généralement, chaque enchaînement correspondant à un mouvement de quinte descendante entre les fondamentales) est associé à un vecteur dominant et que chaque enchaînement du type  $V^5 ! I^5$  ou  $I^5 ! V^5$  (et plus généralement, chaque enchaînement correspondant à un mouvement de quinte ascendante entre les fondamentales) est associé à un vecteur sous-dominant dans le Tonnetz.

De plus, similairement aux vecteurs de substitution de Meeùs, chaque enchaînement entre accords parfaits avec un mouvement de tierce descendante ou de seconde majeure ascendante entre fondamentales correspond à un vecteur dominant et chaque enchaînement avec un mouvement de tierce ascendante ou de seconde majeure descendante entre fondamentales correspond à un vecteur sous-dominant.

Cathé propose dans [15] une approche d'analyse stylistique basée sur des paires de vecteurs en déterminant les types associés à deux vecteurs harmoniques successifs.

En partant de cette idée, on classe chaque paire de vecteurs d'enchaînement dans le Tonnetz suivant un des quatre types (dominant, dominant), (sous-dominant, sous-dominant), (dominant, sous-dominant) et (sous-dominant, dominant) et on ajoute à notre collection de descripteurs de trajectoires les rapports entre les nombres d'occurrences de ces différents types de paires de vecteurs dans une pièce de musique analysée. On retiendra particulièrement le rapport entre le nombre d'occurrences de paires de vecteurs de type (dominant, dominant) et le nombre d'occurrences de paires de vecteurs de type (sous-dominant, sous-dominant).

### 5.1.7.2 Classification des directions de vecteurs d'enchaînement

Dans le but de saisir computationnellement les directions de vecteurs d'enchaînement correspondant à une progression harmonique, on propose de créer des classes contenant des vecteurs d'enchaînement qui sont presque colinéaires. En considérant que tous les vecteurs appartenant à une même classe définissent quasiment la même direction, on comptera le nombre de classes déterminées pour une progression harmonique donnée pour estimer la variété de ses types d'enchaînements harmoniques.

Afin de baser la notion de quasi-colinéarité sur un critère musical, on admettra que, dans le Tonnetz  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$ , les vecteurs d'enchaînement  $v_{\text{dom}}$  et  $v_{\text{dom}}^0$  qu'on fait correspondre aux enchaînements dominants de type dominante ! tonique  $V^5 ! I^5$  et  $V^7 ! I^5$  définissent le même type de direction. À partir de cette considération, on note  $\theta_{\text{seuil}}$  l'angle (non orienté) entre  $v_{\text{dom}}$  et  $v_{\text{dom}}^0$  et on attribuera deux vecteurs à une même classe de quasi-colinéarité si l'angle entre eux est inférieur ou égal à  $\theta_{\text{seuil}}$ . Étant donnée une progression harmonique  $(C_0; \dots; C_{N-1})$ , on détermine (et on compte) les classes de quasi-colinéarité comme décrit par l'algorithme 4.

## 5.2 Application à la classification stylistique automatique

On présente ici, de façon synthétique, divers résultats obtenus pour des applications des descripteurs de trajectoires en tant qu'outils de classification stylistique.

29. Comme plus haut,  $V^5$  et  $I^5$  désignent des accords parfaits en position fondamentale respectivement sur le degré de la dominante et sur la tonique d'une certaine tonalité et  $V^7$  désigne un accord de septième de dominante en position fondamentale sur le degré de la dominante.

---

**Algorithme 4** Classes de vecteurs d'enchaînement quasi-colinéaires

---

déterminons la trajectoire de  $(C_0; \dots; C_{N-1})$  dans le Tonnetz  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$ ,

soit  $(v_1; \dots; v_N)$  la suite des vecteurs d'enchaînement déterminés par

créons la première classe quasi-colinéaire  $K_1$  associée au vecteur  $v_1$ ,

pour  $i = 2; \dots; N - 1$ ,

si il existe une classe  $K_j$  telle que l'angle entre  $v_i$  et  $v_j$  soit inférieur ou égal à  $\theta_{\text{seuil}}$ , alors

ajoutons le vecteur  $v_i$  à la classe  $K_j$ ,

sinon

créons la nouvelle classe quasi-colinéaire  $K_i$  associée au vecteur  $v_i$ ,

retourne : toutes les classes de quasi-colinéarité trouvées ainsi que le nombre de classes

---

Tous ces exemples de classifications binaires ont été effectués suivant le cadre introduit au paragraphe 4.3. Les chiffres MIDI correspondant aux différentes classes de styles musicaux ont été choisis de façon à obtenir des classes équilibrées en terme de nombre et de longueur de chiffres. Les précisions moyennes ont été calculées sur 10 essais du même type en divisant, pour chacun de ces tests, de manière aléatoire les bases de données utilisées en un ensemble de chiffres d'entraînement et un ensemble de chiffres test.

#### Paires de vecteurs harmoniques

| 1 <sup>re</sup> classe   | 2 <sup>e</sup> classe     | précision moyenne |
|--------------------------|---------------------------|-------------------|
| Bach : Chorales          | Debussy : Pièces diverses | 0,94              |
| Bach : Chorales          | Chopin : Pièces diverses  | 0,90              |
| Chopin : Pièces diverses | Debussy : Pièces diverses | 0,66              |

Table 1 Récapitulatif de quelques essais de classification binaire basés sur des paires de vecteurs harmoniques, plus précisément sur le rapport entre le nombre d'occurrences de paires du type (dominant, dominant) et le nombre d'occurrences de paires du type (sous-dominant, sous-dominant) dans les pièces analysées.

#### Compliance

| 1 <sup>re</sup> classe   | 2 <sup>e</sup> classe        | précision moyenne |
|--------------------------|------------------------------|-------------------|
| Bach : Chorales          | Bill Evans : Pièces diverses | 0,97              |
| Bach : Chorales          | Chopin : Pièces diverses     | 0,94              |
| Chopin : Pièces diverses | Debussy : Pièces diverses    | 0,64              |

Table 2 Récapitulatif de quelques essais de classification binaire basés sur des calculs de la compliance des trajectoires dans le Tonnetz  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$  correspondant aux pièces analysées.

De façon générale, on remarque que les résultats ont tendance à être considérablement meilleurs pour des classifications entre deux classes de styles très contrastés. Tandis que les descripteurs basés sur les vecteurs harmoniques et la compliance semblent prometteurs pour pouvoir tenir compte d'au moins certains aspects stylistiques, une application à la classification des autres descripteurs (y compris des descripteurs pour lesquels on ne présente pas les résultats obtenus ici) semble moins pertinente ou demandera une approche réadaptée, voire une redéfinition de ces descripteurs.

## Inconstance

| 1 <sup>re</sup> classe | 2 <sup>e</sup> classe        | précision moyenne |
|------------------------|------------------------------|-------------------|
| Bach : Chorales        | Bill Evans : Pièces diverses | 0,68              |
| Bach : Chorales        | Chopin : Pièces diverses     | 0,58              |

Table 3 Récapitulatif de quelques essais de classification binaire basés sur des calculs de l'inconstance des trajectoires dans le Tonnetz  $\mathbb{T}(3; 4; 5)$  correspondant aux pièces analysées.

## 6 | Les vecteurs d'enchaînement en tant qu'outils de classification et de génération

Au chapitre précédent, on s'est intéressé à des propriétés géométriques de trajectoires considérées à grande échelle et on a évoqué leur potentiel éventuel de correspondre à des propriétés musicales et des caractéristiques stylistiques. Suivant une approche plus locale, on souhaiterait baser des méthodes de classification stylistique et de génération de progressions harmoniques sur un type d'objets essentiels de ce mémoire : les vecteurs d'enchaînement associés aux segments géodésiques reliant deux accords placés dans un Tonnetz comme définis au paragraphe 3.2 (définition 3.2.6). On a déjà mentionné leur correspondance étroite avec les différents types d'enchaînements harmoniques (proposition 3.2.8) et on présentera dans ce chapitre différentes propositions d'applications de ces vecteurs d'enchaînement.

### 6.1 Classification stylistique automatique

Afin de définir une méthode de classification basée sur des vecteurs d'enchaînement, on propose de considérer tout d'abord un exemple concret de classification stylistique binaire, c'est-à-dire d'une tâche de classification qui vise à répartir des pièces de musique dans deux groupes disjoints selon leurs caractéristiques stylistiques.

Établissons le cas dans lequel on a connaissance d'un corpus de chorales de Bach  $C_{\text{Bach}} := \{P_i \mid i=0, \dots, I-1\}$  et d'un corpus de quatuors de Mozart  $C_{\text{Mozart}} := \{Q_j \mid j=0, \dots, J-1\}$ . Chacun de ces deux corpus est défini comme un ensemble d'un certain nombre de pièces de musique et chacune de ces pièces de musique (ou  $Q_j$ ) sera donnée sous forme d'une progression d'accords  $P_i := (C_0^{P_i}; \dots; C_{N-1}^{P_i})$  (ou  $Q_j := (C_0^{Q_j}; \dots; C_{M-1}^{Q_j})$ ). On admettra que ces deux corpus définissent implicitement, par le contenu harmonique de leurs différentes pièces, des styles musicaux qu'on désignera respectivement comme celui des chorales de Bach et celui des quatuors de Mozart.

Étant donnée maintenant une pièce inconnue (c'est-à-dire telle que  $P \notin C_{\text{Bach}}$  et  $P \notin C_{\text{Mozart}}$ ), on souhaiterait déterminer son appartenance à un de ces deux styles de musique sur la base de son contenu harmonique – plus précisément sur la base des enchaînements harmoniques qui la constituent.

Dans ce but, choisissons un Tonnetz replié quelconque  $\mathbb{T}(k; l; m)$  et déterminons les trajectoires  $e^{P_i}$  (pour  $i \in \{0, \dots, I-1\}$ ) dans  $\mathbb{T}(k; l; m)$  de tous les chorales de Bach  $P_i$  ainsi que les trajectoires  $e^{Q_j}$  (pour  $j \in \{0, \dots, J-1\}$ ) des quatuors de Mozart  $Q_j$ . Définissons ensuite l'ensemble de tous les vecteurs d'enchaînement qui apparaissent dans une des trajectoires d'un chorale de Bach :

$$V_{\text{Bach}} := \bigcup_{i=0, \dots, I-1} \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v \text{ est un vecteur d'enchaînement déterminé par un segment } e^{P_i} g\}$$

et, de façon similaire,



$V_{Mozart} := \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{v} \text{ est un vecteur d'enchaînement donné par un segment } \theta^i \text{ g.} \}$

Introduisons ensuite l'ensemble  $V_{Bach \setminus Mozart}$  contenant tous les vecteurs d'enchaînement repérés chez Bach qui n'apparaissent pas chez Mozart et, inversement, l'ensemble  $V_{Mozart \setminus Bach}$  de tous les vecteurs trouvés exclusivement chez Mozart :

$$V_{Bach \setminus Mozart} := V_{Bach} \setminus V_{Mozart} \quad \text{et} \quad V_{Mozart \setminus Bach} := V_{Mozart} \setminus V_{Bach}.$$

À n d'attribuer maintenant la pièce inconnue  $l$  à un des deux styles connus, on détermine sa trajectoire  $\theta^l$  dans le Tonnetz  $\mathbb{P}(k; l; m)$  ainsi que l'ensemble  $V^l$  des vecteurs d'enchaînement qui apparaissent dans celle-ci :

$V^l := \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{v} \text{ est un vecteur d'enchaînement déterminé par un segment } \theta^l \text{ g.} \}$

On propose ensuite de compter le nombre  $|V_{Bach \setminus Mozart} \cap V^l|$  de vecteurs de  $V^l$  qui apparaissent exclusivement chez Bach et le nombre  $|V_{Mozart \setminus Bach} \cap V^l|$  de ceux qui apparaissent seulement chez Mozart :

$$N_{Bach \setminus Mozart} := \text{Card} (V_{Bach \setminus Mozart} \cap V^l) \quad \text{et} \quad N_{Mozart \setminus Bach} := \text{Card} (V_{Mozart \setminus Bach} \cap V^l).$$

Si, naïvement, on obtient  $N_{Bach \setminus Mozart} > N_{Mozart \setminus Bach}$ , on considérera que la pièce est stylistiquement plus proche des chorales de Bach que des quatuors de Mozart et inversement, si  $N_{Bach \setminus Mozart} < N_{Mozart \setminus Bach}$ , on dira que la pièce se rapproche plutôt du style des quatuors de Mozart.<sup>30</sup>

Avant d'appliquer ce principe de classification stylistique basée sur des vecteurs d'enchaînement, il reste à formuler quelques remarques concernant le cadre computationnel. Dans un premier temps, on considérera des classifications binaires impliquant deux corpus de chiffres MIDI et  $C_2$  correspondant à des pièces de musique de style différents. On choisira ces corpus de sorte qu'ils contiennent un nombre comparable de chiffres. À n d'évaluer la pertinence de la méthode proposée, on l'appliquera plusieurs fois de suite aux corpus  $C_1$  et  $C_2$ . À chaque application, on divisera au hasard les deux corpus en des corpus  $C_1^{ref}$  et  $C_2^{ref}$  qui serviront en tant que référence stylistique et en des corpus  $C_1^{inc}$  et  $C_2^{inc}$  qui contiennent les chiffres qui joueront le rôle de pièces inconnues et qui seront donc à classer suivant un des corpus de référence.

À n de diversifier la nature des vecteurs d'enchaînement, on les déterminera dans deux Tonnetzes différents :  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$  et  $\mathbb{P}(1; 2; 9)$ . Comme décrit ci-dessus, on retiendra les vecteurs d'enchaînement  $V_{1n2}^{ref}$  qui apparaissent seulement dans le corpus de référence 1 et qui n'ont pas été repérés pour le corpus de référence 2 ainsi que les vecteurs  $V_{2n1}^{ref}$  qui apparaissent exclusivement dans les trajectoires du corpus de référence 2.

Dans le but d'exclure un biais éventuel engendré par des tailles différentes de  $V_{1n2}^{ref}$  et de  $V_{2n1}^{ref}$ ,<sup>31</sup> on réduira (aléatoirement) la taille du plus grand de ces deux ensembles de vecteurs de référence.

#### Application 6.1.1 (Classification binaire).

- (i) Pour un premier d'exemple d'application, on choisit un corpus  $C_{Bach}$  contenant des chorales de Jean-Sébastien Bach (1685-1750) et un corpus  $C_{Corelli}$  avec des extraits de sonates en trio d'Arcangelo Corelli (1653-1713). Les deux corpus choisis contiennent en tout 242 chiffres et à chaque essai de classification on divisera ces corpus de façon à obtenir 230 pièces de référence (pour lesquelles on déterminera, pour chaque essai, les ensembles de vecteurs de référence  $V_{Bach \setminus Corelli}^{ref}$  et de  $V_{Corelli \setminus Bach}^{ref}$ ) et 12 pièces inconnues à classer.

En évaluant les classifications obtenues en complétant 10 essais successifs, on obtient une précision moyenne de 0,98.

30. ... et on ne tirera aucune conclusion en cas d'égalité entre ces deux nombres.

31. ... qui pourrait privilégier la répartition des pièces classées en faveur de l'ensemble le plus large parmi  $V_{1n2}^{ref}$  et  $V_{2n1}^{ref}$ .

- (ii) Dans un deuxième temps, on considère deux corpus  $C_{Ravel}$  et  $C_{Debussy}$  contenant respectivement des extraits du Tombeau de Couperin (composé entre 1914 et 1917) et de Sonatine (composée entre 1903 et 1905) de Maurice Ravel et des extraits des deux livres Préludes (composés entre 1909 et 1913) de Claude Debussy. On évalue ainsi si la méthode de classification par vecteurs d'enchaînement est un outil approprié pour tenir compte des différences stylistiques de ces deux ensembles de pièces de musique, composées contemporanément par Ravel et Debussy. En évaluant à nouveau les classifications obtenues en complétant 10 essais successifs, on obtient une précision moyenne de 0,87.
- (iii) En guise de dernier exemple présenté ici et de validation de la méthode proposée, on considère de nouveau le corpus  $C_{Bach}$  des chorales de Bach qu'on confronte maintenant à un corpus de style très contrasté  $C_{Evans}$  contenant des pièces attribuées à Bill Evans. La précision moyenne obtenue dans ce cas après 10 essais de classification est de 1,00.

| 1 <sup>re</sup> classe                     | 2 <sup>e</sup> classe                             | précision moyenne |
|--|---|-------------------|
| Bach : Chorales                            | Corelli : Sonates en trio                         | 0,98              |
| Ravel : Le Tombeau de Couperin<br>Sonatine | Debussy : Préludes pour piano<br>(Livres I et II) | 0,87              |
| Bach : Chorales                            | Bill Evans : Pièces diverses                      | 1,00              |

Table 4 Récapitulatif de quelques essais de classification binaire basés sur la méthode des vecteurs d'enchaînement.

## 6.2 Génération de progressions d'accords

Au paragraphe précédent, on a formulé l'hypothèse qu'un corpus donné peut définir implicitement un style harmonique par l'intermédiaire des types d'enchaînements d'accords utilisés dans les pièces de musique appartenant à ce corpus. On a montré par la suite que la représentation d'enchaînements harmoniques par des vecteurs dans un Tonnetz peut permettre une classification suivant des styles harmoniques définis par des corpus donnés et qu'il semble donc y avoir un lien important entre vecteurs d'enchaînement et style harmonique.

En supposant l'existence d'un tel lien, la question se pose si les vecteurs d'enchaînement pourraient non seulement servir à la classification stylistique, mais aussi être un outil de génération de progressions d'accords dans un certain style harmonique. On proposera dans ce paragraphe une approche et plusieurs applications de générations basées sur les n-grammes extraits de trajectoires dans un Tonnetz au sens de la définition suivante :

**Définition 6.2.1** (n-gramme). Étant donnée une suite de  $N$  mots, de  $N$  symboles ou, de façon générale, de  $N$  éléments, on appelle n-gramme (pour  $n \leq N$ ) toute sous-suite de longueur  $n$ .

On adapte cette définition des n-grammes aux trajectoires dans un Tonnetz replié et dans un produit de Tonnetze à poids comme suit :

**Définition 6.2.2** (n-gramme d'une trajectoire dans un Tonnetz replié, n-gramme d'une trajectoire dans un produit de Tonnetze à poids) Si  $e$  est une trajectoire dans un Tonnetz  $\mathcal{T}(k; l; m)$  d'une progression d'accords  $\{C_0; \dots; C_N\}$ , alors on note  $v := (v_1; \dots; v_N)$  la suite des vecteurs d'enchaînement  $v_i$  entre  $C_{i-1}$  et  $C_i$ . On appellera alors, pour  $n \leq N$ , n-gramme de la trajectoire  $e$  toute sous-suite de  $e$  de longueur  $n$ .

Soit  $e$  une trajectoire de  $(C_0; \dots; C_N)$  dans un produit de Tonnetze à poids  $\mathbb{P}^F(k; l; m)$   $\mathbb{P}^F(k^0; l^0; m^0)$ . Alors on considère comme  $n$ -gramme de  $e$  toute sous-suite de longueur  $n$  de la suite des vecteurs d'enchaînement  $e := (v_1; v_1^0; \dots; v_N; v_N^0)$ .

Dans le but de générer des trajectoires correspondant au langage harmonique d'un corpus donné, on propose de considérer tous les  $n$ -grammes des trajectoires de toutes les pièces de musique dans ce corpus. On créera des nouvelles suites de vecteurs d'enchaînement en concaténant différents  $n$ -grammes (de longueurs différentes) sélectionnés, c'est-à-dire tirés au hasard, en fonction de leur nombre d'occurrences dans le corpus.

Afin de garantir que le discours harmonique ainsi engendré maintienne une certaine cohérence, on réalisera cette concaténation de  $n$ -grammes par un tuilage. Ainsi, chaque fois qu'on souhaite prolonger une suite de vecteurs d'enchaînement déjà générée, on choisit un nouveau  $n$ -gramme de sorte que son début (donc ses premiers vecteurs) corresponde à la fin de la suite des vecteurs déjà générés.

En vue d'une approche réalisable, on permettra que ce tuilage ne demande pas nécessairement une correspondance exacte entre vecteurs mais reste acceptable si le début du nouveau  $n$ -gramme réalise un chemin alternatif à celui de la fin de la suite de vecteurs déjà générée :

**Définition 6.2.3** (Chemin alternatif dans un Tonnetz replié) Soit  $e := (v_1; \dots; v_l)$  une suite de vecteurs d'enchaînements dans un Tonnetz replié  $\mathbb{P}(k; l; m)$ . On dit que  $e := (w_1; \dots; w_j)$  définit un chemin alternatif à  $e$  dans  $\mathbb{P}(k; l; m)$  si la concaténation des segments géodésiques  $[0; 1] \rightarrow \mathbb{P}(k; l; m)$  de vecteur vitesse  $v_i \in T_{i(0)} \mathbb{P}(k; l; m)$  aboutit au même point que la concaténation des segments géodésiques  $[0; 1] \rightarrow \mathbb{P}(k; l; m)$  de vecteur vitesse  $w_j \in T_{j(0)} \mathbb{P}(k; l; m)$  en partant d'un même point initial  $p \in \mathbb{P}(k; l; m)$ .

**Exemple 6.2.4.** De façon schématique, la méthode de génération de suites de vecteurs d'enchaînement proposée est présentée sur la figure 12.

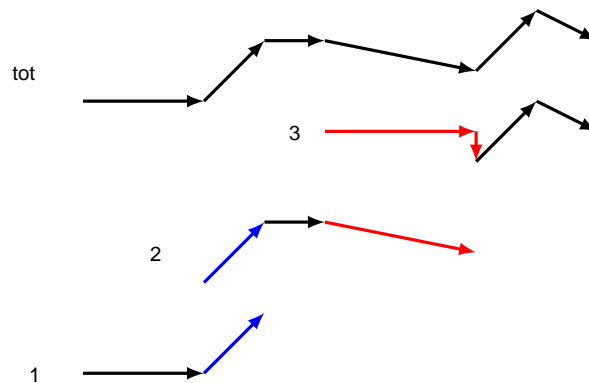


Figure 12 Présentation schématique de la méthode de génération d'une suite de vecteurs. La suite de vecteurs finale  $tot$  est obtenue par concaténation en tuilage des suites de vecteurs  $1$ ,  $2$  et  $3$ . Le tuilage entre  $1$  et  $2$  (en bleu) est fait par correspondance exacte entre la fin de  $1$  et le début de  $2$  tandis que le tuilage entre  $2$  et  $3$  (en rouge) est basé sur un chemin alternatif.

Revenons au cas concret du paragraphe précédent dans lequel on connaît un corpus  $\mathcal{C} := \{p_i\}_{i=0; \dots; l-1}$  d'un nombre  $l$  de chorales de Bach qui détermine le cadre stylistique selon lequel on souhaite générer des suites de vecteurs d'enchaînement.

En raison du lien particulièrement étroit (au sens des propositions 3.2.8 et 2.6.3) entre enchaînements harmoniques et vecteurs d'enchaînement dans le produit de Tonnetze à poids  $\mathbb{P}(3; 4; 5)$

$\mathbb{P}^F(1; 2; 9)$ , on privilégiera ce produit de Tonnetze pour déterminer toutes les trajectoires servant à la génération.

Ainsi, notons tout d'abord  $e^{P_i}$  la trajectoire du choral  $P_i$  (pour  $i \in \{0; \dots; l-1\}$ ) dans  $\mathbb{P}^F(3; 4; 5)$   $\mathbb{P}^F(1; 2; 9)$ . Notons de plus

$$e^{P_i} := (v_1^{P_i}; w_1^{P_i}) :: \dots :: (v_{N_i}^{P_i}; w_{N_i}^{P_i}), \text{ pour } i \in \{0; \dots; l-1\},$$

les suites de vecteurs d'enchaînement correspondant à ces trajectoires des chorals.

Comme annoncé plus haut, on basera la génération de suites de vecteurs d'enchaînement (et, a fortiori, la génération de trajectoires) sur tous les  $n$ -grammes issus de toutes les suites  $e^{P_i}$ . On procédera ainsi par concaténation de  $n$ -grammes choisis de sorte que les raccordements des  $n$ -grammes entre-eux se fassent en tuilage.

Afin de donner un cadre computationnel au choix des différents  $n$ -grammes, on fixe des valeurs limites  $m_{\min}$  et  $m_{\max}$  pour les longueurs minimales et maximales des  $n$ -grammes pris en compte pour prolonger des suites de vecteurs déjà générées. On fixe aussi des valeurs  $l_{\min}$  et  $l_{\max}$  pour définir les longueurs minimales et maximales des tuilages entre les différents  $n$ -grammes choisis.

On fixe, par ailleurs, un nombre total de  $n$ -grammes  $G_{\text{tot}}$  qui constitueront la suite de vecteurs générée.

Ayant défini tout ce cadre méthodique, on procédera à la génération de suites de vecteurs d'enchaînement comme décrit par l'algorithme 5.

---

#### Algorithme 5 Génération de suites de vecteurs d'enchaînement

---

Prendre un début  $e_1$  d'une suite de vecteurs d'enchaînement qu'on souhaite prolonger,

Poser  $e_{\text{tot}} := e_1$ ,

pour  $g = 2; \dots; G_{\text{tot}}$ ,

déterminons tous les  $n$ -grammes de longueur  $m_{\min}$  à  $m_{\max}$  tels que :

(i) soit le début de  $e$  soit égal à la sous-suite des  $m$  derniers vecteurs de  $e_{\text{tot}}$  (avec  $m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$ ),

(ii) soit le début de  $e$  définisse un chemin alternatif aux  $m$  derniers vecteurs de  $e_{\text{tot}}$  (avec  $m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$ ),

tirons au hasard  $e_2$  parmi tous les  $n$ -grammes ainsi déterminés,

concaténons à  $e_{\text{tot}}$  la suite de vecteurs de  $e_2$  privée de son début (qui correspond à la  $m$  de  $e_{\text{tot}}$ ),

retourne : la suite de vecteurs  $e_{\text{tot}}$  obtenue par la concaténation de  $G_{\text{tot}}$   $n$ -grammes.

---

Il reste, à ce point, quelques aspects techniques à détailler.

Mentionnons tout d'abord le tirage au hasard d'un  $n$ -gramme parmi tous les  $n$ -grammes possibles à une des étapes de la génération qu'on effectuera en fonction du nombre d'occurrences des différents  $n$ -grammes dans le corpus. Afin de ne pas défavoriser des enchaînements harmoniques rares, on utilisera de préférence des probabilités de tirage qui dépendent de la racine carrée du nombre d'occurrences.

Finalement, afin de faire correspondre effectivement ces suites de vecteurs générées à des progressions d'accords, on impose un choix d'accord initial à partir duquel la suite des accords est déterminée en fonction des enchaînements harmoniques donnés par les vecteurs d'enchaînement générés.

**Application 6.2.5** (Génération de progressions harmoniques dans des styles différents) On donne ici deux exemples de progressions harmoniques générées à partir du cadre méthodique donné par les vecteurs d'enchaînement.

La figure 13 montre un arrangement d'une suite d'accords générée à partir d'un corpus de chorales de Bach et des trajectoires correspondant à tous des chorales appartenant à ce corpus.

La figure 14 donne un arrangement d'une suite d'accords générée à partir d'un corpus de pièces attribuées à Bill Evans. Tandis que, dans le cas de chorales de Bach, les trajectoires ont été déterminées

sur les progressions harmoniques extraits des chorales sans aucune opération de filtration, on a filtré les progressions d'accords tirées du corpus de Bill Evans de façon à garder uniquement tous les accords correspondant aux 25 classes de Forte les plus représentées dans le corpus.

Figure 13 Arrangement d'une progression d'accords générée par la méthode des vecteurs d'enchaînement à partir d'un corpus de chorales de Bach. La suite des accords générés a été maintenue sans aucune modification et est indiquée en dessous des systèmes de portées.

Figure 14 Arrangement d'une progression d'accords générée par la méthode des vecteurs d'enchaînement à partir d'un corpus de pièces de Bill Evans filtrées de façon à garder uniquement les 25 classes de Forte les plus représentées dans le corpus. La suite des accords générés est donnée à titre indicatif en dessous du système de portées.

On remarque ici que la méthode de génération proposée est liée à un certain nombre d'inconvénients. Tout d'abord, les progressions d'accords ne contiennent aucune information sur les dispositions des accords et sur la présence éventuelle de notes étrangères (telles que des notes de passage ou des appoggiatures). Ce sera ainsi l'arrangement qui devrait révéler et mettre en musique ce genre de caractéristiques harmoniques. Par ailleurs, la démarche proposée, basée sur des gammes, ne semble pas spécialement optimisée pour éviter la génération de progressions harmoniques qui paraissent moins intéressantes musicalement, par exemple à cause de redondances dans les suites d'accords générés. Néanmoins, comme la génération est obtenue à partir de gammes de vecteurs d'enchaînement (et non pas à partir de gammes d'accords) les progressions d'accords générées peuvent contenir des suites d'accords qui ne sont présentes de la même façon dans aucune des pièces du corpus initial.

Parmi les cas particuliers de types de générations qu'on peut imaginer, on évoque ici encore la possibilité d'interpolations entre deux accords :

Définition 6.2.6 (Interpolation entre deux accords) Soit  $T$  un Tonnetz quelconque et soit  $P_T$  la fonction de positionnement sous-jacente. On appelle interpolation entre deux accords  $C_0$  et  $C_1$  dans  $T$  toute trajectoire dans  $T$  ayant comme point de départ un positionnement  $p \in P_T(C_0)$  de  $C_0$  dans  $T$  et comme point d'arrivée un positionnement  $q \in P_T(C_1)$  de  $C_1$  dans  $T$ .

Par ailleurs, une approche de transformation de trajectoires inspirée par les plongements de trajectoires d'un Tonnetz dans un autre proposés par Louis Bigo dans sa thèse [9] pourrait impliquer la détermination des vecteurs d'enchaînements dans un certain Tonnetz  $\mathbb{T}(k; l; m)$  et la construction d'une trajectoire à partir de ces mêmes vecteurs dans un Tonnetz di érent  $\mathbb{T}(k^0; l^0; m^0)$ .

## 7 | Conclusions et perspectives

Dans ce mémoire, on a formalisé di érentes visions géométriques des Tonnetze toroïdaux et cylindriques à  $n$  de dé nir des représentations géométriques de progressions d'accords en tant que courbes dans ces espaces de Tonnetze. Une des notions essentielles que ces courbes nous ont permis d'élaborer est celle des vecteurs d'enchaînement dé nis à partir des vecteurs vitesse des segments géodésiques reliant deux représentations d'accords entre-elles. On a montré que ces vecteurs d'enchaînement permettent de représenter des enchaînements harmoniques dans le sens de la proposition 3.2.8.

En déterminant des trajectoires dans des structures enrichies par rapport aux Tonnetze classiques les Tonnetze à poids les vecteurs d'enchaînement nous ont permis, par l'intermédiaire d'un apprentissage en-grammes de vecteurs, de générer des progressions d'accords à partir de plusieurs corpus musicaux de styles di érents. Dans un but de rendre plus naturels les discours harmoniques ainsi générés, on pourrait envisager d'essayer de contrôler les modulations (localement) et les parcours tonals (globalement) des progressions d'accords générées. Une telle optimisation des progressions pourrait impliquer un suivi permanent de la tonalité à laquelle appartiennent les accords trouvés à chaque stade de la génération, par exemple en déterminant les pôles des trajectoires à di érentes étapes de la génération. Poursuivant l'idée de la cohérence des discours harmoniques générés, on pourrait, par ailleurs, envisager la génération de cadences qui permettraient de donner des structures de phrases musicales aux progressions harmoniques obtenues. Une telle démarche pourrait être basée sur une représentation informée des états d'accords telle que dé nie pour les Tonnetze à poids à états d'accords introduits dans la section 2.5.2 de ce mémoire. Une étude approfondie de ces structures de Tonnetze à poids pourrait ainsi permettre de saisir leur pertinence pour détecter et analyser di érents types de cadences<sup>32</sup>.

On souligne de nouveau qu'au stade actuel, la méthode de génération proposée faisant abstraction de tout paramètre musical non harmonique ainsi que des éléments harmoniques essentiels tels que la conduite des voix est loin d'être vraiment performante et optimisée aux générations de phrases musicales.

Une autre application des vecteurs d'enchaînement nous a amenés à leur application à la classification stylistique. En comparant le contenu, en termes de vecteurs d'enchaînement, de deux corpus musicaux et en déterminant les vecteurs apparaissant exclusivement dans chacun des deux corpus, on a notamment pu classer des pièces de musique de Ravel et Debussy composées quasiment contemporanément.

Dans une autre optique, on a établi un lien entre les vecteurs d'enchaînement et la théorie de vecteurs harmoniques de Nicolas Meeùs en classant les vecteurs selon leur type dominant ou sous-dominant.

Tandis que les méthodes de classification basées sur les vecteurs d'enchaînement semblent prometteuses, il sera indispensable d'approfondir l'étude de la pertinence de l'approche proposée. Ainsi, on pourrait, d'un côté, vérifier à quel point il est possible de réduire les tailles des corpus de référence et, d'un autre côté, essayer d'adapter la classification à un nombre plus grand de classes de styles

---

32. On remarque que, suivant l'hypothèse qu'une cadence parfaite dans une certaine tonalité pourrait être un indicateur d'une fin de phrase dans cette tonalité, la détection de cadences parfaites pourrait même éventuellement servir à la détermination de tonalités

harmoniques.

Toujours dans l'idée d'utiliser les trajectoires dans le Tonnetze en tant qu'outils de classification stylistique, on a défini une collection de descripteurs de trajectoires. Tandis que les résultats de classification obtenus à l'aide de ces descripteurs sont considérablement inférieurs à ceux obtenus pour les vecteurs d'enchaînement, on pourrait poursuivre leur étude suivant des angles d'approches plus fins que ceux abordés dans ce mémoire. Tout d'abord, une analyse fenêtrée pourrait permettre d'évaluer les variations au cours du temps des valeurs obtenues pour les différents descripteurs. Par ailleurs, une détection d'autosimilarités au sein d'un corpus (ou d'un sous-ensemble de pièces de ce corpus) pourrait permettre d'analyser et de comparer entre eux les bouts de trajectoires les plus typiques et les plus représentatifs des corpus étudiés. Finalement, on pourrait envisager une application combinée des descripteurs de trajectoires et la méthode de classification basée sur les vecteurs d'enchaînement.

Parmi les aspects qu'on n'a pas pu aborder dans ce mémoire, on évoque la question de la pertinence d'une représentation alternative des Tonnetze repliés obtenue par plongement. En poursuivant ainsi le paradigme du modèle Planet-4D correspondant à des Tonnetze plongés en 4 dimensions proposé par Gilles Baroin ([5] [6]). Pour les Tonnetze toroïdaux, une telle formalisation pourrait être obtenue par l'intermédiaire d'un plongement isométrique du type

$$\mathbb{P}(k;l;m) = S^1 \times S^1 \times S^3 \times R^4, \quad (x;y) \mapsto \left( \frac{1}{2} \cos(x); \sin(x); \cos(y); \sin(y) \right),$$

où  $S^3$  désigne la 3-sphère unité.

À partir de tels Tonnetze 4-dimensionnels plongés sur la 3-sphère unité, on pourrait envisager une approche de représentations d'accords similaire à celle proposée dans ce mémoire considérant des isobarycentres de polygones 4-dimensionnels ainsi que segments reliant entre eux ces isobarycentres.

Suivant une idée complètement différente, on pourrait étudier la possibilité d'introduire une dimension de timbre dans les représentations dans les Tonnetze. Dans ce but, on pourrait d'étudier des Tonnetze formalisés en tant que brés du type :  $\mathbb{P}(k;l;m) \times D^2 \rightarrow \mathbb{P}(k;l;m)$ , où  $D^2$  désigne le disque unité fermé, tel que présenté de façon schématisée sur la figure 15. Ce serait ainsi le positionnement dans le disque  $D^2$  qui pourrait déterminer les contributions de chaque classe de hauteur au timbre de l'accord représenté.

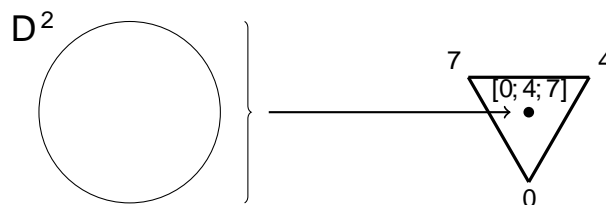


Figure 15 Présentation schématisée de la bré sur le point représentant l'ensemble de classes de hauteurs [0; 4; 7] dans le Tonnetz

Finalement, on évoque la possibilité d'intégration de différentes implémentations d'outils basés sur les trajectoires dans des logiciels d'analyse musicale assistée par ordinateur ou d'envisager une utilisation éventuelle comme outil d'improvisation ou de composition.

# Références

- [1] Claude Abromont et Eugène De Montalembert : Vocabulaire de l'harmonie Minerve, 2021.
- [2] Jean-Paul Allouche et Laurence Maillard-Teyssier : Inconstancy of Finite and Infinite Sequences *Theoretical Computer Science* 412 (22): 2268-2281, 2011.
- [3] Helmut Alt et Michael Godau : Computing the Fréchet Distance between Two Polygonal Curves. *International Journal of Computational Geometry & Applications* 5 (1-2): 75-91.
- [4] Jean-Pierre Aubin et Hélène Frankowska : *Set-Valued Analysis* Springer Science & Business Media, 2009.
- [5] Gilles Baroin : De Newton à Riemann, graphes et graphisme : interactions mathématico-musico-plastiques. *Litter@ Incognita*, 2010.
- [6] Gilles Baroin : Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux : modélisations, visualisations en hyperespace Thèse de doctorat, Université Toulouse le Mirail-Toulouse II, 2011.
- [7] Marcel Berger et Bernard Gostiaux : *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces* volume 115. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] Mattia Giuseppe Bergomi : *Dynamical and Topological Tools for (Modern) Music Analysis* Thèse de doctorat, Università degli Studi di Milano; Université Pierre et Marie Curie, 2015.
- [9] Louis Bigo : Représentations symboliques musicales et calcul spatial Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2013.
- [10] Louis Bigo et Moreno Andreatta : Topological Structures in Computer-Aided Music Analysis. In *Computational music analysis* pages 57-80. Springer, 2016.
- [11] Louis Bigo et Moreno Andreatta : Filtration of Pitch-Class Sets Complexes In *International Conference on Mathematics and Computation in Music* pages 213-226. Springer, 2019.
- [12] Louis Bigo, Daniele Ghisi, Antoine Spicher et Moreno Andreatta : Representation of Musical Structures and Processes in Simplicial Chord Spaces *Computer Music Journal* 39 (3): 9-24, 2015.
- [13] Louis Bigo, Antoine Spicher, Daniele Ghisi et Moreno Andreatta : Spatial Transformations in Simplicial Chord Spaces. In *Proceedings ICMC | SMC | 2014* pages 1112-1119, 2014.
- [14] Michael J. Catanzaro : Generalized Tonnetz *Journal of Mathematics and Music* 5(2): 117-139, 2011.
- [15] Philippe Cathé : Harmonic Vectors and Stylistic Analysis: A Computer-Aided Analysis of the First Movement of Brahms' String Quartet Op. 51-1. *Journal of Mathematics and Music* 4 (2): 107-119, 2010.
- [16] Richard Cohn : Neo-Riemannian Operations, Parsimonious Trichords, and Their "Tonnetz" Representations. *Journal of Music Theory*, 41 (1): 1-66, 1997.
- [17] Richard Cohn : Tonal Pitch Space and the (Neo-) Riemannian Tonnetz In *The Oxford Handbook of Neo-Riemannian Music Theories* 2011.
- [18] José Collins et Antonio Montero : Equivelar Toroids with Few Flag-Orbits. *Discrete & Computational Geometry* 65 (2): 305-330, 2021.
- [19] Sueli I. Rodrigues Costa, Marcelo Muniz, Edson Agustini et Reginaldo Palazzo : Graphs, Tessellations, and Perfect Codes on Flat Tori *IEEE Transactions on Information Theory*, 50 (10): 2363-2377, 2004.
- [20] Thomas Cover et Peter Hart : Nearest Neighbor Pattern Classification. *IEEE transactions on information theory*, 13(1): 21-27, 1967.

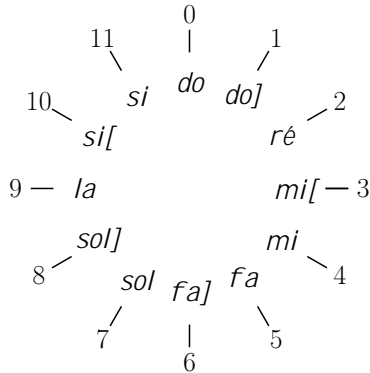


- [21] Harold SM Coxeter et William OJ Moser : *Generators and Relations for Discrete Groups*, volume 14. Springer Science & Business Media, 2013.
- [22] Morgan William Crofton : On the Theory of Local Probability, Applied to Straight Lines Drawn at Random in a Plane. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, (158): 181–199, 1868.
- [23] Michael Scott Cuthbert et Christopher Ariza : music21: A Toolkit for Computer-Aided Musicology and Symbolic Music Data. 2010.
- [24] Center for Computer Assisted Research in the Humanities at Stanford University : Muse-Data. <http://musedata.stanford.edu>.
- [25] Allen Forte : *The Structure of Atonal Music*, volume 304. Yale University Press, 1973.
- [26] Jacob E Goodman, János Pach et Chee K Yap : Mountain Climbing, Ladder Moving, and the Ring-Width of a Polygon. *The American Mathematical Monthly*, 96 (6): 494–510, 1989.
- [27] Jürgen Jost et Jeurgen Jost : *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, volume 42005. Springer, 2008.
- [28] Emmanouil Karystinaios, Corentin Guichaoua, Moreno Andreatta, Louis Bigo et Isabelle Bloch : Musical Genre Descriptor for Classification Based on Tonnetz Trajectories. *In Journées d'Informatique Musicale*, 2020.
- [29] Qiuqiang Kong, Bochen Li, Jitong Chen et Yuxuan Wang : Giantmidi-Piano: A Large-Scale Midi Dataset for Classical Piano Music. *arXiv preprint 2010.07061*, 2020.
- [30] Kunst der Fuge : <https://www.kunstderfuge.com>, 2002-2022.
- [31] Paul Lascabettes : Homologie persistante appliquée à la reconnaissance de genres musicaux. *Master's thesis, École Normale Supérieure Paris-Saclay*, 2018.
- [32] John M Lee : Smooth Manifolds. *In Introduction to smooth manifolds*, pages 1–31. Springer, 2013.
- [33] Florence Levé, Gianluca Micchi et Jean-Paul Allouche : The Inconstancy of Music. *Journal of Mathematics and Music*, 2021.
- [34] Nicolas Meeüs : Toward a Post-Schoenbergian Grammar of Tonal and Pre-Tonal Harmonic Progressions. *Music Theory Online*, 6 (1): 1–8, 2000.
- [35] Nicolas Meeüs : Vecteurs harmoniques. *Musurgia*, pages 7–34, 2003.
- [36] Richard Evan Schwartz : *Mostly Surfaces*, volume 60. American Mathematical Soc., 2011.
- [37] John M Sullivan : Conformal Tiling on a Torus. *In Proceedings of Bridges 2011: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, pages 593–596, 2011.
- [38] Dmitri Tymoczko : The Generalized Tonnetz. *Journal of Music Theory*, pages 1–52, 2012.
- [39] Chee-Keng Yap : How to Move a Chair through a Door. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 3 (3): 172–181, 1987.
- [40] Jason Yust : Geometric Generalizations of the Tonnetz and Their Relation to Fourier Phase Spaces. 2018.
- [41] Jason Yust : Generalized Tonnetze and Zeitnetze, and the Topology of Music Concepts. *Journal of Mathematics and Music*, 14 (2): 170–203, 2020.

# Annexes

## A | Éléments d'harmonie et de *Set-Theory*

Définition A.0.1 (Classe de hauteurs). Une *classe de hauteurs* (angl. *pitch class*) est formée par l'ensemble de toutes les hauteurs de notes séparées par un nombre entier d'octaves considérées à équivalence enharmonique près.



Dans ce mémoire, on se base exclusivement sur des divisions de l'octave en 12 intervalles et on utilise la façon habituelle d'associer les 12 classes de hauteurs aux éléments du groupe cyclique  $Z_{12}$ .

Définition A.0.2 (Ensemble de classes de hauteurs). On appelle *ensemble de classes de hauteurs* (angl. *pitch class set*) toute collection de classes de hauteurs. On dit qu'un ensemble de classes de hauteurs est *ordonné* si l'ordre dans lequel les classes de hauteurs apparaissent est musicalement pertinent. On notera  $E_{ECH}$  l'ensemble des ensembles de classes de hauteurs non ordonnés et  $E_{ECH}^{\leq}$  l'ensemble des ensembles de classes de hauteurs ordonnés.

Définition A.0.3 (Classe d'intervalles ordonnée). La *classe d'intervalles ordonnée* (angl. *ordered pitch class interval*) entre deux classes de hauteurs  $h_1; h_2 \in Z_{12}$  est donnée par  $h_1 - h_2 \pmod{12}$ .

Définition A.0.4 (Nombre de Forte et nature d'un accord). Dans [25], Allen Forte propose une classification des ensembles de classes de hauteurs en fonction de leur disposition la plus compacte et attribue des nombres aux différentes classes ainsi

obtenues. On dira dans ce mémoire que tous les accords de même nombre de Forte sont de même *nature*.

Définition A.0.5 (État d'un accord). Si le contexte harmonique le permet, un accord est dit en *état fondamental* si sa basse (la note jouée la plus grave) correspondant à sa note fondamentale. Les différents *renversements* d'un accord sont déterminés par l'intervalle entre sa basse et sa fondamentale.<sup>33</sup>

## B | Complexes simpliciaux, variétés et actions de groupes

Définition B.0.1 (Points a nement indépendants). Soit  $s \in \{1; \dots; ng\}$ . Des points  $a_0; \dots; a_s \in \mathbb{R}^n$  sont dits *a nement indépendants* si les vecteurs  $(a_i - a_0)_{i \in \{1; \dots; sg\}}$  sont linéairement indépendants.

Définition B.0.2 (Simplexe dans  $\mathbb{R}^n$ ). Soit  $s \in \{1; \dots; ng\}$ . On appelle *s-simplexe* (ou *simplexe de dimension s*) dans  $\mathbb{R}^n$  l'enveloppe convexe  $\text{Conv}(fa_0; \dots; a_sg)$  de tout ensemble de points affinement indépendants  $fa_0; \dots; a_sg$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Les points  $a_0; \dots; a_s$  sont appelés les *sommets* du simplexe et les enveloppes convexes des sous-ensembles de ses sommets sont appelées ses *faces*.

Définition B.0.3 (Complexe simplicial dans  $\mathbb{R}^n$ ). Un *complexe simplicial* dans  $\mathbb{R}^n$  est une union  $K$  de simplexes telle que

- (i) toute face d'un simplexe de  $K$  soit un élément de  $K$ ,
- (ii) toute intersection non vide de deux simplexes de  $K$  soit une face de chacun des deux simplexes.

Définition B.0.4 (Équivalence topologique). Deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  sont dits *topologiquement équivalents* s'il existe un homéomorphisme  $h : X \rightarrow Y$ .

Exemple B.0.5 (Tore). Un *tore* est une surface topologiquement équivalente au produit  $S^1 \times S^1$  où  $S^1$  désigne le cercle unité.

33. On réfère à [1] (entrées « *accord tonal (morphologie)* » et « *accord tonal (altération)* ») qui définit les notions de la *fondamentale* et du *renversement* dans le contexte des accords dits *accords tonals*.

Exemple B.0.6 (Cylindre fini). Un *cylindre fini* est une surface topologiquement équivalente à  $S^1 \times [0;1]$ .

Définition B.0.7 (Action de groupe). Soit  $X$  un ensemble et  $(G; e)$  un groupe d'élément neutre  $e$ . On appelle *action* de  $G$  sur  $X$  toute application  $\alpha : G \times X \rightarrow X; (g; x) \mapsto g \cdot x$  telle que

- (i)  $\forall x \in X; e \cdot x = x$ ,
- (ii)  $\forall g_1, g_2 \in G; g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x$ .

On dit que  $G$  agit *librement* sur  $X$  si  $g \cdot x \neq x$  pour tout  $g \in G \setminus \{e\}$  et pour tout  $x \in X$ . Si  $X$  est un espace topologique, on dit que  $G$  agit *proprement discontinûment* sur  $X$  si pour tout sous-ensemble compact  $K \subset X$ , il n'existe qu'un nombre fini d'éléments  $g_1, \dots, g_n$  de  $G$  tels que  $g_i \cdot K \cap K \neq \emptyset$ ; pour  $1 \leq i \leq n$ .

Si  $G$  est un groupe discret, alors l'action de  $G$  sur une variété différentielle  $M$  est appelée *lisse* si l'application  $M \rightarrow M$  définie par  $p \mapsto g \cdot p$  est lisse pour tout  $g \in G$ .

### Liste des notations et symboles

|   |   |
|---|---|
| $T(k; l; m)$  | le 2-Tonnetz déplié engendré par les classes d'intervalles $k, l$ et $m$ .  |
| $\mathbb{P}(k; l; m)$                               | le 2-Tonnetz replié engendré par les classes d'intervalles $k, l$ et $m$ .  |
| $\mathbb{P}^F(k; l; m)$                             | le 2-Tonnetz replié engendré par les classes d'intervalles $k, l$ et $m$ et à poids déterminés par les nombres de Forte attribués aux accords représentés.    |
| $\mathbb{P}_E^F(k; l; m)$                           | le 2-Tonnetz replié engendré par les classes d'intervalles $k, l$ et $m$ et à poids déterminés par les nombres de Forte et les états des accords représentés. |
| $P_T$   | la fonction de positionnement dans un Tonnetz $T$ définie aux paragraphes 2.4, 2.5 et 2.6.  |
| $E_{ECH}$   | l'ensemble des ensembles de classes de hauteurs (non ordonnés).   |
| $E_{ECH}^<$   | l'ensemble des ensembles de classes de hauteurs ordonnés.   |
| $[a; b]$  | l'intervalle réel fermé de bornes $a$ et $b \in \mathbb{R}$ .   |
| $\emptyset$   | l'ensemble vide.  |
| $\langle \mathbf{e}_1; \dots; \mathbf{e}_n \rangle$ | le réseau engendré par les vecteurs $\mathbf{e}_1; \dots; \mathbf{e}_n$ .   |
| $Z_N$   | le groupe cyclique d'ordre $N$ .  |
| $P(X)$  | l'ensemble des parties d'un ensemble $X$ .  |
| $\text{int}(X)$                                     | l'intérieur d'une partie $X$ d'un espace topologique.   |
| $\text{Card}(X)$                                    | le cardinal d'un ensemble fini $X$ .  |
| $\text{Conv}(X)$                                    | l'enveloppe convexe d'une partie $X$ de $\mathbb{R}^n$ .  |
| $\text{pgcd}(p; q)$                                 | le plus grand commun diviseur de deux entiers non nuls $p$ et $q$ .   |
| $\text{proj}_i$                                     | la projection sur la $i^{\text{ème}}$ coordonnée.   |
| $S^1$   | le cercle unité.  |
| $T_p M$   | l'espace tangent en un point $p$ d'une variété différentielle $M$ .   |